

Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu
Proljeće 2026.



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Sadržaj

1	Pramatematika	1
2	Staroegipatska matematika	3
3	Babilonska matematika	9
4	Antička grčka matematika	15
4.1	Jonsko razdoblje	15
4.2	Atensko razdoblje grčke matematike	23

Predgovor

Povijest matematike je na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu obavezan kolegij za studente diplomskog studija Matematika, modul nastavnički (i izboran za neke druge studije). To nije iznimka, nego je uobičajeno na studijima matematike na mnogim svjetskim sveučilištima. Poneki student se zasigurno pita: A zašto bih ja trebao učiti povijest matematike? To mi je samo nepotrebno „štrebetanje“, a ne treba mi ni za što osim možda za poneku anegdotu u budućem životu, pa zašto to nije neki lagani kolegij za koji ne trebam puno učiti? Naravno, možemo odgovoriti izbjegavanjem konkretnog odgovora: Očito postoji dobar razlog kad je tako posvuda. Takav odgovor ne bi smio biti zadovoljavajući obrazovanoj osobi, a ponajmanje studentu koji se sprema postati nastavnik matematike i u budućnosti će se često susretati s pitanjima učenika i njihovih roditelja zašto u školi moraju učiti matematiku kad im poslije osim malo aritmetike ništa od toga više neće trebati.

Razlozi zašto je povijest matematike dio kurikuluma većine studija matematike, osobito profesorskog usmjerenja, vrlo su raznoliki. Mnogi znanstveni radovi ukazuju na važnost povijesti matematike za nastavu matematike, primjerice [2, 4, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 20, 22, 25, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 39]. Glavni razlozi koji se navode su sljedeći:

- **Kontekst i znanstveni pristup:** Povijest matematike daje kontekst matematičkim rezultatima jer pokazuje kako su mnogi, nerijetko apstraktni, rezultati otkriveni uslijed rješavanja praktičnih problema u stvarnome svijetu i otkriva razloge razvoja mnogih od matematičkih tema. Posebno, kroz proučavanje povijesti matematike postaje očito da matematike nije, kako se često u školi prezentira, skup gotovih nepromjenjivih rezultata, nego da se stalno nadograđuje i razvija.
- **Motivacija i humanizacija:** Kroz povijest matematike lakše je uočiti ljudski element u pozadini često formalne i apstraktne matematike, što indirektno utječe na smanjenje napetosti i povećanje motivacije kod učenika. Kroz povijest matematike matematika iz suhoparne statičke struke i znanosti postaje dinamičnija i ljudska. Također, nastavnici matematike u povijesti mogu naći mnoge zanimljive zadatke za obogaćivanje matematičkih tema koje obrađuju sa svojim učenicima.
- **Poboljšano razumijevanje:** Proučavanje puta do pojedinih rezultata omogućava razumijevanje razloga koji su doveli do danas rutinskih formula, potiče kritičko razmišljanje, produbljuje konceptualno razumijevanje. Učenici i studenti uočavaju kako su se i veliki matematičari mučili i griješili dok nisu zadovoljavajuće osmislili matematičke koncepte. Upoznavanje s greškama i problemima te načinima kako su se matematičari kroz povijest nosili s njima pruža alternativne strategije za rješavanje matematičkih problema.
- **Interdisciplinarnost:** Kroz uvide u povijesni kontekst razvoja matematičkih teorija ne samo da dovijamo poveznicu s općom povijesti, nego i s drugim znanostima. Tako

učenici i studenti mogu bolje razumjeti da matematika nije nešto izvan, već dio stvarnog svijeta. Također, poznavanje glavnih momenata iz povijesti matematike povećava i raspon tema iz vlastite struke o kojima u svakodnevici matematičari mogu razgovarati s drugima te tako doprinosi manjoj izoliranosti matematičara unutar društva.

Ova je skripta prilagođena kolegiju *Povijest matematike* na PMF-Matematičkom odsjeku (jednosemestralni kolegij sa satnicom 45 sati, 5 ECTS-a, no u praksi se održi samo 39 sati, a u skladu s definicijom ECTS-bodova to znači da student za savladavanje kolegija treba utrošiti oko 150 sati). Čak i ako skaliramo tih 150 sati s 39/45, ostaje da očekivano opterećenje pojedinog studenta iznosi oko 130 sati. Zašto ovo navodim? Zato da bude očigledno da studenti u samostalnom radu trebaju (u prosjeku) tjedno potrošiti bar još po nekoliko sati vlastitog rada kako bi uspješno savladali kolegij. Pritom treba uzeti u obzir da se ne radi o kolegiju koji se može „naštrebetati“: To što se navode, primjerice, godine kad se nešto dešavalo ne služi tome da se te godine pamte, nego da se može usporediti što je bilo prije (pa je moglo utjecati na razvoj određene ideje) i što se tada dešavalo u dijelu svijeta o kojem je riječ (pa su društveni, kulturni, politički uvjeti utjecali i na razvoj matematičkih ideja). Posebno to znači da se od studenata očekuje poznavanje osnovnih crta opće povijesti čovječanstva na razini osnovne i srednje škole; za one koji su zaboravili, pri početku svakog odjeljka ugrađena je poveznica na jedan kvalitetni izvor za „brzo ponavljanje“. Naravno, budući da se radi o kolegiju diplomskog studija, podrazumijeva se i poznavanje osnovnih definicija i teorema iz gradiva preddiplomskog studija (i školske matematike).

Od ove akademske godine na početku svakog odjeljka dajem popis matematičkih pojmova čije poznavanje se podrazumijeva u tom odjeljku, a na kraju se daje i sažetak najvažnijih stvari iz pojedinog odjeljka.

Svim studentima kao i svima drugima koji ovu skriptu uzmu u ruke želim zanimljiv i poticajan izlet u prošlost matematike!

Franka Miriam Brückler

Poglavlje 1

Pramatematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

* broj i brojka *

Počeci matematike vezani su uz brojanje, geometrijske uzorke i mjerenje. Točno vrijeme kad su ljudi počeli pokazivati znakove matematičkog razmišljanja nije pouzdano poznato, ali najranije sačuvane tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (**rovaši**), te kao geometrijske ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba [3, 5, 15, 33, 40].

Dva najpoznatija (primarna) izvora pramatematike su rovaši nađeni u Africi:

- kost iz Lebomba: stara oko 43.000 godina, sadrži 29 zareza, no nije sa sigurnošću poznato što se s njima brojalo;
- kost iz Išanga. stara oko 20.000 godina, sadrži nekoliko grupacija zareza i postoje mnoge teorije o njihovom mogućem smislu.

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (*quipu*).

Brojanje i brojke, tj. izrazi i simboli za brojeve, vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina, a čini se da je njihov nastanak vezan za razvoj poljoprivrede i trgovine (razmjene). Prva pomagala za računanje bili su zasigurno prsti (prema Aristotelu, rasprostranjenost brojanja u skupinama po deset nije rezultat izbora, nego više anatomska slučajnost). Računanje se može dokazati tek prije ca. 4000 godina, tj. u doba starih civilizacija u Egiptu i Mezopotamiji [33, 40].



Prvi tragovi ljudskog matematičkog razmišljanja...

... potječu iz kasnog starijeg kamenog doba: Najstariji sačuvani izvori su kosti iz Lebomba i Išanga, koje spadaju u rovaše. Brojke i nazivi za brojeve potječu, čini se, iz mlađeg kamenog doba, dok najstariji pouzdano poznati podaci o računanju potječu iz razdoblja oko 2000. g. pr. Kr.

Poglavlje 2

Staroeegipatska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

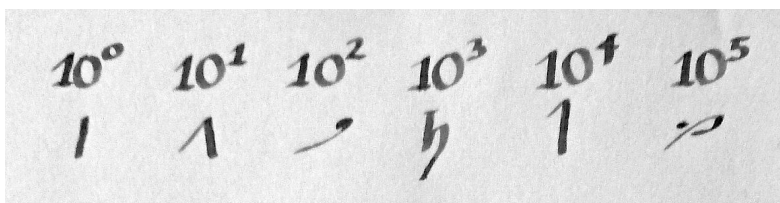
* aritmetika * algebra * geometrija * razlomci * dekadski brojevni sustav * Pitagorin poučak * površine i volumeni * π * linearne jednadžbe

Da bi se moglo pričati o povijesti ikoje ljudske djelatnosti, pa tako i matematike, nužno je razmotriti povijesne izvore. Nadalje, važno je i znati glavne karakteristike razdoblja i kulture u kojoj se proučava određena djelatnost, u našem slučaju matematika. Najstariji sačuvani izvori o staroeegipatskoj matematici potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (ca. 2040.–1794.) [?, 40]. Dva najvažnija i najpoznatija među njima su Rhindov i Moskovski papirus. **Rhindov papirus**, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr., te je to najstariji matematički tekst s poznatim imenom autora. Ime papirusa potječe od škotskog egiptologa A. H. Rhinda, koji ga je 1858. kupio u Luxoru, a danas se ovaj papirus čuva u *British Museum* u Londonu [10]. **Moskovski papirus** potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr. Ruski egiptolog V. S. Goleniščev ga je kupio u Tebi u Egiptu 1892. ili 1893. godine, a danas se nalazi u Puškinovom muzeju u Moskvi. Iz moderne perspektive gledano, ta dva papirusa su zbirke zadataka namijenjene školama državnih službenika. Uz njih poznati su i egipatski matematički kožni svitak iz istog doba, te kasniji papirus Kairo. Iz njih saznajemo da je staroeegipatska matematika nastala iz praktičnih potreba: mjeriteljstvo, građevina, skladištenje, porezi, ... [27].

No, više stoljeća prije nego su otkrili izradu papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski **hijeroglifski brojevni sustav**. Znamenke tog sustava, tj. simboli koji su se koristili za zapisivanje brojeva u njemu, prikazane su slikom 2.1. Svaka znamenka piše se onoliko koliko puta je potrebno da bi zbroj vrijednosti svih znamenki u broju odgovarao iznosu broja kojeg prikazujemo. Primjerice, broj sedamnaest bi se u hijeroglifskom brojevnom sustavu mogao zapisati kao $\cap |||||$. No, i bilo koji drugi raspored jednog simbola $\cap$ i sedam simbola $|$ predstavljao bi isti broj — sustav je, kao što smo rekli, bio nepozicijski. Same znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava su, kao i svi drugi hijeroglifski znakovi, imale svoje simboličko značenje: Znamenka za 1 je, kao u gotovo svim starim civilizacijama, jednostavno crtica; znamenka za 10 predstavlja omču za vezanje nogu stoci (ili potkovu ili petnu kost); znamenka za 100 predstavlja namotano uže; znamenka za 1000 predstavlja lotos; znamenka za 10.000 predstavlja uzdignuti prst; znamenka za 100.000 predstavlja punoglavca; naposljetku, znamenka za jedan milijun predstavlja egipatsko božanstvo svemira Huha (ili pak čovjeka u klečećem stavu) [11, 33].

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
	∩	∩	⌚	⌚	⌚	⌚

Slika 2.1: Znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava.



Slika 2.2: Jedna varijanta znamenki hijeratskog brojevnog sustava.

Prilagođavanjem hijeroglifa pisanju na papirusu razvilo se hijeratsko pismo, kojim su pisani npr. Rhindov i Moskovski papirus. Brojevni sustav je ostao nepromijenjen, ali su znamenke za hijeratske brojke poprimile malo drugačiji, jednostavniji, izgled, prikazan na slici 2.2. Kasnije se iz hijeratskog pisma razvilo demotsko pismo, odnosno iz hijeratskih demotske brojke.

Kao što je jasno iz navedenog, stari Egipćani znali su zapisivati prirodne brojeve. No, znali su i puno više. Uz Mezopotamiju, tu prvi put dokazivo susrećemo osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uz to drugi korijen, ali njega samo u najjednostavnijim slučajevima). Osim prirodnih brojeva bili su poznati i pozitivni razlomci. No, u starom Egiptu kao i ostalim starim kulturama brojevi se još nisu gledali kao apstraktni objekti. S obzirom na to da je brojevni sustav bio nepozicijski, zbrajanje i oduzimanje bilo je jednostavno, bilo je dovoljno pregrupirati znamenke. Simbola koji bi odgovarali današnjim $+$ i $-$ još nije bilo, bar ne ustaljenih.

Zanimljivija je staroegipatska metoda množenja i dijeljenja [40]. Iz moderne perspektive gledano, množenje i dijeljenje svodilo se na korištenje distributivnosti i binarnog zapisa jednog faktora, odnosno djelitelja. Objasniti ćemo te metode kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 1 Pomnožimo $25 \cdot 72$ koristeći suvremene brojke, ali na staroegipatski način. Formira se tablica sa dva stupca, svaki odgovara po jednom od faktora. Prvi red u prvom stupcu sadrži broj 1, a prvi red u drugom stupcu sadrži drugi faktor, ovdje je to 72. Sad se redovi uzastopno udvostručuju sve dok broj u prvom stupcu ne premaši prvi faktor:

1	72
2	144
4	288
8	576
16	1152
32	.

Slijedi niz oduzimanja. Od prvog faktora oduzme se najveći broj u prvom stupcu koji je manji od njega: $25 - 16 = 9$. Pritom označimo (gore podebljano) pripadni broj u

drugom stupcu. Od zadnje razlike oduzimamo sljedeći najveći broj u prvom stupcu, opet označavajući broj pokraj u drugom stupcu. Postupak ponavljamo sve dok razlika ne bude nula: $25 - 16 = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 1 = 0$. Pritom su označeni brojevi 1152, 576 i 72. Stoga je $25 \cdot 72 = 72 + 576 + 1152 = 1800$. Primijetimo da je ovdje umnožak zapravo računat kao $25 \cdot 72 = (1 + 8 + 16) \cdot 72 = (2^4 + 2^3 + 2^0) \cdot 72 = (11001)_2 \cdot 72 = 1 \cdot 72 + 8 \cdot 72 + 16 \cdot 72$.

Primjer 2 Podijelimo $203 : 16$ na staroegipatski način, ali koristeći suvremene brojke. Opet se ispisuju dva stupca. Prvi odgovara djeljeniku (203), a drugi djelitelju (16). U prvom redu se zapisuju 1 i djelitelje 165. Sad se kao i kod množenja redovi uzastopno udvostručuju dok u drugom stupcu ne premašimo djeljenik, ako djelitelj nije veći od djeljenika, a nakon toga se, ako u drugom stupcu nismo dobili baš točno djeljenik, prvi red i naknadni raspolavljaju (kriterij zaustavljanja ćemo napisati niže):

1	16
2	32
4	64
8	128*
2	8
4	4
8	2
16	1

Na mjestu * stali smo s udvostručavanjem jer bi u sljedećem redu premašili djeljenik 203. Slijedi niz oduzimanja: Od djeljenika se u prvom stupcu zaredom oduzimaju najveći mogući brojevi, sve dok razlika ne padne ispod djelitelja. U našem slučaju to znači oduzimanja $203 - 128 = 75$, $75 - 64 = 11 < 16$. Pri svakom oduzimanju se, kao i kod množenja, označava odgovarajući broj desnog stupca (podebljano). Ti označeni brojevi se zbroje ($8 + 4 = 12$) i to je cjelobrojni dio količnika, tj. $203 : 16 = 12$ i ostatak.

Da bismo dobili razlomljeni dio kvocijenta, slijedi niz raspolavljanja redova počevši od 1 i 16. Pritom smo s $\dot{n}$ označili jedinični razlomak $\frac{1}{n}$. Cilj je da označavanjem odgovarajućih redova zbroj označenih brojeva u drugom stupcu bude jednak djeljeniku, 203. Trenutno je taj zbroj $128 + 64 = 192$. Nakon prvog raspolavljanja pribrojimo dobivenih 8 i dobijemo $200 < 203$, dakle nastavljamo raspolavljanje. Ako bismo sad pribrojili iz sljedećeg reda 4 dobili bismo broj veći od 203, dakle taj red ignoriramo. Pribrajamo iz sljedećeg 2, čime smo na 202 i fali 1, kojeg dobijemo nakon četvrtog raspolavljanja. Stoga je kvocijent jednak zbroju označenih brojeva u prvom stupcu: $4 + 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

Uočimo da opisani postupak dijeljenja raspolavljanjem ne mora biti konačan te se ponekad umjesto raspolavljanja koristilo dijeljenje nekim drugim prikladnim brojem, ovisno o djelitelju, no opis takvih primjera bio bi predug te za njih čitatelje upućujemo na [10]. Ono što je svejedno vidljivo iz gornjeg primjera dijeljenja je egipatski pristup razlomcima. Stari Egipćani poznavali su (pozitivne) razlomke, ali nisu ih kao mi danas opisivali kao kvocijente brojnika i nazivnika. Umjesto toga, razlomci su shvaćani kao zbrojevi (različitih) prirodnih brojeva i jediničnih razlomaka $\dot{n} = \frac{1}{n}$,¹ Razlog takvog shvaćanja razlomaka je najvjerojatnije praktične prirode.

Primjer 3 Želimo li 11 kruhova podijeliti na 16 ljudi, najjednostavnije je prvo sve kruhove prepoloviti, čime smo dobili 22 polovice. Njih 16 damo svakome po jednu, preostalo je

¹Jedina iznimka bio je razlomak $\frac{2}{3}$, prema nekim izvorima i $\frac{3}{4}$.



Slika 2.3: Jedan egipatski razlomak.

6 polovica. Njih opet prepolovimo pa imamo 12 četvrtina. Budući je 12 manje od 16, prepolovimo ih još jednom, pa imamo 24 osmine. Njih 16 opet jednu po jednu damo svakome. Preostalo je 8 osmina. Kad njih prepolovimo, dobit ćemo 16 šesnaestina i opet svakom damo po jednu. Dakle, svaka osoba je dobila $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ kruha.

Stoga danas rastav razlomka na zbroj cijelog broja i različitih jediničnih razlomaka nazivamo **egipatskim zapisom razlomka**. U hijeroglifskoj i hijeratskoj notaciji zbrojevi jediničnih razlomaka su se zapisivali jednostavno nadopisivanjem, pri čemu je zapis jediničnog razlomka bio simbol usta ☞ povrh brojke koja predstavlja nazivnik; taj simbol kasnije je postao točka te smo mi zato koristili simboliku $\dot{n}$ [40]. Primjerice, na slici 2.3 je egipatski zapis razlomka $\frac{2}{5}$. Rhindov papirus sadrži tablicu egipatskih zapisa razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$, koji su među ostalim služili olakšanju dijeljenja za gore spomenute kompliciranije slučajeve dijeljenja.

Iz moderne perspektive prirodno se sad postavljaju pitanja: Može li se svaki pozitivan razlomak zapisati na egipatski način? Kako bismo našli takav zapis? Je li takav zapis jedinstven? Na prva dva pitanja odgovara:

Teorem 1 (Fibonacci) *Svaki pozitivan razlomak posjeduje egipatski zapis.*

Tvrđnju iz teorema uključivo pripadne metode dobivanja egipatskog zapisa razlomka otkrio je te u svom djelu *Liber Abaci* (1202.) opisao i (nesavršeno) dokazao znameniti srednjovjekovni matematičar Fibonacci (Leonardo iz Pise). Za potpun formalni dokaz Fibonaccijevog teorema potrebna je:

Lema 1 (J. J. Sylvester) *Neka je $\frac{p}{q} > 1$ razlomak manji od 1 i $p \neq 1$. Neka je $\frac{1}{n}$ najveći jedinični razlomak manji od $\frac{p}{q}$. Tada je $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{qn}$ razlomak sa svojstvom $r < p$.*

Dokaz Sylvesterove leme. Imamo: $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn-q}{qn}$, tj. $r = pn - q$. Pretpostavimo $r \geq p$, odnosno $p(n-1) \geq q$. Budući da je $n > 1$, slijedi $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, što je kontradikcija. 🐥

Dokaz Fibonaccijevog teorema. Ako krenemo od pozitivnog razlomka i uzastopno oduzimamo najveći jedinični razlomak manji od njega, Sylvesterova lema garantira da će se brojnici smanjivati. Zbog dobrog uređaja na skupu $\mathbb{N}$ slijedi da ne možemo nastaviti unedogled, pa je teorem dokazan. 🐥

Primjer 4 *Zapišimo $\frac{3}{7}$ na egipatski način, koristeći Fibonaccijev algoritam:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} > \frac{3}{7} > \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7} - \frac{1}{3} &= \frac{2}{21}; \\ \frac{1}{10} > \frac{2}{21} > \frac{1}{11}; \quad \frac{2}{21} - \frac{1}{11} &= \frac{1}{231}. \end{aligned}$$

Dobili smo jedinični razlomak, dakle je

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Zadatak 1 Na egipatski način zapišite rješenje sljedećeg zadatka [28]: Netko je iz riznice uzeo $\frac{1}{13}$ njenog sadržaja. Drugi je uzeo $\frac{1}{17}$ onog što je preostalo. Ostavio je 150 jedinica sadržaja u riznici. Koliko je na početku bilo u riznici?

Teorem 2 Svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo egipatskih zapisa.

Dokaz. Egzistencija je dana Fibonaccijevim teoremom. Neka je nađen jedan egipatski zapis razlomka $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = m + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}.$$

Jednakost $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ dijeljenjem s jednim od nazivnika početnog egipatskog zapisa, recimo s k_n , daje $\frac{1}{k_n} = \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}$. Ako to supstituiramo na mjesto $\frac{1}{k_n}$ u prvom egipatskom zapisu, dobili smo novi egipatski zapis istog razlomka:

$$\frac{p}{q} = m + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i} \right) + \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Očigledno se prethodno dijeljenje zapisa broja 1 s nekim od nazivnika trenutnog egipatskog zapisa može ponavljati unedogled, dakle vrijedi tvrdnja teorema. 

U Rhinodovom i Moskovskom papirusu nalazimo i zadatke koje bismo danas ubrojali u jednostavne linearne i čisto kvadratne jednadžbe, dakle u algebru. Tipičan primjer je sljedeći [10].

Primjer 5 (RP31) Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine 33. Koliko sadrži hrpa?

Vidimo da termin „hrpa“ odgovara modernom pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama“, česti su i zadaci s omjerima *pe(f)su*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pe(f)su* je omjer količina dobivenog kruha odnosno piva i utrošenog žita) [10, 40].

Primjer 6 (RP77) Primjer razmjene piva za kruh. Recimo da ti je rečeno da 10 des² pive (s pefsu 2) treba zamijeniti za kruhove (s pefsu 5). Koliko kruhova će biti?

Zadatak 2 Na način koji smatrate što sličniji staroegipatskom, riješite zadatak RP34 [10]: Hrpa, njezina polovina i njezina četvrtina skupa daju 10. Koliko sadrži hrpa?

Rješenja svih zadataka u ovim papirusima, kao i općenito u starim civilizacijama, daju se kao konstatacije, bez objašnjenja i pokušaja generalizacije, a kamoli dokaza. Primjerice, rješenje zadatka RP77 iz prethodnog primjera dano je ovako: Izračunaj količinu brašna u 10 des pive; to je 5 hekata.³ Pomnoži 5 s 5, to je 25. Reci onda da za razmjenu treba 25 kruhova.

Stari su Grci otkriće geometrije pripisivali Egipćanima. Geometrijska znanja starih Egipćana svakako su bila impresivna. Poznavali su specijalni slučaj Pitagorinog poučka. Naime, starim Egipćanima je bila jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug utvrđivali su promatranjem točaka na horizontu gdje neka zvijezda izlazi i zalazi, a zatim se pomoću konopa s jednoliko razmaknutih 12 čvorova i pitagorejske trojke

²Tipična staroegipatska posuda za pivo imala je volumen 1 des, to je otprilike 2.4 L.

³Hekat je staroegipatska mjera volumena, iznosi otprilike 4.8 L.

(3, 4, 5) utvrđivao na prvi smjer okomiti smjer istok-zapad. No, tek papirus Kairo (iz ca. 300. pr. Kr., dakle nakon doba pitagorejaca) navodi i pitagorejske trojke (5, 12, 13) i (20, 21, 29). Stari su Egipćani znali računati i razne površine (trokut, pravokutnik, trapez) i volumene (kocka, kvadar). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine. Posebno je poznat 14. zadatak u Moskovskom papirusu s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide [40]. Ipak, najzanimljiviji je staroegipatski način računanja površine kruga. Čini se da je u doba kad su nastali Moskovski i Rhindov papirus već bio rasprostranjen postupak kakav je opisan, npr., u sljedećem zadatku [10, 40].

Primjer 7 (RP41) *Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 i visine 10? Oduzmi $\frac{1}{9}$ od 9. Ostaje 8. Pomnoži 8 s 8, dobiješ 64. Pomnoži 64 s 10, to je 640 kubičnih kubita.⁴*

Dakle, stari Egipćani su površinu kruga promjera d računali kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. S obzirom na to da je postupak bio šire poznat, čini se da su donekle implicitno primijetili proporcionalnost površine kruga i površine kvadrata nad polumjerom odnosno promjerom, no staroegipatski pristup još ne dozvoljava da govorimo o poznavanju ni naslućivanju egzistencije konstante koju danas zovemo π . Također, nema naznaka da su bili svijesni da taj postupak ne daje egzaktnu vrijednost površine. Ako staroegipatski postupak usporedimo s modernim, vidimo da staroegipatska procjena površine kruga odgovara aproksimaciji $\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3.16$.

Zadatak 3 *Koliko, izraženo u postocima, iznosi greška računanja površine kruga na staroegipatski način u odnosu na točnu vrijednost?*



Matematika u starom Egiptu...

... bila je praktično orijentirana. Hijeroglifski brojevni sustav iz 3. tisućljeća pr. Kr. bio je aditivan i dekadski, a nakon otkrića papirusa hijeroglifske brojke su prilagođene u sklopu hijeratskog pisma. Dva najstarija i najpoznatija izvora staroegipatske matematike su Rhindov i Moskovski papirus, oba iz prve polovice 2. tisućljeća pr. Kr. Oni sadrže aritmetičke, algebarske i geometrijske zadatke za škole državnih službenika, bez simbolike, dokaza, izvoda ili generalizacije pravila. Stari egipćani poznavali su aritmetiku s pozitivnim razlomcima te znali rješavati jednostavnije algebarske i geometrijske zadatke. Zbrajanje i oduzimanje se provodilo pregrupiranjem znamenki, dok se množenje i dijeljenje svodilo na kombinaciju udvostručavanja odnosno prepolavljanja sa zbrajanjem i oduzimanjem. Razlomci (pozitivni) su bili shvaćani kao zbrojevi prirodnih brojeva i različitih jediničnih razlomaka (tzv. egipatski zapis racionalnog broja). Jedan algoritam za dobivanje egipatskog zapisa razlomka potječe iz srednjeg vijeka od fibonaccija. Njegovim preciziranjem može se dokazati da svaki pozitivan racionalan broj posjeduje beskonačno mnogo egipatskih zapisa. Sačuvani su i zadaci riječima, osobito zadaci s hrapama i omjerima pefsu, koji odgovaraju jednostavnim linearnim jednadžbama. Uz računanje jednostavnih površina i volumena, stari Egipćani znali su izračunati volumen krnje kvadratne piramide i valjka. No, za površinu kruga koristili su postupak koji daje samo približnu vrijednost, bez svijesti o postojanju konstante π niti o tome da se zapravo radi o aproksimaciji.

⁴1 kubit $\approx 52,3$ cm.

Poglavlje 3

Babilonska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

* aritmetika * algebra * geometrija * numerička matematika * teorija brojeva * pozicijski brojevni sustav * pitagorejske trojke * Pitagorin poučak * Talesov teorem * površine i volumeni * π * linearne i kvadratne jednadžbe * korjenovanje * iterativne metode

Na području Mezopotamije tijekom prva tri tisućljeća pr. Kr. izmijenili su se različiti dominantni narodi (Sumerani, Akadani, Babilonci, Asirci, Perzijanci), no od ca. 2500. pr. Kr. svi oni su koristili varijante klinastoga pisma te su iz tog razdoblja sačuvane mnoge glinene pločice, od kojih stotinjak imaju matematičke sadržaje (tablice, zadatke) [19, 34, 40]. Najviše takvih potječe iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr. Kr.). Nedavno (2016.) je otkrivena i jedna pločica na kojoj se može naći rani oblik primjene trapezne formule. Iz tih sačuvanih pločica saznajemo da je i sumersko-babilonska matematika bila praktično orijentirana (trgovina, građevina, nasljeđivanje, astronomija), a rješenja zadataka su se kao i u starom Egiptu davala se bez argumenata, dokaza ili generalizacije.

Često se čuje ili pročita da su Sumerani odnosno Babilonci koristili sustav s bazom 60, ali to nije sasvim točno. Iz ranijih, arhaičnih piktograma su se, kao uostalom i samo klinasto pismo, razvile klinaste brojke. Sam pripadni brojevni sustav se mijenjao tokom vremena. Uglavnom je bio dekadski ili pak primarno seksagezimalni (sustav s bazom 60) i sekundarno dekadski. Dugo vremena ti sustavi bili su aditivni ili aditivno-multiplikativni, no njihov razvoj postigao je vrhunac u doba treće urske dinastije (potkraj 3. tisućljeća pr. Kr.) u Babilonu [11, 33, 40]. Taj sustav poznat je kao **(klasični) babilonski brojevni sustav**. Bio je to prvi pozicijski brojevni sustav u povijesti. Radilo se o brojevnom sustavu s primarnom bazom 60 i sekundarnom bazom 10. Zbog nedostatka znamenke nula taj sustav nije bio apsolutno pozicijski,¹ ali ga je već sama pozicionalnost učinila najmnocnijim (u pogledu zahtjevnijih izračuna) među starim brojevnim sustavima. Zato je on iznimno dugo ostao u upotrebi u znanosti, posebice astronomiji, a i dan danas ga povremeno koristimo (računanje vremena; iznosi kutova u stupnjevima). Pedeset i devet znamenki tog sustava pisane su pomoću dva klina, horizontalnog $\angle$ koji ima vrijednost deset i vertikalnog $\uparrow$ koji ima vrijednost jedan, a vrijednost pojedine znamenke se formirala po aditivnom principu. Primjerice, $\angle\angle\uparrow\uparrow\uparrow$ bi bila seksagezimalna znamenka 23.

Jedna od prednosti seksagezimalnog sustava u odnosu na moderni pozicijski dekadski sustav je da više razlomaka imaju konačan zapis.

¹Da u modernom dekadskom pozicijskom sustavu nedostaje znamenka 0, ne bismo bez konteksta mogli znati predstavlja li primjerice 12 broj dvanaest, stotinu i dva, stotinu dvadeset, ... — vrijednost znamenke ne bi bila apsolutno određena njenom pozicijom.

Primjer 8 Zapišimo razlomak $\frac{17}{48} = 0,3541\bar{6}$ seksagezimalno:

$$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60^1} + \frac{b}{60^2} + \dots,$$

gdje su $a, b, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$. Množenje sa 60 daje $21\frac{1}{4} = a + \frac{b}{60} + \dots$, dakle je $a = 21$. Oduzmemo li 21, preostaje $\frac{1}{4} = \frac{b}{60} + \dots$, što opet pomnožimo sa 60. Dobijemo $b = 15$, dakle je

$$\frac{17}{48} = \frac{21}{60} + \frac{15}{60^2} = (0; 21; 15)_{60},$$

tj. $\lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$.

Uz nedostatak znamenke nula, mana klasičnog babilonskog brojevnog sustava je da je osnovna tablica množenja veličine 60×60 (zapravo, 59×59), no tom su problemu Babilonci doskočili korištenjem tablica kvadratnih brojeva i algebarskim postupcima koji su ekvivalentni modernim formulama:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Primjer 9 Pomnožimo sto sa sedamnaest na babilonski način. Broj sto u seksagezimalnom sustavu je $1 \cdot 60 + 40 \cdot 1 = \lll \lll \lll$, a sedamnaest je $\lll \lll \lll \lll \lll \lll$.

Recimo da želimo ta dva broja pomnožiti koristeći prvo pravilo. U tom slučaju nam prije korištenja tablice kvadrata treba zbroj ta dva broja: $(1; 40)_{60} + (0; 17)_{60} = (1; 57)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$. Nakon toga u tablici kvadrata nađemo kvadrat tog broja te kvadratu faktora sto i sedamnaest.

Kvadrat od sto je deset tisuća:

$$10000 = (2; 46; 40)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Kvadrat od sedamnaest je dvije stotine osamdeset i devet:

$$289 = (4; 49)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Kvadrat zbroja faktora je trinaest tisuća šest stotina osamdeset i devet:

$$13689 = (3; 48; 9)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Od posljednjeg oduzmemo prva dva kvadrata:

$$\begin{aligned} (3; 48; 9)_{60} - (2; 46; 40)_{60} - (4; 49)_{60} &= (3; 48; 9)_{60} - (2; 51; 29)_{60} = \\ &= (56; 40)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll. \end{aligned}$$

Na kraju prepolovimo i dobijemo $(28; 20)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$, što je točan rezultat: $100 \cdot 17 = 1700 = 28 \cdot 60 + 20$.

Zadatak 4 Pomnožite $\lll \lll \lll$ s $\lll \lll \lll \lll \lll \lll$ koristeći drugo pravilo.

²Kod seksagezimalnog zapisa na moderan način znamenke na pojedinim pozicijama razdvajamo točka-zarezom. Također, uobičajeno je prve dvije znamenke iza seksagezimalnog zareza označavati s ' i ', primjerice. $(0; 5; 2)_{60}$ se obično zapisuje kao $5'2''$.

Dijeljenje se svodilo na množenje s recipročnim brojem ($a/b = a \cdot \frac{1}{b}$), uz korištenje tablice recipročnih brojeva.

Mnoge babilonske pločice sadrže algebarske zadatke, točnije zadatke koji se iz moderne perspektive svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave [40].

Primjer 10 (BM 13901) Pločica BM 13901 sadrži zadatak koji glasi „Skupio sam površinu i moje nasuprotno: To je 45'." Pod površinom se ovdje misli na površinu kvadrata nepoznate duljine stranice, dok je 'moje nasuprotno' sama ta stranica. Vidimo da se radi o jednažbi koju bismo danas zapisali kao $x^2 + x = \frac{45}{60}$. Postupak rješavanja je, skraćeno prema [26, str. 50–52], sljedeći: Uzmi 'projekciju' (koeficijent uz x) 1 i prepolovi, to je 30'; zbroji 15' (četvrtinu kvadrata 'projekcije') i 45' (slobodni član), to je 1; dakle, rješenje je razlika od 1 (duljine stranice kvadrata površine 1) i 30' (polovinu 'projekcije'), dakle $30' = \frac{1}{2}$. Vidimo da se u osnovi radi o primjeni postupka za rješavanje kvadratne jednadžbe: (Pozitivno) rješenje jednadžbe $x^2 + bx = c$ je $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.

Zadatak 5 Na pločici BM 13901 nalazimo ovaj zadatak [26, str. 73–74]: „Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio 25'25". Strana je $\frac{2}{3}$ strane i 5'." Kako biste interpretirali „moje strane“? Zapišite ovaj zadatak modernom simbolikom!

Naravno, geometrija je također bila razvijena u babilonsko doba. Na sačuvanim pločicama nalazimo mnoge geometrijske zadatke, posebice vezano za građevinu (izgradnja nasipa i kanala, često trapeznog presjeka) i astronomiju. Naravno, kao i u isto doba Egipćani, Babilonci su znali računati površine kvadrata, pravokutnika, a znali su i da su obujmi prizme i valjka jednaki umnošku površine baze i visine. Evo jednog primjera geometrijskog zadatka vezanog za izgradnju kanala.

Primjer 11 Na pločici VAT 7528 nalazimo zadatak [34, 40]: „Mali kanal. 6 kuša dug. 2 kuša gornja širina. 1 kuš donja širina. $1\frac{1}{2}$ kuš dubina. $\frac{1}{3}$ sar zemlje radni učinak. 18 ljudi. Dani su što? [...] 11 dana i $\frac{1}{4}$ su dani.“

Vidljivo je da je ovdje opisano da je presjek kanala oblika jednakokračnog trapeza. Jedinica sar može biti jedinica površine i volumena, ovdje volumena (kojeg dnevno iskopa jedan čovjek). Pritom je 1 sar = 1 nindan² kuš, gdje je 1 nindan = 12 kuš.³ Volumen kanala ispada $(1,7; 30)_{60}$ sar. S druge strane, 18 ljudi dnevno iskopa 6 sar, dakle se cijeli kanal iskopa za $(11; 15)_{60}$ dana.

Izračuni površine i opsega kruga u babilonsko doba najčešće odgovaraju modernoj aproksimaciji $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, ponekad $\pi \approx 3$. Kao i kod starih Egipćana, ovdje ne možemo još govoriti o svijesti o egzistenciji i ulozi broja π niti o njegovoj svjesnoj aproksimaciji.

Primjer 12 Jedna pločica iz razdoblja 1900. – –1600. pr. Kr. interpretira se kao tvrdnja da je opseg pravilnog šesterokuta jednak $\frac{24}{25}$ opsega tom šesterokutu opisane kružnice.

Ako to razmotrimo na suvremen način, budući da je stranica a_6 pravilnog šesterokuta upisanog u kružnicu jednak njezinom polumjeru ($r = a_6$), opseg šesterokuta ($O_6 = 6a_6 = 6r$) je prema toj tablici jednak $\frac{24}{25}O$. Danas znamo da je to $\frac{24}{25} \cdot 2r\pi$. Vidimo da je tvrdnja na pločici ekvivalentna aproksimaciji $\pi \approx \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

³Jedinica duljine kuš (ili giš) poznata je i pod nazivom kubit, a nindan se može prevesti sa štap i iznosio je oko 6 m.

Jedna od dvije najznamenitije sačuvane babilonske pločice, Plimpton 322 (ca. 1800. g. pr. Kr.) sadrži tablicu **pitagorejskih trojki**. Zapravo, u toj je tablici su u drugom stupcu kraće katete b pravokutnih trokuta, u trećem odgovarajuće hipotenuze c , ali u prvom stupcu su kvadrati omjerâ $\frac{c}{a}$. Primjerice, u 14. redu te tablice nalaze se brojevi $\frac{c}{a} = (1; 25,48,51,35,6,40)_{60}$, $b = (29,31)_{60}$ i $c = (53,49)_{60}$. Vidimo dakle da taj redak odgovara pitagorejskoj trojci (1771, 2700, 3229) [34, 40]. Prema nekim interpretacijama, ta se tablica može gledati kao rana trigonometrijska tablica. Babilonci su poznavali i opći Pitagorin poučak, bez dokaza, i koristili ga za rješavanje raznih geometrijskih zadataka. Pogledajmo dva primjera.

Primjer 13 *Na jednoj starobabilonskoj pločici pronađenoj 1936. kod Suse nalazimo određivanje polumjera kružnice opisane jednakokračnom trokutu sa stranicama duljina 50, 50 i 60 [40, str. 134–135]. U prvom se koraku računa visina 40 koristeći Pitagorin poučak, a onda se on koristi da bi se dobio polumjer $(31,15)_{60}$. Riješite taj zadatak modernom simbolikom, ali koristeći navedeni postupak!*

Primjer 14 *Na pločici BM 85 196 nalazi se zadatak [40]: „Greda duljine 30' kuš je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za 6' kuš. Koliko je donji kraj udaljen od zida? U rješenju se redom računa: Kvadrat od 30' je 15'. Oduzme se 6' od 30' i dobije 24'. To se kvadrira i dobije 9'36". To se oduzme od 15', ostaje 5'24". Naposljetku je rješenje drugi korijen posljednjeg broja, tj. 18'.*

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera [40, str. 138–139].

Naposljetku, u babilonsko doba možemo naći i začetke numeričke matematike. konkretno iterativnih metoda za izračunavanje aproksimativnih iznosa raznih jednadžbi. Kako sugerira druga od dviju najznamenitiji sačuvanih pločica YBC 7289, za aproksimativno izračunavanje drugih korijena korištena je iterativna metoda danas poznata pod imenom **Heronova metoda**, jer ju je opisao starogrčki matematičar Heron Aleksandrijski u svom djelu *Metrica* (vj. 1. st. AD). Na pločici YBC 7289 nalazimo crtež kvadrata s ucrtanim dijagonalama i tri brojke. Prva brojka je $\lll = 30$, vjerojatno 30', uz stranicu, dakle kvadrat ima duljinu stranice $30' = \frac{1}{2}$. Druga brojka je $\lceil \lll \lceil \lceil \lceil \lceil \lceil \lll \lll \lll \lll \lll \lll$, tj. $(1; 24,51,10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421\overline{296}$, što je $\sqrt{2}$ (s greškom reda veličine samo 10^{-7}). Treća brojka je $\lll \lll \lll \lll \lceil \lceil \lll \lceil \lceil \lceil \lceil \lll \lll \lll \lll \lll$, tj. $(0,42; 25; 35)_{60} = 0,70710648\overline{1}$, tj. duljina dijagonale nacrtanog kvadrata (opet s greškom reda veličine 10^{-7}) [5, 40]. Tako dobre vrijednosti naravno nisu mogle biti plod slučaja i pomnije istraživanje pokazuje da su $(1; 24,51,10)_{60}$ prve četiri seksagezimalne znamenke trećeg i četvrtog koraka Heronove metode za računanje drugog korijena od 2, iz čega zaključujemo da je Babiloncima bila poznata ta metoda.

Napomena 1 *Podsjetimo se Heronove metode za korjenovanje: Želimo li korjenovati neki broj n , krećemo od neke početne aproksimacije za $\sqrt{n}$. Primjerice, za račun $\sqrt{2}$ mogli bismo krenuti od početne aproksimacije $a_0 = 1$.*

U svakom koraku je nova aproksimacija polovina zbroja prethodne aproksimacije s kvocijentom broja kojeg korjenujemo i prethodne aproksimacije:

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} \left(a_i + \frac{n}{a_i} \right).$$

Konkretno, za izračun $\sqrt{2}$ imamo sljedeća prva četiri koraka:

i	a_i	$a_{i+1} \approx \sqrt{n}$	seksagezimalno	dekadski
1	1	$\frac{3}{2}$	1; 30	1.5
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	1; 25	1.41 $\dot{6}$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	1; 25,51,10(.35,...) $\approx$ 1; 25,51,11	1.13169642857...
4	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	1; 25,51,10(.7,...) $\approx$ 1; 25,51,10	1.41421356237...

S postupkom stajemo kad se zadovoljavajući broj znamenki počne ponavljati, primjerice ovdje su se počele ponavljati prve četiri seksagezimalne znamenke pa zaključujemo da je $\sqrt{2} \approx (1,25; 51; 10)_{60}$ aproksimacija s greškom reda veličine manjom od 60^{-3} .



Matematika u Mezopotamiji ...

... se kao i u drugim starim kulturama razvila iz praktičnih potreba. Primarni izvori su glinene pločice pisane klinastim pismom, a većina sačuvanih je iz doba starobabilonskog carstva. U to je doba korišten prvi pozicijski sustav u povijesti, koji je bio primarno seksagezimalan, a sekundarno dekadski, no zbog nedostatka znamenke nula nije bio apsolutno pozicijski. Množenje se svodilo na zbrajanje i oduzimanje kvadrata brojeva, a dijeljenje na množenje s recipročnim brojem, pri čemu su sačuvane razne tablice kvadrata i recipročnih brojeva. Babilonci su znali rješavati i neke linearne i kvadratne jednadžbe te njihove sustave, ali bez generalizacije ili dokaza ispravnosti postupaka. Geometrijski zadaci iz babilonskog doba najčešće su vezani za građevinu, a po svom matematičkom sadržaju slični su egipatskima: računanje raznih površina i volumena. Pritom su se za opseg i površinu kruga koristili postupci koji interpretirani na moderan način odgovaraju aproksimacijama broja π s $3\frac{1}{8}$ ili s 3. Babilonci su poznavali iskaz Talesovog teorema te općeg slučaja Pitagorinog poučka, a tablica Plimpton 322 sadrži tablicu pitagorejskih trojki. U babilonsko doba bio je poznat i Heronov postupak za korjenovanje, što zaključujemo iz iznimno dobrih približnih iznosa za $\sqrt{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ na tablici YBC 7289.

Poglavlje 4

Antička grčka matematika

4.1 Jonsko razdoblje



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

dokaz * broj i brojka * prirodni brojevi * parni i neparni brojevi * prosti i složeni brojevi * savršeni brojevi * racionalni i iracionalni brojevi * aritmetika * teorija brojeva * geometrija * kut * pravci i kružnice * mnogokuti * Talesov poučak * Pitagorin poučak i pitagorejske trojke * zajednička mjera * Euklidov algoritam

Dobro je poznato da temelji znanstvenog razmišljanja sežu u doba antičke Grčke, u tzv. arhajsko razdoblje starogrčke povijesti. Tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj **grčki alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ϵ ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ; M, μ ; N, ν ; Ξ , ξ ; O, $\omicron$; Π , π ; P, ρ ; Σ , σ ili ς ; T, τ ; Y, υ ; Φ , φ ; X, χ ; Ψ , ψ ; Ω , ω .

U isto se doba počinju se razvijati i grčki polisi (gradovi-države). Na području Jonije (današnja jugozapadna Turska) se na prijelazu 7./6. st. pr. Kr. pojavljuju temelji filozofije i znanstvenog načina razmišljanja. Pod utjecajem egipatskog i babilonskog nasljeđa, tu se počela razvijati i matematika, te je stoga prvo razdoblje starogrčke matematike (otprilike od početka 6. st. pr. Kr. pa do otprilike početka 5. st. pr. Kr.) poznato kao jonsko razdoblje starogrčke matematike. Iz tog doba nije sačuvan nikoji primarni izvor, no temeljem sekundarnih izvora saznajemo da se u to doba matematika počela formirati u znanost u kojoj se tvrdnje dokazuju. Najvažniji sekundarni izvor za ovo, a kasnija razdoblja je **Proklo** (5. st. A. D.), točnije njegovi komentari Euklidovih *Elemenata* (u nastavku ih označavamo s EE) [23, 40].

Brojevi su se u jonsko doba, pa i dalje do 3. st. pr. Kr., zapisivali koristeći **atički (akrofonski) brojevni sustav**. Taj je sustav primarno dekadski i sekundarno kvinarni, aditivni brojevni sustav (kao i kasniji, poznatiji, rimski brojevni sustav) [33, 11, 40]. Znamenke akrofonskog sustava su:

I = 1 ($\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$); Π = 5 ($\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$); Δ = 10 ($\delta\acute{\epsilon}\kappa\alpha$); I^{Δ} = 50; H = 100 ($\acute{\epsilon}\kappa\tau\acute{o}\nu$); I^{H} = 500; X = 1000 ($\chi\acute{\iota}\lambda\iota\omicron\upsilon$); I^{X} = 5000; M = 10000 ($\mu\nu\rho\acute{\iota}\acute{\alpha}\varsigma$); I^{M} = 50000.

Primjerice, broj kojeg danas zapisujemo kao 10539, u antičkom brojevnom sustavu bio bi zapisan kao $\text{M}^{\text{I}^{\Delta}}\Delta\Delta\Delta\Pi\text{IIII}$.

Tradicionalno se prvim „pravim” matematičarem smatra **Tales** iz Mileta (oko 624.–527. pr. Kr.). On je prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inženjer. Tradicija mu pripisuje prve dokaze, ali se zapravo ne zna je li išta dokazao. Štoviše, ne zna se ni je li Tales išta pisao. Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A. D.) i Proklovih (5. st. A. D.) komentara EE. Prema Proklu, Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Diogenes Laertius mu pripisuje Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice.¹ Diogenes Laertius spominje i legendu o navodnom Talesovom određivanju visine piramide temeljem koje se Talesu pripisuju Talesovi teoremi o proporcionalnosti. Proklo pak Talesu pripisuje sljedeća četiri teorema: Svaki promjer raspolavlja krug; kutevi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki; vršni kutevi su jednaki; KSK-teorem o sukladnosti trokuta. No, nipošto nije sigurno da je išta od toga Tales stvarno dokazao, moguće je da se kod njega još radilo samo o empirijski utvrđenim činjenicama. Također, postoje i rasprave o točnom smislu tvrdnji (npr. vezano za teorem o kutovima uz osnovicu jednakokračnog trokuta u Proklovom tekstu nalazimo izraze koji su bliži značenju sličan nego jednak) [5, 23, 40].

Najstariji pouzdano poznati matematički dokazi potječu od pitagorejaca, pripadnika škole koju je osnovao **Pitagora sa Samosa** (ca. 570.–490. pr. Kr.). O njegovom životu malo toga pouzdano zna, a nije ni sigurno je li ikoji od njemu pripisanih teorema sam otkrio i(li) dokazao. Rođen je na Samosu kao sin trgovca i s ocem je imao prilike putovati, a bio je i dobro obrazovan. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar. Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos i tamo osnovao svoju prvu školu („polukrug”). Iz ne pouzdano poznatih razloga je 518. (ili nešto ranije) otišao u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnova znanstveno-vjerski-mističku **pitagorejsku školu**. Njene članove danas nazivamo pitagorejcima, no sami su se nazivali *μάθηματικοί* (*μάθημα* = znanje, ono što se uči). Pitagorejska škola je bila dijelom tajna zajednica pa mnogi podaci o njoj nisu pouzdani, a Pitagori su pripisivana božanska svojstva, te su to glavni razlozi zašto danas ne znamo tko je dokazao koji pitagorejski teorem. No, sigurno je da su pitagorejci počeli deduktivno dokazivati matematičke tvrdnje. Krajem 6. st. pr. Kr. je Pitagora zbog političko-ratnih sukoba u kojima su sudjelovali pitagorejci pobjegao u Metapont i vjerojatno ondje umro, no ne zna se kako i kada [5, 23].

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji brojeva. Pitagorejci su prvi koji su brojeve gledali kao samostalne, apstraktne objekte. No, za njih, a tako i kasnije za sve starogrčke matematičare, broj (*ἀριθμός*) je isključivo prirodan broj.² Brojevima su pridavana mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima. Aritmetika kakvu su razvijali pitagorejci i ostali klasični starogrčki matematičari poznata je kao **teorijska aritmetika**, a iz moderne perspektive možemo ju smatrati začetkom teorije brojeva. Za razliku od toga, praktično računanje (logistika) u antičkoj Grčkoj nije smatrano matematičkom djelatnošću. Za logistiku su se u jonsko doba kao pomagala koristili kamenčići i prsti [5, 23].

Pitagorejci su razvili četiri discipline kojima je kasnije, početkom srednjeg vijeka, Boethius dao zajednički naziv *quadrivium*. Prva od njih je već spomenuta (teorijska) aritmetika, koja se bavi onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost). Druga disciplina *quadrivium*-a je **geometrija** (*γεωμετρία*), koja se bavi onim što se može mjeriti

¹Najstariji sačuvani dokaz ovog teorema nalazimo u EE kao (EEIII31).

²Pritom jedinica (monada, *μόνος*) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji VII. knjige EE piše: Broj je skup jedinica.

(veličinama: duljina, površina, volumen, ali i trajanje, masa). Preostale dvije discipline *quadrivium*-a su glazba (harmonija, aritmetika u vremenu) i astronomija (geometrija u vremenu). O pitagorejskoj aritmetici saznajemo ne samo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. A. D). Mnogi pitagorejski aritmetički rezultati sačuvani su u VII., VIII. i IX. knjizi EE. Pitagorejci su uveli razne klasifikacije (prirodnih) brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: **Parni brojevi** su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a **neparnima** pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i **proste i složene brojeve**.³ Razmatrali su i **savršene brojeve**, tj. brojeve koji su zbrojevi svih svojih pravih djelitelja, te kvadratne i kubne brojeve, tj. brojeve oblika n^2 i n^3 . Kasnije, vjerojatno tek neopitagorejci u postklasično helenističko razdoblje (oko prijelaza era), su razmatrani i razni figurativni brojevi te prijateljski brojevi (dva broja su prijateljska ako je svaki od njih zbroj pravih djelitelja drugog, tj. savršeni su brojevi oni koji su prijateljski sami sebi) [5, 23, 40]. Pitagorejcima se pripisuje sljedeći poznati teorem:⁴

Teorem 3 (EEIX36) *Ako je proizvoljno mnogo brojeva počevši od jedinice razvijeno u dvostrukoj proporciji⁵ sve dok im zbroj ne bude prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim daje broj, taj broj je savršen.*

Suvremenim načinom rečeno: Ako je $p = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^m = 2^{m+1} - 1$ prost broj, onda je $n = 2^m p$ savršen.

Pitagorejci su se vezano za Pitagorin poučak (vidi niže) bavili i pitagorejskim trojkama. Gotovo sigurno su znali ih ima beskonačno mnogo, a pripisuje im se i dokaz sljedećeg teorema (teorem dajemo u suvremenoj formulaciji):

Teorem 4 (EEX29, lema) *Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka⁶ i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n , koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.*

Primijetimo da specijalno za $n = 1$ odmah vidimo da postoji beskonačno mnogo pitagorejskih trojki [5]. Napomenimo ovdje da je generalizaciju gornje tvrdnje na općenite pitagorejske trojke dokazao tek 1901. L. Kronecker: Sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 = c^2$ su, do na udvostručavanje, dana kao $(2mnk, (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k)$ gdje su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $m > n$ i m i n su relativno prosti i nisu oba neparni (**Kroneckerov teorem**) [1].

Iako ne znamo je li Pitagora osobno dokazao Pitagorin poučak, čini se pouzdano da je neki pitagorejca prvi koji je taj teorem dokazao (kako smo vidjeli, teorem je bio poznat još Babiloncima, ali ne i dokaz). Ne znamo točno kakav je bio pitagorejski dokaz tog poučka, ali budući da se većina sadržaja I. knjige EE pripisuje pitagorejcima, razumno je pretpostaviti da je tamo zapisan dokaz zapravo pitagorejski:

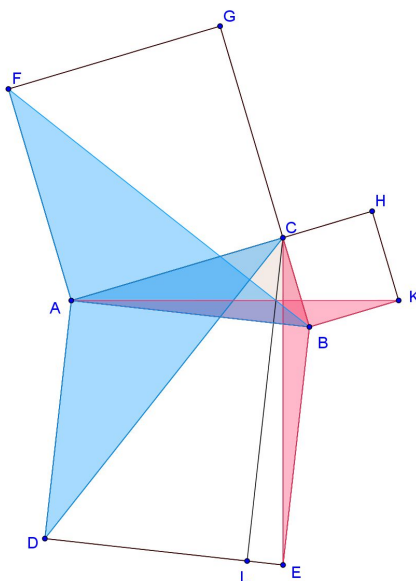
Teorem 5 (EEI47, EEI48) *Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.*

³U VII. knjizi EE 11. i 13. definicija kažu: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. Složen broj je onaj koji se može izmjeriti brojem.

⁴Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek Euler u 18. st.

⁵Tj. svaki sljedeći član je dvostruko veći od prethodnog.

⁶Pitagorejska trojka u kojoj su brojevi relativno prosti.



Slika 4.1: Ilustracija uz Euklidov dokaz nužnosti u Pitagorinom poučku (slika izrađena programom Geogebra).

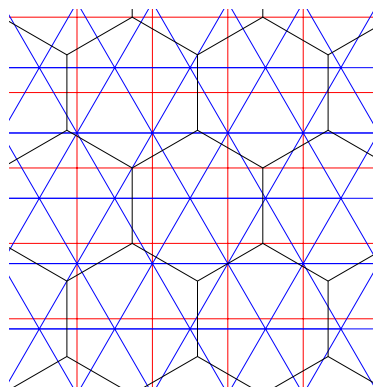
Dokaz nužnosti. Neka je dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C (slika 4.1). Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati $ACGF$, $BCHK$ i $ABED$. Nadalje, ucrтана je i visina CL na hipotenuzu, od vrha C do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika. Dokazujemo da je jedan od njih jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom. Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Dokažimo recimo da je lijevi pravokutnik $ADLT$ jednak kvadratu $ACGF$: Ucrtajmo trokute ADC i ABF . Ta dva trokuta imaju jednu zajedničku stranicu (AB), zatim još jednu stranicu jednake duljine ($|AF| = |AC|$ jer je $ACGF$ kvadrat), a i kut među tim dvjema stranicama je jednak ($\angle FAB$ je pravi kut uvećan za kut $\angle CAB$, a takav je i $\angle CAD$). Po SKS-teoremu⁷ ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i sukladna. Budući da trokut $\triangle ACD$ ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik $ADLT$ (stranica AD je zajednička, a visina je DL) slijedi da je taj trokut jednak pola pravokutnika.⁸ S druge strane trokut $\triangle AFB$ ima s kvadratom $ACGF$ zajedničku stranicu AF i visinu AC , dakle je taj trokut jednak pol tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki, slijedi da je kvadrat $ACGF$ jednak pravokutniku $ADLT$, što je i trebalo dokazati. 🦆

Iz ovog se dokaza vidi i osnovni princip tzv. **geometrijske algebre** starih Grka, a to je da su identitete koje danas interpretiramo algebarski antički Grci shvaćali i dokazivali čisto geometrijski, kao jednakost duljina, površina ili volumena. Kad se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao npr. ovdje o jednakosti jednog kvadrata s druga dva, misli se na jednakost mjere (ovdje površine), a ne na sukladnost.

Kao što je rečeno, pitagorejcima se pripisuje veći dio sadržaja I. knjige EE, što uključuje razne propozicije iz elementarne planimetrije kao što su konstrukcija paralele i okomice na

⁷Ako je ovaj dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi EE kao EEI4, to je vrlo vjerojatno.

⁸I ovo se nalazi dokazano u EEI, propozicija 41: Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.



Slika 4.2: Tri pravilna popločenja ravnine.

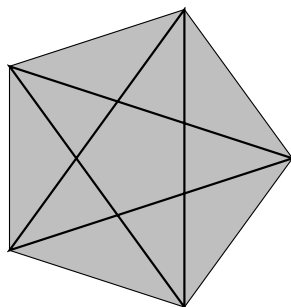
pravac, bisekcija kuta i dužine, teoremi o sukladnosti trokuta, ... Posebno, pitagorejci su znali da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 2 prava kuta, a vjerojatno su dokazali i generalizaciju: Zbroj kutova u svakom četverokutu je četiri prava kuta, u svakom peterokutu je šest pravih kutova i t. d., tj. suvremenim stilom iskazano: Zbroj kutova u svakom n -terokutu je $2n - 4$ prava kuta. Poznat je pitagorejski interes za pravilne mnogokute i pravilne poliedre. Prilično je sigurno da su poznavali svih pet pravilnih poliedara, s tim da se poznavanje prvih četiriju (kocka, pravilni tetraedar, pravilni oktaedar i pravilni ikozaedar) pripisuje već Pitagori, dok se otkriće pravilnog dodekaedra pripisuje Hipasusu iz Metaponta [1]. Pripisuje im se i poznavanje dokaza sljedećeg teorema [1]:

Teorem 6 *Postoje samo tri pravilna popločenja⁹ ravnine: popločenje jednakostraničnim trokutima, popločenje kvadratima i popločenje pravilnim šesterokutima (slika 4.2).*

Najstariji sačuvan dokaz gornjeg teorema potječe od Keplera (1619.) [7]: Zbroj kutova u svakom n -terokutu je $2n - 4$ prava kuta, pa je u pravilnom n -terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva. U svakom vrhu pravilnog popločenja sastaje se isti broj m pravilnih n -terokuta, dakle je $m\alpha$ jednak četiri prava kuta. Slijedi $m = 4 \frac{n}{2n-4} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Pritom su m i n prirodni brojevi veći od 1. Ako je $n = 3$ dobije se $m = 6$ (popločavanje jednakostraničnim trokutima), ako je $n = 4$ dobije se $m = 4$ (popločavanje kvadratima), ako je $n = 5$ m nije cijeli, ako je $n = 6$ dobije se $m = 3$ (popločavanje pravilnim šesterokutima). Za $n > 6$ je $\frac{4}{n-2} < 1$, dakle ne može biti cijeli broj. 🐥

Široj matematičkoj i općenito obrazovanoj populaciji je uz Pitagorin poučak vjerojatno najpoznatiji pitagorejski rezultat kojeg danas iskazujemo ovako: $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. No, kako smo rekli, za pitagorejce samo prirodni brojevi su brojevi. Razlomci za stare Grke nisu brojevima, nego omjeri dvaju brojeva. Stoga nipošto brojevi koje danas zovemo iracionalnima za njih nisu bili brojevi. Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da im je osnovno uvjerenje bilo da su svake dvije *istovrsne* veličine (dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena, ...) **sumjerljive**. Pritom, dvije veličine su sumjerljive ako postoji veličina (zajednička mjera, iste vrste kao polazne dvije veličine) kojom se mogu obje izmjeriti. Dakle, pitagorejska pretpostavka (uvjerenje) o sumjerljivosti znači da su

⁹Popločenje ravnine je prekrivanje ravnine bez rupa i preklapanja kopijama jednog ili više likova ('pločica'). Popločenje je pravilno ako su sve pločice sukladni pravilni mnogokuti koji imaju zajedničke vrhove i ako se u svakom vrhu sastaje isti broj pločica.



Slika 4.3: Pravilni pentagram

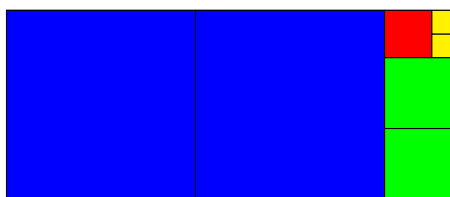
svake dvije istovrsne veličine višekratnici jedne te iste zajedničke mjere („mogu se njome izmjeriti”). Možemo to i ovako iskazati: Postoji jedinica duljine (površine, volumena, vremena, ...) takva da svaka duljina (površina, volumen, vremenski interval, ...) kao mjeru ima racionalan broj.

Neki pitagorejci, navodno Hipasus iz Metaponta, je oko 450. g. pr. Kr. dokazao da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici. To je naravno ekvivalentno činjenici da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, ali je konceptualno bitno drugačije. Također, iz već navedenih razloga takav dokaz je zasigurno bio čisto geometrijski, a ne kao današnji algebarsko-simbolički [5, 23, 40]. Druge teorije sugeriraju da je prvi dokaz egzistencije nesumjerljivih veličina bio nesumjerljivost stranice i dijagonale pravilnog peterokuta jer je pravilni pentagram (slika 4.4) bio simbol pitagorejske škole [15]. Omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta danas je poznat pod nazivom **omjer zlatnog reza**.¹⁰ Pitagorejci su uočili da je taj omjer moguće definirati kao omjer dviju duljina u kojem se dulja prema kraćoj odnosi kao kraća prema njihovoj razlici.

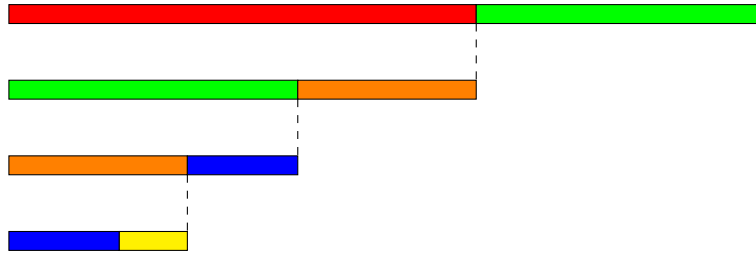
Bilo da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za kvadrat bilo za pravilni peterokut, gotovo sigurno ono je proizašlo iz otkrića **Euklidovog algoritma** [15]. Najkasnije od egipatskog i sumerskog doba bilo je lako usporediti dvije istovrsne veličine (broja, mase, duljine, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge. Primjerice, na sljedećoj slici ilustrirano je kako utvrđujemo da je dulja dužina 5 puta dulja od kraće:



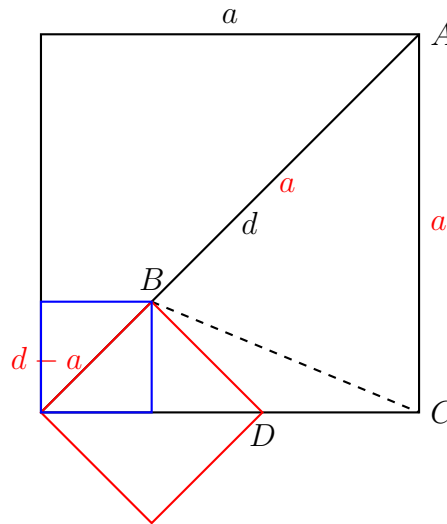
Pitagorejci (a možda već i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”. Naime, ako veća veličina nije višekratnik prve (veću ne možemo izmjeriti manjom), onda ostatkom mjerimo manju. Ako opet ostane ostatak, onda prvi ostatak mjerimo drugim i t.d., sve dok u nekom trenu ne nađemo zajedničku mjeru dvaju zadnjih ostataka, koja je onda (najveća) zajednička mjera polaznih dviju veličina. Tako je na sljedećoj slici mali žuti kvadratić najveća zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je najveća zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.



¹⁰Naziv 'omjer zlatnog reza' uveo je tek 1835. godine njemački matematičar Martin Ohm, brat znamenitijeg fizičara Georga Ohma.



Slika 4.4: Nesumjerljivost dijagonale i stranice pravilnog peterokuta.



Slika 4.5: Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata.

Temeljna pitagorejska pretpostavka o sumjerljivosti svake dvije istovrsne veličine povlači da za svake dvije istovrsne veličine postupak Euklidovog algoritma staje u konačno mnogo koraka (EEX2). Ako uzmemo dvije dužine (crvenu i zelenu) čije duljine su u omjeru zlatnog reza, imat ćemo niz koraka sa slike 4.4 u Euklidovom algoritmu:¹¹ Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti, postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine.

Primijenimo isti način razmišljanja na dokaz nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata. Pogledajmo sliku 4.5. Dan je kvadrat (duljinu stranice označili smo s a , a dijagonale s d). Ucrtamo manji kvadrat (crveno) tako da mu stranica leži na dijagonali i da mu je stranica duljine $d - a$. Trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan, iz čega (zbog jednakosti kutova s okomitim kracima) slijedi da je i $\triangle DBC$ jednakokračan, tj. $|CD| = d - a$. Stoga je dijagonala crvenog kvadrata duljine $a - (d - a) = 2a - d$. Sad bismo mogli na isti način u crveni kvadrat ucrtati kvadrat kojemu je stranica duljine njegove dijagonale minus njegove stranice, i tako u beskonačnost. Pritom je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Kad bi a i d bile sumjerljive, sa zajedničkom mjerom m , onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m), što je nemoguće. Zaključujemo da dijagonala i stranica kvadrata ne mogu biti sumjerljive.

¹¹Ovo se obično ilustrira tzv. Pitagorinom lutnjom.



Jonsko razdoblje grčke matematike ...

... doba je kad se matematika počela razvijati kao znanost u kojoj se tvrdnje logički dokazuju. Za brojke se koristio antički brojevni sustav. Prema tradiciji, ali nepouzdan, prvi je matematičke (geometrijske) tvrdnje dokazivao Tales iz Mileta u prvoj polovici 6. st. pr. Kr. Prvi koji su sa sigurnošću dokazivali matematičke tvrdnje bili su pitagorejci, pripadnici škole koju je osnovao Pitagora sa Samosa oko 520. g. pr. Kr. Od pitagorejaca nadalje u starogrčkoj matematici pod brojevima se podrazumijevaju isključivo prirodni brojevi. Osim aritmetikom (koja je u pitagorejskom obliku začetak teorije brojeva) pitagorejci su se bavili i geometrijom. Iako su pretpostavljali da su svake dvije istovrsne geometrijske veličine sumjerljive, tj. da im se omjer može izraziti kao omjer prirodnih brojeva, otkrili su da to nije tako (dokazavši, vjerojatno geometrijskom varijantom Euklidovog algoritma, da dijagonale pravilnih četverokuta odnosno peterokuta nisu sumjerljive njihovim stranicama). No, ne možemo reći da su pitagorejci otkrili iracionalne brojeve jer ih oni nikad ne bi prihvatili kao brojeve.

4.2 Atensko razdoblje grčke matematike



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

brojka * infinitezimalni račun * limes * niz * konstrukcije ravnalom i šestarom * jednačba * dedukcija * kvadratni i kubni korijeni * omjeri i razmjeri * sinus i kosinus * površina i volumen * krivulja * pravilni poliedri * konike

U prvoj polovici 5. st. pr. Kr. kao centar grčke filozofske i znanstvene djelatnosti pomalo se počinje isticati Atena. Dok se u općoj povijesti ovo razdoblje naziva klasičnim periodom grčke povijesti, u povijesti matematike poznato je i kao atensko razdoblje. Vrhunac (u znanstvenom smislu) atenskog razdoblja predstavlja Platonovo osnivanje Akademije (ca. 387. pr. Kr.). Atensko razdoblje potrajalo je do doba osvajanja Aleksandra Makedonskog, dakle do potkraj 4. st. pr. Kr. U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti je poprimila formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te matematičke logike.

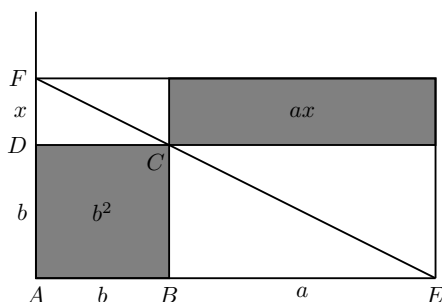
Tijekom atenskog razdoblja atičke brojke postepeno su zamijenjene **alfabetskim (miletskim) brojkama**. Princip tog sustava sličan je brojevnim sustavima koje su koristili Feničani, a kasnije Židovi, Arapi, Hrvati (glagoljske brojke), . . . : Slovima alfabeta, u ovom slučaju grčkog, pridružene su brojevne vrijednosti. Grčki alfabetski sustav je dekadski brojevni sustav sa znamenkama koje odgovaraju brojevima jedan do devet pomnoženim s jedan, deset i sto. Za to je potrebno 27 znamenki, a grčki alfabet ima 24 slova pa su dodatno korištena tri arhaična slova: feničko slovo vau (digama) za 6, kopa za 90 i san (sampi) s vrijednošću 900. Dalje je alfabetski sustav znamenkasto aditivan. Korištenjem crtice (tzv. *hasta*) ispred znamenki za jedinice dobivaju se tisućice, a za desettisućice¹² su se istih tih devet znamenki pisale povrh slova M (veliko μ , od mirijada, tj. deset tisuća). Do kraja atenskog razdoblja znamenke ovog sustava poprimile su formu prikazanu slikom 4.6. Da bi se tekst razlikovao od brojki, alfabetske brojke obično su završavale apostrofom ili bivale natcrtane. Primjerice, $\overline{\rho\iota\alpha}$ ili $\rho\iota\alpha'$ je naš 111 [23, 33, 11].

Začetke **infinitezimalnog računa** susrećemo kod dvaju filozofa atenskog razdoblja. **Zenonu iz Eleje** (ca. 490.–430. pr. Kr.) Aristotel pripisuje četiri paradoksa (dihotomiju, paradoks o Ahilu i kornjači, strijela i stadion) kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena Zenon dobiva prividno paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja. Iako sva četiri paradoksa otvaraju pitanje prirode kontinuuma, za povijest matematike su od strijele i stadiona značajnije dihotomija i paradoks o Ahilu i kornjači. *Dihotomija* argumentira nemogućnost kretanja time što se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Prema Zenonu, ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja. Sličan je paradoks o *Ahilu i kornjači*: Ahil je puno brži od kornjače, ali dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla, dok Ahil dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t. d. Dakle, prema Zenonu, Ahil neće nikad stići kornjaču. Danas naravno oba paradoksa lako razriješimo koristeći konvergentne redove (u prvom slučaju geometrijski s kvocijentom $\frac{1}{2}$, a u drugom općeniti konvergentni red s pozitivnim članovima) [6]. S druge strane, filozof **Demokrit iz Abdere** (ca. 460.–370. pr. Kr.), poznat po ideji nedjeljivih čestica „atoma“ kao osnovnih jedinica materije, za povijest matematike je zanimljiv po ideji podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi u svrhu određivanja njegova volumena. Tako je došao do dileme: Ako gledamo jedan takav disk, jesu li njegove osnovice jednake ili ne? Ako jesu, stožac je

¹²Vjerojatno tek početkom sljedećeg, helenističkog razdoblja.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A' α'	B' β'	Γ' γ'	Δ' δ'	E' ϵ'	Φ' φ'	Z' ζ'	H' η'	Θ' θ'
10	I' ι'	K' κ'	Λ' λ'	M' μ'	N' ν'	Ξ' ξ'	O' $\omicron'$	Π' π'	Ψ' ρ'
10^2	P' ρ'	Σ' σ'	T' τ'	Υ' υ'	Φ' φ'	X' χ'	Ψ' ψ'	Ω' ω'	Λ' λ'
10^3	A α	B β	Γ γ	Δ δ	E ϵ	Φ φ	Z ζ	H η	Θ θ
10^4	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$

Slika 4.6: Znamenke klasičnog grčkog alfabetskog brojevnog sustava.



Slika 4.7: Primjer geometrijske algebre (primjer 15).

valjak, ako nisu, stožac je grbav. Naravno, ni tu dileme, znamo danas, nema, ali očigledno ovo njegovo razmatranje možemo smatrati prethodnikom ideje **integrala** [5].

Kao što smo već rekli, **geometrijska algebra** opisuje starogrčke geometrijske rezultate koje danas opisujemo algebarski.¹³ Tu, primjerice, kvadrat nije broj odnosno potencija broja, nego geometrijski lik poistovjećen sa svojom mjerom (površinom). Dva objekta su jednaka ako su jednaki po mjeri (iznosu, duljini, površini odnosno volumenu). Dakle, vrlo bitno je istaknuti: Nisu antički Grci jednadžbe rješavali geometrijski (niti je u njih bilo ideje jednadžbe), nego mi danas mnoge njihove rezultate interpretiramo i dokazujemo algebarski. Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki matematičari su dodatno počeli zahtijevati da se **geometrijske konstrukcije** kojima se dokazuju tvrdnje smiju provoditi isključivo (neoznačenim) ravnalom i šestarom. Stoga se za jednakost (brojeva, duljina, površina, odnosno volumena) tražilo i više od puke jednakosti mjere: Jednakost se mora moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Kao razlog tog ograničenja mnogi autori navode da su se kao jedine dvije krivulje prisutne u stvarnome svijetu smatrali pravci i kružnice, koje su smatrane „savršenim” krivuljama jer „svaka dva njihova dijela“ izgledaju podjednako [?].

¹³Naziv potječe iz 19. st.

Primjer 15 Zadan je kvadrat $ABCD$ i potrebno je na starogrčki način konstruirati njemu jednak pravokutnik kojemu je zadana jedna stranica. Zadana stranica se postavi kao nastavak $\overline{BE}$ stranice $\overline{AB}$ kao na slici 4.7. Zatim se konstruiraju pravci AD i EC te odredi njihovo sjecište F . Naposljetku se EAF dopuni do pravokutnika (konstruirajući paralele) i produlje dužine $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ do rubova tog pravokutnika. Budući da je $\overline{EF}$ dijagonala tog pravokutnika, ona ga raspolavlja. Također, vidljiva su dva para sukladnih trokuta. Stoga su sive površine jednake, tj. pravokutnik je jednak (po površini) kvadratu. Uočimo li da su svi koraci izvedivi ravnalom i šestarom, zaključujemo da je zadatak korektno riješen. Pritom se stvarno radi o primjeru geometrijske algebre, jer bi opisanu konstrukciju danas bilo prirodnije gledati kao ilustraciju rješavanja linearne jednadžbe $ax = b^2$.

U prethodnom primjeru ste se možda zapitali zašto smo na kraju linearnu jednadžbu zapisali kao $ax = b^2$, a ne kao $ax = b$. Razlog je u **principu homogenosti**, koji je ne samo u duhu antičkih shvaćanja, nego je sve do modernog doba zadržan u pristupima jednadžbama, a i danas je bitan u primjenama: Izjednačavati (te zbrajati i oduzimati) se mogu samo istovrsne veličine (ovdje su to površine kvadratqa i pravokutnika).

Vjerojatno najpoznatija matematička tema koja potječe iz atenskog razdoblja antičke grčke matematike su **tri klasična problema**. Zašto su ta tri problema toliko važna? Danas znamo da oni nisu rješivi (naravno, poštujući uvjet konstrukcije rješenja ravnalom i šestarom), ali su pokušaji rješenja tih problema, posebno u antičko grčko doba, doveli do mnogih novih matematičkih otkrića. Ta su se tri problema vjerojatno pojavila pokušajem generalizacije konstrukcija bisekcije kuta, podjele dužine na proizvoljan broj jednakih dijelova i udvostručenja kvadrata koje su bile dobro poznate matematičarima potkraj jonskog i početkom atenskog razdoblja. Tri klasična problema su:

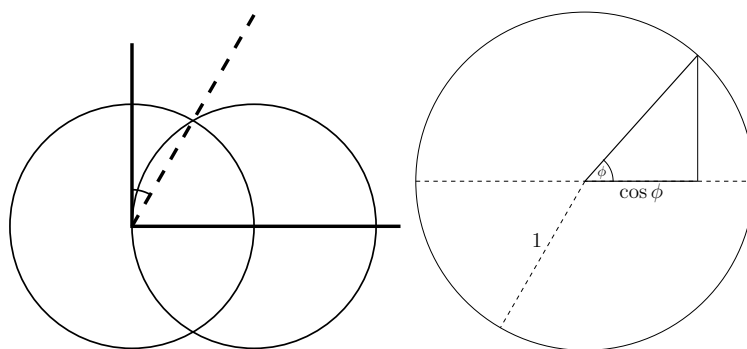
1. **Problem udvostručenja (duplikacije) kocke:** Za danu kocku treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.
2. **Problem trisekcije kuta:** Dani kut treba ravnalom i šestarom podijeliti na trećine.
3. **Problem kvadrature kruga:** Ravnalom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke danas formuliramo ovako: Za zadani $a > 0$ zadatak je ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

O njegovoj prvoj pojavi govore dvije poznate legende. Jednu, po kojoj je ovaj problem poznat i kao delijski problem, navodi Teon iz Smirne (ca. 70.–130.) citirajući Eratostena, a to je da su građani Delosa u doba jedne epidemije potražili savjet proročišta u Delfima kako da se riješe jedne epidemije te im je rečeno da konstruiraju dvostruko veći oltar od postojećeg kockastog oltara posvećenog bogu Apolonu. Drugu pak navodi Eutokije Askalonski (ca. 480.–540.) u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*, a to je da je kretske kralj Minos htio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa [23, 40].

Za razliku od toga, o problemu trisekcije kuta nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o njegovom nastanku. Bio je manje popularan od druga dva klasična problema, vjerojatno zato što je za neke kutove rješiv ravnalom i šestarom. Kako se on uklapa u našu definiciju geometrijske algebre? Uočimo prvo da ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove, jer se pravi kut može trisektirati ravnalom i šestarom koristeći konstrukciju



Slika 4.8: Pravi kut se može trisektirati ravnalom i šestarom, a konstrukcija kuta ekvivalentna je konstrukciji njegova kosinusa.

jednakostraničnog trokuta (slika 4.8 lijevo). Nadalje, šiljasti kut ϕ (primjerice, trećina zadanog kuta α) može se konstruirati ako i samo ako se može konstruirati $\cos \phi$ (slika 4.8 desno).¹⁴ To se lako vidi iz definicije sinusa i kosinusa u jediničnoj kružnici. Ako je zadan α , iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3 \phi - 3\cos \phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos \phi$ vidimo da je problem trisekcije kuta ekvivalentan konstrukciji rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos \alpha.$$

Zadatak 6 *Koja jednadžba odgovara trisekciji kuta od 60° ?*

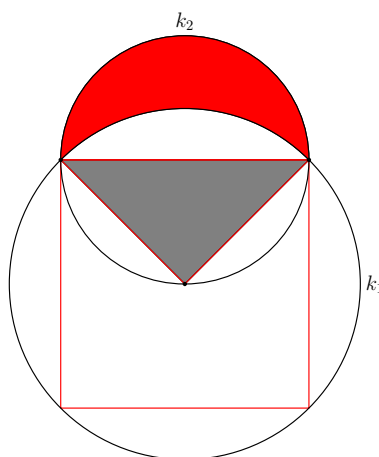
Naposlijetku, problem kvadrature kruga danas interpretiramo ovako: Za zadani $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^2 = r^2 \pi.$$

Za ovaj problem postoji konkretno ime uz koje se veže njegova prva pojava. Bio je to navodno **Anaksagora iz Klazomena** (ca. 499.–428. pr. Kr.), Periklov prijatelj koji je završio u zatvoru zbog tvrdnje da Sunce nije bog te se navodno u zatvoru počeo baviti ovim problemom. Prvi važniji pokušaj rješavanja ovog problema pripisuje se sofistu **Antifontu** (ca. 480.–411. pr. Kr.). On je navodno predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica. Smatrao je da će se ostatak do površine kruga iscrpsti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica. Naravno, tu je počinio matematičku grešku, koju danas izražavamo ovako: Ako se svaki član nekog niza može konstruirati ravnalom i šestarom, to ne znači da se i limes tog niza može konstruirati. U svakom slučaju ovaj problem je brzo postao iznimno popularan, na što primjerice ukazuje činjenica da ga Aristofan spominje u komediji *Ptice* (414. pr. Kr.) [5, 23, 40].

Zadatak 7 *Nadite primjer konvergentnog niza takvog da se svaki njegov član može konstruirati ravnalom i šestarom, ali da se njegov limes ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Pritom iskoristite činjenicu da se broj može konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako se može izračunati iz cijelih brojeva koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena.*

¹⁴Alternativno $\sin \phi$. Opaziti: U ovo doba još nije postojala trigonometrija, tako da je ovo moderna analiza problema, a ne starogrčki pristup.



Slika 4.9: Prvi Hipokratov mjesec.

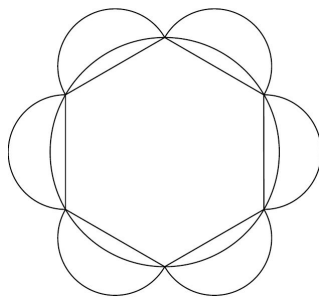
Sa sva tri klasična problema se bavio prvi značajni matematičar atenskog razdoblja bio je **Hipokrat s Hiosa** (ca. 470.–410. pr. Kr.). On je navodno bio trgovac brodovima iz Jonije, ali je izgubio imovinu (jedni navode gusare, drugi nepoštene carinike) te je dvadesetak godina, otprilike 450.–430. pr. Kr., proveo u Ateni čekajući odštetu. Za to je vrijeme učio filozofiju i matematiku, te je postao najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.¹⁵ Napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije*, koje je vjerojatno bilo osnova za prve četiri knjige EE. Znao je, a možda i dokazao, da se površine krugova odnose se kao kvadrati nad njihovim polumjerima¹⁶ Hipokratu se pripisuje i uvođenje slova kao oznaka u geometrijskim dijagramima [5, 23, 40].

Hipokrat je prva osoba koja je točno odredila kvadraturu (koristimo ovaj izraz jer se ne radi o računanju površine, nego o tome ekvivalentnoj geometrijskoj konstrukciji) nekog lika obrubljenog krivuljama. Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga Hipokrat je naime otkrio da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju **Hipokratovi mjeseci**. Geometrijski gledano, mjesec je lik omeđen lukovima dviju ekscentričnih kružnica različitih polumjera, a ako se mjesec može kvadrirati ravnalom i šestarom, nazivamo ga Hipokratovim. Sam Hipokrat je otkrio, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca, a danas je poznato da ih ima pet.¹⁷ Mi ćemo ovdje opisati samo prvi tip, a za preostale i dokaz da ih ima točno pet upućujemo na ovaj [link](#). Prvi Hipokratov mjesec je mjesec omeđen kružnicom k_1 kojoj je polumjer kateta pravokutnog jednakokračnog trokuta, a središte u vrhu s pravim kutom, te kružnicom k_2 čiji promjer je hipotenuza tog trokuta, tj. kružnicom opisanom tom trokutu (slika 4.9). Kvadrat nad hipotenuzom (promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad katetom trokuta (polumjerom od k_1). Budući da je polumjer pola promjera, to znači da je kvadrat nad hipotenuzom pola kvadrata nad promjerom kruga omeđenog s k_1 . Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, što je, kako smo rekli, Hipokrat znao, slijedi da se površina kruga nad hipotenuzom prema površini kruga omeđenog s k_1 isto odnosi kao 1 : 2, pa se tako odnose i odgovarajući polukrugovi. Stoga polukrug nad hipotenuzom ima jednaku

¹⁵Ne valja ga miješati sa suvremenikom i imenjacom, liječnikom Hipokratom s Kosa.

¹⁶Najstariji sačuvani dokaz nalazimo u EE.

¹⁷Preostala dva su otkrivena u 18. st. (M. J. Wallenius), a u 20. st. je dokazano da nema drugih (N. G. Čebotarev, A. V. Dorodnov).



Slika 4.10: Veza mjesecâ i kvadrature kruga.

površinu kao isječak koji je četvrtina kruga omeđenog s k_1 . Površina mjeseca (crveno na slici 4.9) je očito zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjena za spomenuti isječak u krugu omeđenom s k_1 , pa slijedi da prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen. Budući da se trokut (kao i svaki drugi uglati lik, što ćemo kasnije i pokazati) može kvadrirati ravnalom i šestarom, opisani mjesec je stvarno Hipokratov mjesec.

Prema više izvora, Hipokrat je bio svijestan da svojim otkrićem mjeseca koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom nije riješio problem kvadrature kruga. No, neki navode sljedeće krivo zaključivanje kao, možda, njegovo. Pogledajmo pravilni šesterokut s opisanom kružnicom i ucrtanim polukružnicama nad svim njegovim stranicama (slika 4.10). Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta (tj. promjeri malih polukružnica), pa se površine malih i velikih krugova se odnose 4 : 1. Stoga vrijedi sljedeći „geometrijski račun”: Prvo uočimo da je

$$\text{mjesec} = \text{šesterokut} + 6 \cdot \text{polukružnica} = \text{krug} + 6 \cdot \text{polukružnica}.$$

Stoga je

$$4 \cdot \text{krug} = \text{krug} = \text{šesterokut} + 6 \cdot \text{polukružnica} - 6 \cdot \text{polukružnica} = \text{šesterokut} + 3 \cdot \text{krug} - 6 \cdot \text{polukružnica},$$

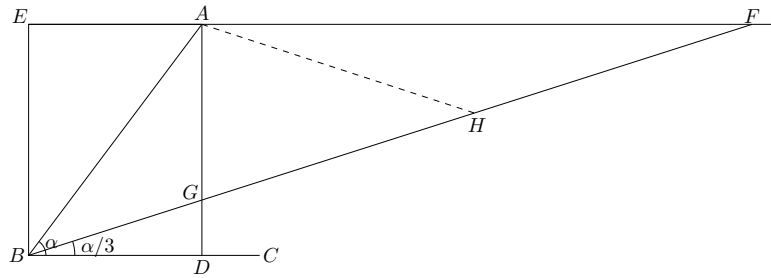
pa je

$$\text{krug} = \text{šesterokut} - 6 \cdot \text{polukružnica}.$$

Dakle, kad bi se mjeseci sa slike 4.10 mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug.

Zadatak 8 Osmislite još jedan primjer mjeseca koji nije Hipokratov.

Vezano za trisekciju kuta, Hipokrat je otkrio sljedeću u praksi lako provedivu „mehaničku” trisekciju kuta. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ kojeg treba podijeliti na trećine (slika 4.11). Prvo konstruiramo okomicu iz A na krak BC , neka joj je nožište D . Zatim ADB dopunimo do pravokutnika $ADBE$ i produljimo dužinu $\overline{EA}$ na strani od A . Sljedeći korak nije provediv ravnalom i šestarom, ali u praksi jest izvediv: Na tom produljenju AE nađemo točku F takva da je $|FG| = 2|AB|$, gdje je $G = BF \cap AD$. U tom slučaju je $\angle FBC = \frac{\alpha}{3}$.



Slika 4.11: Hipokratova trisekcija kuta.

Naime, po konstrukciji je $|AB| = |HF| = |HG|$, dakle je $\triangle AFH$ jednakokračan (AH je težišnička u pravokutnom trokutu $\triangle GAF$ pa ga dijeli na dva jednakokračna trokuta) i posljedično $\triangle ABH$ jednakokračni trokut. Stoga je $\angle FAH = \angle AFH = \phi$ te je kao vanjski kut trokuta $\triangle AFH$ kut $\angle AHB = 2\phi$, ali je i $\angle ABF = \angle AHB = 2\phi$. Naposljetku, uočimo da je AB transversala (presječnica) paralelnih pravaca EA i BC . Stoga je $\angle FBC = \angle AFB = \phi$. Dakle, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 2\phi + \phi = 3\phi$, dakle je ϕ rješenje problema.

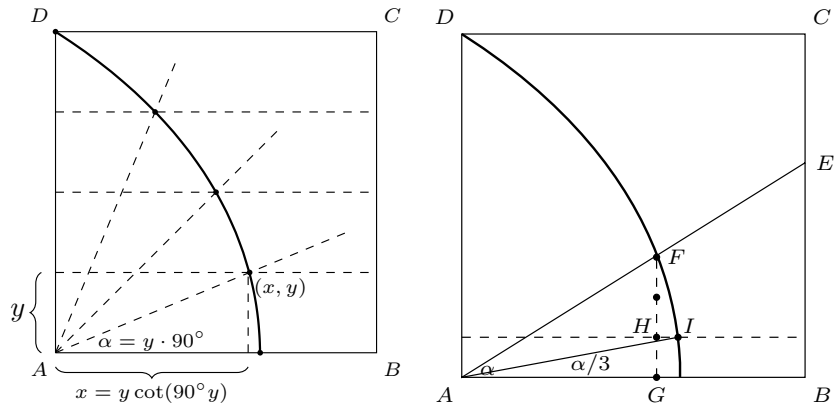
Hipokratov doprinos problemu udvostručenja kocke možda se čini najjednostavnijim od njegovih doprinosa trima klasičnim problemima, no pokazao se najvažnijim. Prvo definirajmo: **Srednje geometrijske proporcionalne** između *istovrsnih* veličina a i b su njima istovrsne veličine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hipokrat je uočio da se kocka brida a može udvostručiti točno ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionalne između a i $2a$. Mi to danas lako algebarski potvrđujemo: Iz $a : x = x : y = y : (2a)$ slijedi $2ax = y^2$ i $ay = x^2$ pa je $x^3 = 2a^3$. Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$.

Istaknimo još trojicu grčkih matematičara iz 5. st. pr. Kr. Prvi od njih zapravo nije bio matematičar, nego državnik i filozof sofist **Hipija iz Elide** (ca. 460.–400. pr. Kr.). Za život je zarađivao putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga je kasnije opisao kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Jedini bitni matematički doprinos mu je otkriće krivulje **kvadratis** (**trisektrise**), koja se može iskoristiti i za kvadraturu kruga i trisekciju kuta (zapravo, za podjelu kuta na bilo koji broj jednakih dijelova), ali se sama ne može konstruirati ravnom i šestarom. Prema Papusu Aleksandrijskom, Hipijina kvadratis nastaje dinamički. Polazište je kvadrat $\square ABCD$ (slika 4.12 lijevo). Zamislimo da u stranica $\overline{DC}$ pada jednoliko (stalnom brzinom) na stranicu $\overline{AB}$. U istom trenutku kad stranica $\overline{DC}$ počne padati, stranica $\overline{AD}$ počinje jednoliko rotirati oko A do pozicije $\overline{AB}$, u koju stiže u istom trenutku kad i $\overline{DC}$. U tom slučaju se u svakom trenutku pozicije stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$ sijeku u po jednoj točki (na slici 4.12 lijevo istaknute su pozicije nakon četvrtine, polovine i tri četvrtine ukupnog vremena gibanja stranica). Dobivene točke čine krivulju kvadratisu (trisektrisu).¹⁸

¹⁸Ako bismo ju gledali iz moderne perspektive, kao smještenu u Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u točki A i koordinatnim osima na pravcima AB i AD , onda se dio krivulje u prvom kvadrantu sastoji od točaka $(x, y) = (y \operatorname{ctg}(90^\circ y), y)$.



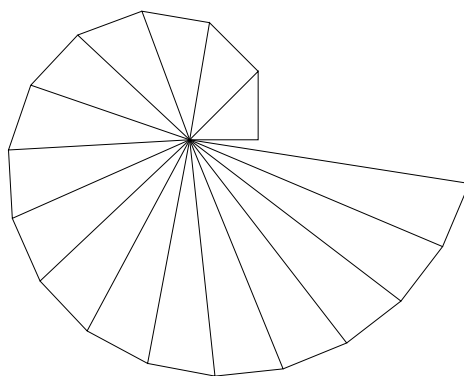
Slika 4.12: Hipijina kvadratisa (trisektrisa).

Opišimo kako iskoristiti kvadratisu, tj. trisektrisu, za trisekciju kuta. Neka je zadan kut α , kojeg unesemo u kvadrat kao $\angle BAE$ (slika 4.12 desno). Neka je F presjek kvadratisa i kraka AE (tu točku ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Iz F povučemo okomicu na AB , njeno nožište neka je G . Dužinu $\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela, neka je $|FH| : |HG| = 2 : 1$. Kroz točku H povučemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom (ni točku I ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Onda je $\angle IAB = \frac{\alpha}{3}$, što slijedi direktno iz definicije kvadratisa (u istom vremenu padajuća stranica prijeđe trećinu puta kao rotirajuća trećinu kuta).

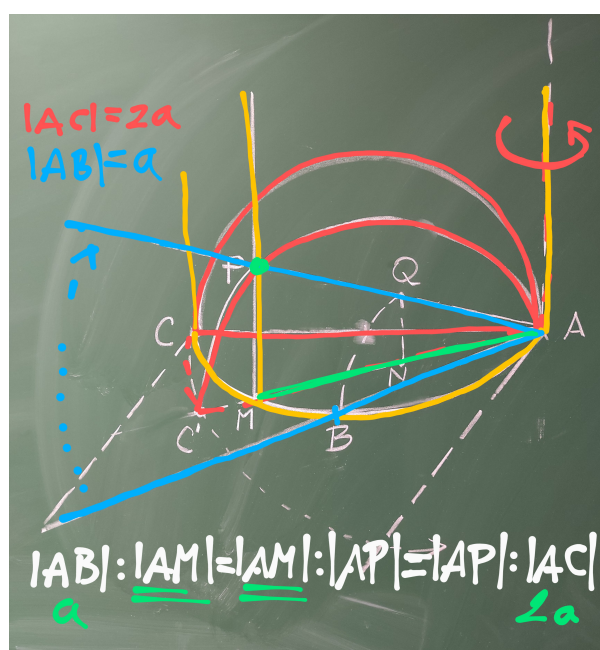
Hipijin suvremenik bio je **Teodor iz Kirene** (ca. 465.–398. pr. Kr.). Poznat je po tome što je bio učitelj Platona i Teeteta. Iz Platonovog dijaloga *Teetet* saznajemo da je Teodor dokazao o „*stranicama kvadrata od tri kvadratne jedinice i od pet kvadratnih jedinica, da one nisu izmjerive jediničnom duljinom. Tako je prošao sve kvadratne korijene pojedinačno do kvadrata od sedamnaest kvadratnih jedinica, na kojem je stao.*” Vidimo dakle da iz moderne perspektive Platon Teodoru pripisuje dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$. Uočljivo je da ne spominje kvadrat površine dvije kvadratne jedinice — očigledno je nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata u to doba već bila opće poznata.¹⁹ Razlog zašto je stao na kvadratu sa 17 kvadratnih jedinica nije poznat, ali jedna od popularnijih teorija je da je u pozadini **Teodorova spirala**. Ona nastaje tako da krenemo jednakokračnog pravokutnog trokuta koji je pola jediničnog kvadrata (dakle, hipotenuza mu je duljine $\sqrt{2}$). Sad se iterativno konstruiraju pravokutni trokuti tako da hipotenuza prethodnog postaje dulja kateta sljedećeg, a kraća kateta im je svima 1 (dakle, hipotenuze su redom duljina $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...), kao na slici 4.13. Pravokutni trokut hipotenuze duljine $\sqrt{17}$ je u takvoj konstrukciji zadnji koji se još ne preklapa ni s kojim od ranijih.

Spomenuti treba i **Arhitu iz Tarenta** (ca. 428.–350. pr. Kr.). On je bio vođa ostatka pitagorejske škole svog doba, koja je nakon ranijih političkih sukoba smanjena i svedena na zajednicu u gradu Tarentu. Arhita je bio Platonov prijatelj te je utjecao na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu problemu udvostručenja kocke na temelju Hipokratove ideje. Arhita je našao srednje geometrijske proporcionalne između a i $2a$ korištenjem presjeka cilindra, konusa i torusa. Budući da u to doba koordinatni sustavi još nisu postojali

¹⁹Primijetimo da je stranica kvadrata površine dvije kvadratne jedinice isto što i dijagonala kvadrata površine jedne kvadratne jedinice.



Slika 4.13: Teodorova spirala.



Slika 4.14: Arhitina duplikacija kocke.

(uvedeni su tek u 17. st., o tome kasnije), njegova je konstrukcija čisto geometrijska i vrlo impresivna te ćemo ju ukratko opisati.

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dužine između kojih želimo naći srednje geometrijske proporcionalne (dakle, duljine su im a i $2a$, slika 4.14). Arhita zamišlja tri plohe opisane na sljedeći način. Prva je polucilindar promjera $\overline{AC}$ (žuto na slici 4.14). Nad $\overline{AC}$ (u ravnini okomitoj na osnovicu cilindra) konstruira se polukružnica, a njenom rotacijom oko izvodnice cilindra koja prolazi kroz A dobije se druga ploha, polutorus (crveno na slici 4.14). Naposljetku, ako je B odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra (a tako da je $|AB| = \frac{1}{2}|AC|$) i ako je D presjek tangente na tu kružnicu povučene u C s pravcem AB , rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca AC dobije se konus (plavo na slici 4.14).²⁰ Neka je P točka presjeka tih triju ploha. Ona postoji jer polutorus siječe polucilindar duž neke krivulja

²⁰Koristeći suvremenu analitičku geometriju, ako je A ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, x -os je pravac AC i z -os okomita na ravninu polukružnice ABC , jednadžbe tih triju ploha su redom $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$. Rješavanjem tog sustava lako se pokaže



Slika 4.15: Pet Platonovih, zapravo Teetetovih, tijela.

onda negdje probada konus. Točka P se nalazi istovremeno na nekoj rotiranoj poziciji crvene polukružnice koja je generirala polutorus (neka je $\overline{AC'}$ odgovarajući promjer i M ortogonalna projekcija P na ravninu osnovice cilindra) i na nekoj rotiranoj poziciji plave izvodnice čijom rotacijom je nastao konus (neka je Q točka na toj izvodnici u kojoj se našla točka B i N njezina ortogonalna projekcija na ravninu osnovice cilindra). Iz te konstrukcije Arhita dalje razmatranjem geometrijskih odnosa izvodi da je

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|,$$

tj. $|AM|$ je rješenje problema duplikacije kocke brida $|AB|$.

Spomenuli smo Platonov dijalog *Teetet*. On nosi ime po matematičaru **Teetetu Atenskom** (ca. 415.–369. pr. Kr.) koji je, koliko je poznato, bio prvi koji je konstruirao svih pet pravilnih poliedara (slika 4.15). Danas ih nazivamo i **Platonovim tijelima** jer ih je Platon opisao u dijalogu *Timej*, u kojem ih je povezao s četiri „elementa” (kocka — zemlja, oktaedar — zrak, tetraedar — vatra, ikozaedar — voda) i svemirom (dodekaedar).

Platon je bio centralna figura znanosti atenskog razdoblja. Iako nije, koliko znamo, dokazao nikoji bitan matematički rezultat, on je iznimno značajan za povijest matematike. **Platon** (ca. 427.–347. pr. Kr.) je oko 387. pr. Kr. osnovao znamenitu Akademiju, na čijem je ulazu navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Možda ste taj moto čuli s rječju matematika na mjestu geometrije, no tu se radi o moderniziranom smislu: Kao što ste zasigurno već primijetili, starogrčka matematika je u biti geometrija. Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. Platon razlikuje, primjerice, kvadrat (pravi, idejni) i kvadrat (nacrtani, postojeći u realnom svijetu). Platonistički pristup matematici podrazumijeva da matematičke istine postoje neovisno o tome jesmo li ih već otkrili, odnosno platonistički je stav da se matematika ne stvara, nego otkriva. Platon je također (čini se prvi) eksplicitno iskazao da se u geometriji treba koristiti što manje fizičkih pomagala — dozvoljeni su samo šestar i neoznačeno ravnalo.

Stanimo na trenutak u napretku kroz stoljeća i osvrnimo se. Kao što smo vidjeli, prva kultura u kojoj su se matematičke tvrdnje počele dokazivati deduktivno, iz definicija,

da je $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. prva koordinata presjecišta P ploha u standardno postavljenom cilindričkom koordinatnom sustavu, rješenje problema udvostručenja kocke brida a .

aksioma i već dokazanih tvrdnji, bila je antička Grčka. Prvi dokazi možda potječu još od Talesa, a zasigurno najkasnije od pitagorejaca. U taj razvoj uključio se Platon, koji je prvi jasno iskazao zahtjev strogih definicija i dokaza u matematici (geometriji) [5, 23, 40].

Platonov učenik (i učitelj Aleksandra Makedonskog) **Aristotel** (384.–322. pr. Kr.), iako ne posebno zainteresiran za matematiku, kroz temelje opće logike postavio je i temelje matematičke logike. Također, Aristotel je pojmu matematika dao moderno značenje. Osvrnimo se na osnovne za matematiku bitne crte Aristotelove logike. Aristotel je razlikovao dvije vrste logičkog zaključivanja: indukciju i dedukciju. Indukcija je zaključivanje s pojedinačnog na opće i Aristotel je uočio da ona bez dodatnih logičkih uvjeta ne mora dati istinit zaključak. S druge strane, za Aristotela je dedukcija (kod njega pod nazivom silogizam) argument kojim se iz određenih *istinitih* premisa (pretpostavki) logičkom nužnošću dobiva istinit zaključak (konkluziju) različit od premisa. Uočimo da je to različito od modernog pojma dedukcije, u kojem nije nužna istinitost premisa (a ima i drugih razlika). Premise i konkluzija u silogizmu su kategorički sudovi: iskazi koji se sastoje od *kvantora* (svaki, nikoji, neki) i *subjekta* S, koji je s *predikatom* P povezan *kopulom*, te eventualno negacije kopule. Aristotel razlikuje četiri tipa kategoričkih sudova: „Svaki S je P” (univerzalno afirmativni), „Nikoji S nije P” (univerzalno negativni), „Neki S su P” (partikularno afirmativni) i „Neki S nisu P” (partikularno negativni). Primijetio je da kategorički sudovi ne moraju imati jednoznačnu istinitosnu vrijednost, već da to ovisi o konkretnom smislu subjekta i predikata. **Tautologija** je kategorički sud koji je uvijek istinit, npr. „Svaki S je S”, a **kontradikcija** je kategorički sud koji nikad nije istinit, npr. „Nikoji S nije S”. **Silogizam** se sastoji od tri kategorička suda (dvije istinite *premise* i jedne *konkluzije*) uz uvjet u ta tri suda među njihovih šest subjekata i predikata imamo ukupno samo tri pojma, raspoređenih u jednu tri logičke figure silogizma:

1. (A B), (B C), (A C);
2. (A C), (B C), (A B);
3. (A B), (A C), (B C).

Primjer 16 Neka je prva premisa „Nikoja *ptica* nema *četiri noge*.” Druga neka je „Nikoja *patka* nema *četiri noge*.” Ta dva suda su tipa (A C) i (B C) te se silogizmom dobiva korektna konkluzija (A B): „Svaka *patka* je *ptica*.”

Spomenimo još i Aristotelove **zakone klasične logike**:

- Svaki S je S (princip identiteta).
- Svaki sud je istinit ili lažan (princip isključenja trećega).
- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan (princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike [5, 40].

Uz Hipokrata najznačajniji matematičar atenskog razdoblja bio je **Eudoks s Knida** (ca. 408.–355. pr. Kr.). Bio je filozof, matematičar, astronom i liječnik. Matematiku je studirao kod Arhite iz Tarenta. Najznačajniji matematički doprinosi su mu utemeljenje opće teoriju omjera i razmjera i metode ekshaustije (koja se temelji na Antifontovim indejama, ali ju je Eudoks precizirao). Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima”, tj. spadaju i u prethodnike modernog infinitezimalnog računa.

Eudoksova **teorija omjera i razmjera** opisana je u V. knjizi EE (cijeli njen sadržaj se pripisuje Eudoksu). i bila je posebno važna jer je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u geometrijske analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine. Primjerice, drugi korijeni $x = \sqrt{ab}$ se mogu analizirati kroz dvostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : b,$$

a treći korijeni $x = \sqrt[3]{a^2 b}$ kroz trostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : y = y : b.$$

Primjer 17 *Već smo vidjeli da je rješenje problema duplikacije kocke, tj. ono što danas zapisujemo kao $\sqrt[3]{2}$, opisano trostrukim omjerom $1 : x = x : y = y : 2$ kojeg trebaju zadovoljavati srednje geometrijske proporcionalne.*

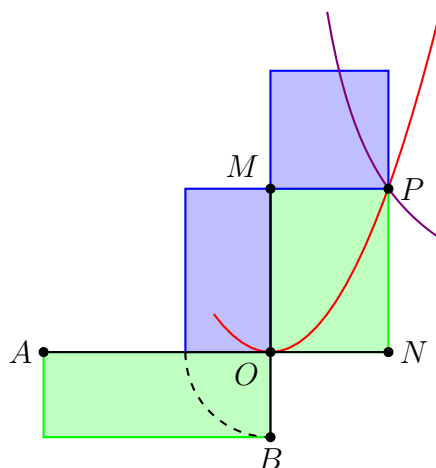
U 3.–6. definiciji u EEV vidimo kako je Eudoks definirao osnovne pojmove svoje teorije: **Omjer** (*lógos*) je odnos među iznosima dviju *istovrsnih* veličina. Za dvije veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge (ovo je u biti ono što danas nazivamo Arhimedovim aksiomom), tj. $a, b > 0$ imaju omjer $a : b$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nb > a$. Za veličine (uočimo da se ne zahtijeva sumjerljivost!) kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.²¹ Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim). Pritom razmjer, tj. jednakost dvaju omjera, naziva *analogía* (logično je da nije koristio izraz *proportio*, zašto?). Propozicije u Eudoksove teorije omjera i razmjera, tj. propozicije u EEV, uključuju rezultate o aritmetici s veličinama, svojstva omjera i manipulacije razmjerima. Dok se prije Eudoksa moglo samo dokazati da neke dvije istovrsne veličine nisu sumjerljive te se eventualno moglo (tako primjerice Teetet analizira tzv. kvadratne iracionalnosti) uspoređivati njihove kvadrate ili kubove, koristeći Eudoksove produljene razmjere postalo je moguće direktno izvođenje zaključaka o veličinama koje bismo danas zvali n -tim korijenima [5, 23, 40].

Eudoksova **metoda ekshaustije** generalizira teoriju omjera i razmjera. Naziv je dobila u 17. st., a temelji se na

Teorem 7 (Eudoksov princip ekshaustije EEX1) *Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.*

Suvremenim stilom zapisano: Ako su zadani brojevi $a > \varepsilon > 0$, te ako je niz pozitivnih brojeva (a_n) definiran tako da je $a_0 = a$ i $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$, onda postoji n_0 takav da $\varepsilon > a_{n_0}$ (tj. $\lim a_n = 0$). Lako je uočiti da se princip ekshaustije temelji na spomenutoj definiciji kad dvije veličine imaju omjer, tj. Eudoksovoj izvornoj formulaciji kasnijeg Arhimedovog aksioma, koji je naziv dobio po tome što ga je u 3. st. pr. Kr. u svoje pretpostavke na početku djela *O kugli i valjku* uvrstio Arhimed iz Sirakuze. On ga je izrekao ovako: „Kod

²¹Tj. $a : b = c : d$ znači da za sve m i n : ako $ma < nb$, onda $mc < nd$; ako $ma = nb$, onda $mc = nd$; ako $ma > nb$, onda $mc > nd$.



Slika 4.16: Prvo Menehmovo rješenje problema duplikacije kocke pomoću konika.

*nejednakih linija, nejednakih ploha, nejednakih tijela*²² *veća nadmašuje manju za veličinu, za koju se kad se one sebi pribraja može postići da nadmaši svaku određenu veličinu od onih koje su usporedive (s njom i međusobno)*". To bi pak danas izgledalo ovako: Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ i za svaki $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n(a - b) > M$. Ta tvrdnja slijedi iz Eudoksove definicije (dokaz se može naći u sklopu dokaza EEV8), a i sâm Arhimed navodi da su njegovu pretpostavku, koju danas zovemo Arhimedovim aksiomom, koristili i raniji geometri, konkretno Eudoks. Zanimljivo je i da iako je Eudoks autor metode ekshaustije, Arhimed je bio matematičar koji ju se najviše i najpreciznije koristio i pomoću nje dokazao mnoge važne teoreme [5, 23, 40]. O tome više kasnije.

U ovom odjeljku spomenut ćemo još samo jednog matematičara atenskog razdoblja, jer se njemu pripisuje otkriće jednog od standardnih školskih matematičkih sadržaja: konika. Bio je to **Menehmo** (ca. 380.–320. pr. Kr.). Prema Proklu, bio je Platonov prijatelj i Eudoksov učenik. Neki izvori ga navode kao učitelja Aleksandra Velikog, koji je Aleksandru na pitanje postoji li neki prečac za učenje geometrije navodno rekao: „O kralju, za putovanje zemljom postoje kraljevski putevi i putevi za običan puk, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve". Menehmo je otkrio **konike**, presjeke stošca ravninama, pokušavajući odrediti srednje geometrijske proporcionalne između dvije duljine, tj. pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Tražene proporcionalne uspio je naći u presjecima uspravnih kružnih stožaca s ravninama neparalelnim bazi. Za razliku od danas, kad sva tri tipa konika dobivamo presijecanjem jednog (ne nužno uspravnog) stošca ovisno o kutu ravnine prema osnovici, Menehmo je gledao isključivo normalne presjeke uspravnih stožaca (presjeke ravninama okomitim na jednu izvodnicu stošca) pa je tipove konika dobio ovisno o kutu pri vrhu stošca: parabolu za pravokutni stožac, elipsu za šiljastokutni, a hiperbolu za tupokutni. Menehmo im (vjerojatno) još nije dao nazive, ali mi ćemo koristiti nazive elipsa, parabola i hiperbola, koji su od Menehma mlađi nekih 100–150 godina (ime im je dao Apolonije iz Perge). Menehmo je ponudio dva načina nalaženja srednjih geometrijskih proporcionala, jedno pomoću presjeka parabole i hiperbole, a drugo pomoću presjeka dviju parabola. Oba rješenja su, naravno, opisana geometrijskom algebrom, a mi ćemo detaljno opisati samo prvo (drugo je stilski slično).

²²Kako vidimo, Arhimed je u klasičnom stilu geometrijske algebre geometrijske objekte poistovjećivao s njihovom mjerom, tj. ove nejednakosti se odnose na duljinu, površinu odnosno volumen.

Za prvo Menehmovo rješenje uzmimo (vidi sliku 4.16) međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge. Pretpostavimo da je problem riješen, tj. da su nađene srednje geometrijske proporcionalne između $|OA|$ i $|OB|$ i da su te proporcionalne nanese kao $\overline{OM}$ na pravcu OB i kao $\overline{ON}$ na pravcu OA , dakle vrijedi $|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$ (ako je $|OA| = 2|OB|$, duljinom $|ON|$ je riješen problem duplikacije kocke čiji brid je duljine $|OB|$). Neka je P četvrti vrh pravokutnika $ONPM$. Teorija omjera i razmjera ($a : b = b : c \Leftrightarrow ac = b^2$) povlači da je pravokutnik sa stranicama duljina $|OM|$ i $|OB|$ jednak kvadratu nad $\overline{ON}$, a taj je pak jednak kvadratu (plavo na slici) nad $\overline{PM}$. Iz toga Menehmo temeljem uočenih svojstava presjeka pravokutnog stošca ravninom paralelnoj jednoj izvodnici zaključuje da je P točka parabole (crveno na slici) kojoj je O tjeme, os joj je MB , a $|OB|$ joj je ono što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*, tj. duljina tetive parabole okomite na os koja prolazi fokusom.²³ Nadalje, iz istog razmjera slijedi i da je $|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| \cdot |PN|$ (jednakost zelenih pravokutnika na slici), pa Menehmo zaključuje da je P ujedno i na hiperboli (ljubičasto na slici) sa središtem u O i asimptotama OM i ON [5].²⁴

Dakle, problem udvostručenja kocke bi se mogao riješiti ako bi se mogle konstruirati (ravnalom i šestarom) parabola (kojoj je *latus rectum* jednak duljini brida kocke koju želimo udvostručiti) te istostrana hiperbola (sa svojstvom da je za svaku njenu točku pravokutnik $ONPM$, tj. moderni xy , jednak dvostrukom kvadratu nad zadanim bridom kocke, jer je kod duplikacije kocke $|OA| = 2|OB|$). U tom slučaju samo bi trebalo odrediti točku P presjeka tih dviju krivulja, projicirati ju na pravac OA da dobijemo točku N i $|ON|$ bi bila tražena duljina brida kocke dvostrukog volumena.



Atensko razdoblje grčke matematike ...

... je doba kad su postavljani temelji matematike kao znanstvene discipline u kojoj se zaključci izvode deduktivno. Pritom je matematika ovog razdoblja čista geometrija, većinom u formi tzv. geometrijske algebre. Geometrijska algebra je moderni naziv za skup starogrčkih geometrijskih rezultata i problema koje je u suvremenoj matematici prirodnije opisivati algebarski. Pritom su se među mnoštvom problema istakla tri klasična problema (kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta), koja su kako danas znamo nerješiva, ali čiji pokušaji rješavanja su dali niz novih matematičkih rezultata. Najznačajniji matematičari ovog razdoblja su Hipokrat s Hiosa, koji se bavio sa sva tri klasična problema i sveo problem duplikacije kocke na traženje srednjih geometrijskih proporcionala, te Eudoks s Knida, koji je utemeljio teoriju omjera i razmjera te metodu ekshauzije. Zanimljive i važne prijedloge rješenja za neke od triju klasičnih problema dali su Hipija iz Elide (kvadratura kruga), Arhita iz Tarenta (konstrukcija srednjih geometrijskih proporcionala presjekom konusa, cilindra i torusa) i Menehmo (koji je pokušavajući konstruirati srednje geometrijske proporcionalne otkrio konike). Ostvaren je napredak i na analizi nesumjerljivih veličina (Teodor iz Kirene, Eudoks s Knida), osobito koristeći Eudoksovu teoriju omjera i razmjera. Platon je pak prvi jasno istaknuo važnost preciznih definicija i logičkih dokaza, a vjerojatno je i prvi koji je jasno iskazao zahtjev da konstrukcije budu izvedive šestarom i neoznačenim ravnalom, a Aristotel je pak postavio temelje pravilnog logičkog zaključivanja kroz svoj silogizam (dedukciju) i zakone klasične logike. Također, u ovom su se razdoblju pojavila prva razmatranja infinitezimalnih veličina (Zenon, Demokrit, ali i Eudoks, osobito njegova metoda ekshauzije). U atenskom razdoblju stariji atički brojevni sustav postepeno je zamijenjen alfabetskim.

²³Za parabolu koju danas opisujemo jednadžbom $x^2 = 2py$ je $2p$ njezin *latus rectum*. Ako je $|OA| = a$, ovdje se radi o paraboli $x^2 = ay$, tj. *latus rectum* je a .

²⁴To je istostrana hiperbola koju bismo danas opisali jednadžbom $xy = ab$, gdje je $a = |OA|$ i $b = |OB|$.

Bibliografija

- [1] Anglin, W.S., Lambek, J., *The Heritage of Thales*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [2] Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-Zvi, R., *Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics*. For the learning of mathematics, 3(1) 30—37, 1982. <https://flm-journal.org/Articles/6FAFDB941F710C1E323C3DBE0C9B85.pdf>
- [3] Assad Ebrahim, *The Prehistoric Origins of Mathematics*, <https://mathscitech.org/articles/mathematics-prehistory>
- [4] Bagni, G. T., *Infinite series from history to mathematics education*. Colección Digital Eudoxus, 2009. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8024217>
- [5] Brückler, F.M., *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.
- [6] Brückler, F.M., *Kratka povijest redova*. Osječki matematički list 25(2) 179–196, 2025. <https://hrcak.srce.hr/clanak/497361>
- [7] Brückler, F. M, Stilinović, V., *From Friezes to Quasicrystals: A History of Symmetry Groups*. U: Bharath Sriraman (ur.), *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice, 1823–1863*. Springer, 2025.
- [8] Bütüner, S. Ö., Baki, A., *The use of history of mathematics in the mathematics classroom: An action study*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 8(2) 92–117, 2020. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1255535.pdf>
- [9] Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. Dover publications, inc.
- [10] Arnold Buffum Chace, Henry Parker Manning, Raymond Clare Archibald (ur.): *The Rhind Mathematical Papyrus*. Mathematical Association of America, 1927.
- [11] Stephen Chrisomalis Department of Anthropology: *The Comparative History of Numerical Notation*. PhD thesis, 2003.
- [12] Dejić, M., Mihajlović, A. M., *History of Mathematics and Teaching Mathematics*. Teaching Innovations 27(3) 15–30, 2014.
- [13] Doz, D., *Using the History of Mathematics as a Motivational Factor in Teaching Math*. 2021. <https://doi.org/10.46793/NNU21.471D>
- [14] Ernest, P., *The History of Mathematics in the Classroom*. Mathematics in School 27(4) 25–31, 1998. <https://www.jstor.org/stable/30211871>

- [15] Eschenburg, J.-K., *Sternstunden der Mathematik*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.
- [16] Faustmann, G., *Classroom experiences with the history of mathematics*. Proceedings of the History and Pedagogy of mathematics, 275—285, 2010. <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF11026.pdf>
- [17] Fauvel, J., *Using History in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics 11(2) 3–6, 1991. <https://www.jstor.org/stable/40248010>
- [18] Fernández, J., *Reflexions on Leibniz' Proof of the Fundamental Theorem of Calculus*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405>.
- [19] Friberg, J., *A remarkable collection of Babylonean mathematical texts*. Notices of the AMS 55(9) 1076–1086
- [20] Furinghetti, F., *Teacher education through the history of mathematics*. Educational Studies in Mathematics 66(2) 131–143, 2007. https://www.researchgate.net/publication/227242260_2007_-_Teacher_education_through_the_history_of_mathematics
- [21] González-Velasco, E. A., *Journey through Mathematics*- Springer, New York, 2011.
- [22] Göktepe, S., Özdemir, A. S., *An example of using history of mathematics in classes*. European Journal of Science and Mathematics Education 1(3) 125–136, 2013.
- [23] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. I*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- [24] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. II*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- [25] Heiede, T., *Why teach history of mathematics?*. The mathematical gazette 76(475) 151–157, 1992.
- [26] J. Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* . Springer, 2002.
- [27] Imhausen, A. *Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources*. The Mathematical Intelligencer 28, 19–27 (2006). <https://doi.org/10.1007/BF02986998>
- [28] Konforowitsch, A. G., *Guten Tag, Herr Archimedes*. Verlag Harri Deutsch, 1996.
- [29] Lam Lay Yong, *Zhang Qiujuan Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujuan). An Overview*. Archive for History of Exact Sciences, 50 (1997), 201–240.
- [30] Lerman, S. (ur.), *The Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, 2020.
- [31] Lim, Y. S., Chapman, E., *Effects of using history as a tool to teach mathematicson students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms*. Educational Studies in Mathematics, 90(2), 189–212, 2015. https://www.researchgate.net/publication/281364455_Effects_of_using_history_as_a_tool_to_teach_mathematics_on_students'_attitudes_anxiety_motivation_and_achievement_in_grade_11_classrooms

- [32] Liu, P. H., *Connecting Research to Teaching: Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?*. The Mathematics Teacher 96(6) 416–421, 2003. https://www.researchgate.net/publication/347045022_Connecting_Research_to_Teaching_Do_Teachers_Need_to_Incorporate_the_History_of_Mathematics_in_Their_Teaching
- [33] Medić, D., *Povijest brojeva i njihove notacije*. Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2011.
- [34] Neugebauer, O., *Mathematische Keilschrift-Texte*. Springer-Verlag, 1972.
- [35] Özdemir, A. S., Göktepe, S., Kepçeoğlu, I. *Using mathematics history to strengthen geometric proof skills*. Procedia-Social and Behavioral Sciences 46 1177–1181, 2012. <https://openaccess.marmara.edu.tr/bitstreams/827a9bcf-06a1-43c1-9492-648c52fc0737/download>
- [36] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into Curriculum: What are the Chances and Constraints?*. International Electronic Journal of Mathematics Education 7(1) 3–20, 2012.
- [37] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?*. Journal of Curriculum and Teaching 2(2) 37–46, 2013.
- [38] Smith, D.E., Karpinski, L.C., *The Hindu-Arabic Numerals*, 2007. <https://www.gutenberg.org/files/22599/22599-h/22599-h.htm> (pristupljeno 11.4.2025.)
- [39] Şahin, Ö., Danacı, D., *Investigating the effect of history-of-mathematics activities on middle-grade students' mental computation and opinions: an action research*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1–38, 2020. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1857859>
- [40] Wußing, H., *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer, Leipzig, 2008.

Kazalo

π , 8, 11

Elementi, 16

Elementi, 15, 17, 26

quadrivium, 16

quipu, 1

žetoni, 1

Akademija, 22, 31

Aleksandar Makedonski, 22

alfabet, grčki, 15

algebra, 7, 11

algoritam, Euklidov, 20

algoritam, Fibonaccijev, 6

Anaksagora iz Klazomena, 25

Antifont, 25

Arhita iz Tarenta, 29

Aristotel, 1, 17, 22

aritmetika, 4, 10, 16, 17

aritmetika, teorijska, 16

aritmetika, u Egiptu, 4

Boethius, Anicius Manlius Severinus, 16

broj, 1, 19

broj, iracionalan, 19

broj, neparan, 17

broj, paran, 17

broj, prirodan, 4

broj, savršen, 17

brojevi, figurativni, 17

brojevi, prijateljski, 17

brojevni sustav, akrofonski, 15, 22

brojevni sustav, atički, 15, 22

brojevni sustav, babilonski, 9, 10

brojevni sustav, dekadski, 3, 9, 15, 22

brojevni sustav, egipatski, 3

brojevni sustav, grčki, 22

brojevni sustav, pozicijski, 9

brojevni sustav, seksagezimalni, 9, 10

brojka, 1, 3

brojke, akrofone, 22

brojke, glagoljske, 22

brojke, grčke, 15

brojke, grčke alfabetske, 22

brojke, hijeratske, 4

brojke, hijeroglifske, 3

brojke, klinaste, 9

brojke, miletske, 22

dedukcija, 31

Demokrit iz Abdere, 23

Diogenes Laertius, 16

dokaz, 32

Egipat, 3

egipatski zapis razlomka, 6

Eratosten, 24

Euklidov algoritam, 20

Euler, Leonhard, 17

Fibonacci, 6

formula, trapezna, 9

geometrija, 7, 11, 16, 18

geometrijska algebra, 18, 22–24

Heron Aleksandrijski, 12

Heronova metoda, 12

Hipasis iz Metaponta, 19

Hipija iz Elide, 28

Hipokrat s Hiosa, 26–28

infinitezimalni račun, 22

integral, 23

iracionalnost, 19

iterativna metoda, 12

jednadžba, 7, 11, 23

jednadžba, kubna, 25

jednadžba, kvadratna, 11

jednadžba, linearna, 7, 24

Kepler, Johannes, 19

konstrukcije ravnalom i šestarom, 23, 31

kontinuum, 23

- konvergencija, 23
- korjenovanje, 12
- kost iz Išanga, 1
- kost iz Lebomba, 1
- krug, 8
- kvadratisa, 28
- Leonardo iz Pise, 6
- limes, 25
- logistika, 16
- matematička analiza, 22
- matematika, numerička, 12
- metoda, Heronova, 12
- mirijada, 22
- mjesec, 26
- mjesec, Hipokratov, 26, 27
- mnogokut, 19
- mnogokut, pravilni, 19
- nepoznanica, 7
- Nikomah iz Geraze, 17
- nula, 9, 10
- omjer zlatnog reza, 20
- Ovu tvrdnju o vanjskom kutu trokuta znali su još pitagorejci., 28
- papirus, Moskovski, 3, 4, 7, 8
- papirus, Rhindov, 3, 4, 6–8
- Papus Aleksandrijski, 28
- paradoksi, Zenonovi, 22, 23
- Pitagora sa Samosa, 16
- pitagorejci, 8, 16–20, 29, 32
- Pitagorin poučak, 7, 17, 26
- Platon, 22, 28, 29, 31, 32
- platonizam, 31
- Platonova tijela, 31
- Plimpton 322, 12
- poliedar, 19
- poliedar, pravilni, 19, 31
- popločavanje, pravilno, 19
- poučak, Pitagorin, 12, 17
- princip homogenosti, 24
- problem duplikacije kocke, 24
- problem kvadrature kruga, 24–27
- problem trisekcije kuta, 24, 27, 29
- problem udvostručenja kocke, 24, 28, 29
- problem, delijski, 24
- Proklo, 15–17
- raĀĤunanje, 10
- računanje, 1, 4
- razlomak, 4, 5, 19
- razlomak, jedinični, 5
- red, 23
- red, geometrijski, 23
- rovaš, 1
- spirala, Teodorova, 29
- srednje geometrijske proporcionalne, 28, 29
- sumjerljivost, 19, 20
- Sylvester, James Joseph, 6
- Tales iz Mileta, 16, 32
- Talesov poučak, 16
- Teetet Atenski, 29, 31
- Teodor iz Kirene, 29
- Teon iz Smirne, 24
- teorem, Fibonaccijev, 6
- teorem, Talesov, 12
- teorija brojeva, 16
- tri klasična problema, 24, 26
- trigonometrija, 12
- trisektrisa, 28, 29
- trojka, pitagorejska, 8, 12, 17
- YBC 7289, 12
- zajednička mjera, 19
- Zenon iz Eleje, 22
- zlatni rez, 20