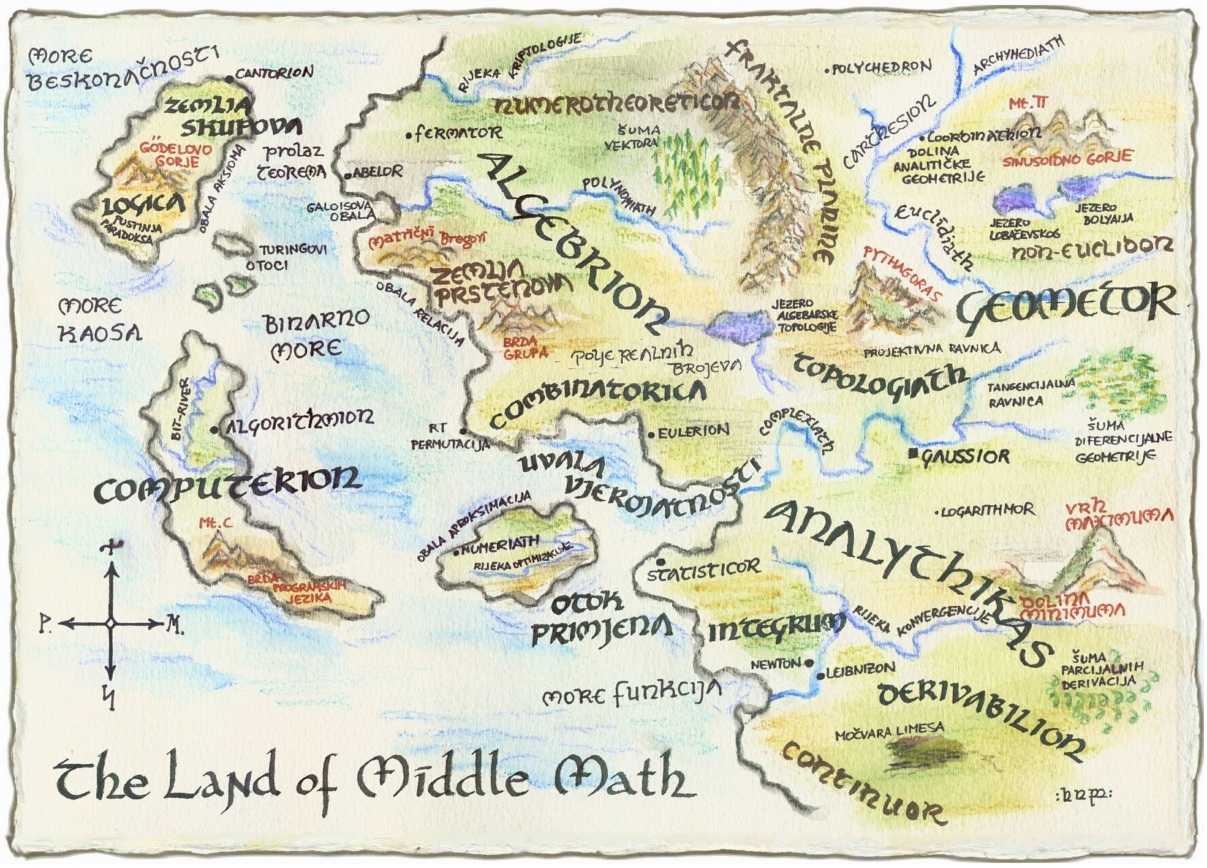
Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu

Proljeće 2026.



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Sadržaj

1 Pramatematika **1**

2 Staroegipatska matematika **3**

3 Babilonska matematika **9**

4 Antička grčka matematika **15**
4.1 Jonsko razdoblje 15
4.2 Atensko razdoblje grčke matematike 23
4.3 Helenističko razdoblje grčke matematike 38
4.3.1 Klasični helenizam 38
4.3.2 Postklasični helenizam 59

5 Matematika u Kini i Indiji u stara vremena **65**
5.1 Starokineska matematika 65
5.2 Staroindijska matematika 72

6 Matematika u srednjevjekovnom arapskom svijetu **77**

7 Srednjevjekovna europska matematika **89**

8 Matematika u doba renesanse **95**

9 Matematika u doba apsolutizma **113**
9.1 Teorija brojeva u 17. stoljeću 113
9.2 Utemeljenje teorije vjerojatnosti 115
9.3 Utemeljenje projektivne i analitičke geometrije 118
9.4 Razvoj algebre u 17. stoljeću 123
9.5 Utemeljenje infinitezimalnog računa 124

10 Matematika u doba prosvjetiteljstva **137**
10.1 Razvoj infinitezimalnog računa u 18. stoljeću 137
10.2 Moderniziranje teorije vjerojatnosti 141
10.3 Utemeljenje topologije 143
10.4 Problem Euklidovog postulata o paralelama 145
10.5 Razvoj (ne samo) teorije brojeva u 18. stoljeću 147

11 Matematika u doba druge znanstvene revolucije **151**
11.1 Uvođenje kompleksne ravnine i dokaz osnovnog teorema algebre 151
11.2 Razvoj topologije 152
11.3 Otkriće neeuklidskih geometrija 155
11.4 Moderniziranje algebre 157
11.4.1 Linearna algebra 157
11.4.2 Nastanak teorije grupa 159
11.5 Nekoliko zanimljivosti iz teorije brojeva u 19. stoljeću 165
11.6 Formaliziranje matematičke analize 166
11.7 Formaliziranje teorije vjerojatnosti i nastanak statistike 170
11.8 Temelji matematike: Teorija skupova i matematička logika 174

Predgovor

Povijest matematike je na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu obavezan kolegij za studente diplomskog studija Matematika, modul nastavnički (i izboran za neke druge studije). To nije iznimka, nego je uobičajeno na studijima matematike na mnogim svjetskim sveučilištima. Poneki student se zasigurno pita: A zašto bih ja trebao učiti povijest matematike? To mi je samo nepotrebno „štrebetanje“, a ne treba mi ni za što osim možda za poneku anegdotu u budućem životu, pa zašto to nije neki lagani kolegij za koji ne trebam puno učiti? Naravno, možemo odgovoriti izbjegavanjem konkretnog odgovora: Očito postoji dobar razlog kad je tako posvuda. Takav odgovor ne bi smio biti zadovoljavajući obrazovanoj osobi, a ponajmanje studentu koji se sprema postati nastavnik matematike i u budućnosti će se često susretati s pitanjima učenika i njihovih roditelja zašto u školi moraju učiti matematiku kad im kasnije osim malo aritmetike ništa od toga više neće trebati.

Razlozi zašto je povijest matematike dio kurikuluma većine studija matematike, osobito profesorskog usmjerenja, vrlo su raznoliki. Mnogi znanstveni radovi ukazuju na važnost povijesti matematike za nastavu matematike, primjerice [4, 5, 27, 34, 35, 39, 42, 43, 48, 51, 54, 66, 68, 69, 75, 77, 78, 90]. Glavni razlozi koji se navode su sljedeći:

- **Kontekst i znanstveni pristup**: Povijest matematike daje kontekst matematičkim rezultatima jer pokazuje kako su mnogi, nerijetko apstrakni, rezultati otkriveni uslijed rješavanja praktičnih problema u stvarnome svijetu i otkriva razloge razvoja mnogih od matematičkih tema. Posebno, kroz proučavanje povijesti matematike postaje očito da matematika nije, kako se često u školi prezentira, skup gotovih nepromjenjivih rezultata, nego da se stalno nadograđuje i razvija.

- **Motivacija i humanizacija**: Kroz povijest matematike lakše je uočiti ljudski element u pozadini često formalne i apstraktne matematike, što indirektno utječe na smanjenje napetosti i povećanje motivacije kod učenika. Kroz povijest matematike matematika iz suhoparne statičke struke i znanosti postaje dinamična i ljudska. Također, nastavnici matematike u povijesti mogu naći mnoge zanimljive zadatke za obogaćivanje matematičkih tema koje obrađuju sa svojim učenicima.

- **Poboljšano razumijevanje**: Proučavanje puta do pojedinih rezultata omogućava razumijevanje razloga koji su doveli do danas rutinskih formula, potiče kritičko razmišljanje, produbljuje konceptualno razumijevanje. Učenici i studenti uočavaju kako su se i veliki matematičari mučili i griješili dok nisu zadovoljavajuće osmislili matematičke koncepte. Upoznavanje s greškama i problemima te načinima kako su se matematičari kroz povijest nosili s njima pruža alternativne strategije za rješavanje matematičkih problema.

- **Interdisciplinarnost**: Kroz uvide u povijesni kontekst razvoja matematičkih teorija ne samo da dobijamo poveznicu s općom povijesti, nego i s drugim znanostima.

> Tako učenici i studenti mogu bolje razumjeti da matematika nije nešto izvan, već dio stvarnog svijeta. Također, poznavanje glavnih momenata iz povijesti matematike povećava i raspon tema iz vlastite struke o kojima u svakodnevici matematičari mogu razgovarati s drugima te tako doprinosi manjoj izoliranosti matematičara unutar društva.

Ova je skripta prilagođena kolegiju *Povijest matematike* na PMF-Matematičkom odsjeku (jednosemestralni kolegij sa satnicom 45 sati, 5 ECTS-a, no u praksi se održi samo 39 sati, a u skladu s definicijom ECTS-bodova to znači da student za savladavanje kolegija treba utrošiti oko 150 sati). Čak i ako skaliramo tih 150 sati s 39/45, ostaje da očekivano opterećenje pojedinog studenta iznosi oko 130 sati. Zašto ovo navodim? Zato da bude očigledno da studenti u samostalnom radu trebaju (u prosjeku) tjedno potrošiti bar još po nekoliko sati vlastitog rada kako bi uspješno savladali kolegij. Pritom treba uzeti u obzir da se ne radi o kolegiju koji se može „naštrebetati“: To što se navode, primjerice, godine kad se nešto dešavalo ne služi tome da se te godine pamte, nego da se može usporediti što je bilo prije (pa je moglo utjecati na razvoj određene ideje) i što se tada dešavalo u dijelu svijeta o kojem je riječ (pa su društveni, kulturni, politički uvjeti utjecali i na razvoj matematičkih ideja). Posebno to znači da se od studenata očekuje poznavanje osnovnih crta opće povijesti čovječanstva na razini osnovne i srednje škole; za one koji su zaboravili, pri početku svakog odjeljka ugrađena je poveznica na jedan kvalitetni izvor za „brzo ponavljanje“. Naravno, budući da se radi o kolegiju diplomskog studija, podrazumijeva se i poznavanje osnovnih definicija i teorema iz gradiva preddiplomskog studija (i školske matematike).

Od ove akademske godine na početku svakog poglavlja dajem popis matematičkih pojmova čije poznavanje se podrazumijeva u tom odjeljku, a na kraju se daje i sažetak najvažnijih stvari iz pojedinog poglavlja. Bibliografija na kraju ove skripte uvijek podliježe nadopunjavanju, a unutar teksta ugrađeni su i linkovi na dodatne izvore.

Svim studentima kao i svima drugima koji ovu skriptu uzmu u ruke želim zanimljiv i poticajan izlet u prošlost matematike!

Franka Miriam Brückler

Poglavlje 1

Pramatematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

** broj i brojka **

Počeci matematike vezani su uz brojanje, geometrijske uzorke i mjerenje. Točno vrijeme kad su ljudi počeli pokazivati znakove matematičkog razmišljanja nije pouzdano poznato, ali najranije sačuvane tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (**rovaši**), te kao geometrijske ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba. Dva najpoznatija (primarna) izvora pramatematike su rovaši nađeni u Africi [36, 6, 10, 40, 70, 103]:

- kost iz Lebomba: stara oko 43.000 godina, sadrži 29 zareza, no nije sa sigurnošću poznato što se s njima brojalo;
- kost iz Išanga. stara oko 20.000 godina, sadrži nekoliko grupacija zareza i postoje mnoge teorije o njihovom mogućem smislu.

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (*quipu*).

Brojanje i brojke, tj. izrazi i simboli za brojeve, vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina, a čini se da je njihov nastanak vezan za razvoj poljoprivrede i trgovine (razmjene). Prva pomagala za računanje bili su zasigurno prsti (prema Aristotelu, rasprostranjenost brojanja u skupinama po deset nije rezultat izbora, nego više anatomska slučajnost). Računanje se može dokazati tek prije ca. 4000 godina, tj. u doba starih civilizacija u Egiptu i Mezopotamiji [70, 103].

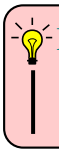


Prvi tragovi ljudskog matematičkog razmišljanja...

... potječu iz kasnog starijeg kamenog doba: Najstariji sačuvani izvori su kosti iz Lebomba i Išanga, koje spadaju u rovaše. Brojke i nazivi za brojeve potječu, čini se, iz mlađeg kamenog doba, dok najstariji pouzdano poznati podaci o računanju potječu iz razdoblja oko 2000. *g. pr. Kr.*

Poglavlje 2

Staroegipatska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

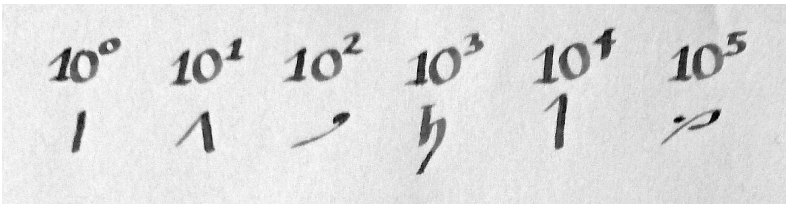
** aritmetika * algebra * geometrija * broj i brojka * prirodni brojevi * razlomci * dekadski brojevni sustav * Pitagorin poučak * pitagorejske trojke * površine i volumeni * π * linearne jednadžbe*

Da bi se moglo pričati o povijesti ikoje ljudske djelatnosti, pa tako i matematike, nužno je razmotriti povijesne izvore. Nadalje, važno je i znati glavne karakteristike razdoblja i kulture u kojoj se proučava određena djelatnost, u našem slučaju matematika. Najstariji sačuvani izvori o staroegipatskoj matematici potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (ca. 2040.–1794.) [10, 26, 103]. Dva najvažnija i najpoznatija među njima su Rhindov i Moskovski papirus. **Rhindov papirus**, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr., je najstariji matematički tekst s poznatim imenom autora. Ime papirusa potječe od škotskog egiptologa A. H. Rhinda, koji ga je 1858. kupio u Luxoru, a danas se ovaj papirus čuva u *British Museum* u Londonu [30]. **Moskovski papirus** potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr. Ruski egiptolog V. S. Goleniščev ga je kupio u Tebi u Egiptu 1892. ili 1893. godine, a danas se nalazi u Puškinovom muzeju u Moskvi. Iz moderne perspektive gledano, ta dva papirusa su zbirke zadataka namijenjene školama državnih službenika. Uz njih poznati su i egipatski matematički kožni svitak iz istog doba, te kasniji papirus Kairo. Iz njih saznajemo da je staroegipatska matematika nastala iz praktičnih potreba: mjeriteljstvo, građevina, skladištenje, porezi, ... [58, 103].

No, više stoljeća prije nego su otkrili izradu papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski **hijeroglifski brojevni sustav**. Znamenke tog sustava, tj. simboli koji su se koristili za zapisivanje brojeva u njemu, prikazane su slikom 2.1. Svaka znamenka piše se onoliko koliko puta je potrebno da bi zbroj vrijednosti svih znamenki u brojci odgovarao iznosu broja kojeg prikazujemo. Primjerice, broj sedamnaest bi se u hijeroglifskom brojevnom sustavu mogao zapisati kao $\cap|||||||$. No, i bilo koji drugi raspored jednog simbola $\cap$ i sedam simbola $|$ predstavljao bi isti broj — sustav je, kao što smo rekli, bio nepozicijski. Same znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava su, kao i svi drugi hijeroglifski znakovi, imale svoje simboličko značenje: Znamenka za 1 je, kao u gotovo svim starim civilizacijama, jednostavno crtica; znamenka za 10 predstavlja omču za vezanje nogu stoci (ili potkovu ili petnu kost); znamenka za 100 predstavlja namotano uže; znamenka za 1000 predstavlja lotos; znamenka za 10.000 predstavlja uzdignuti prst; znamenka za 100.000 predstavlja punoglavca; naposlijetku, znamenka za jedan milijun predstavlja egipatsko božanstvo svemira Huha (ili pak čovjeka u klečećem stavu) [31, 70, 103].

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
						

Slika 2.1: Znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava.



Slika 2.2: Jedna varijanta znamenki hijeratskog brojevnog sustava.

Prilagođavanjem hijeroglifa pisanju na papirusu razvilo se hijeratsko pismo, kojim su pisani npr. Rhindov i Moskovski papirus. Brojevni sustav je ostao nepromijenjen, ali su znamenke za hijeratske brojke poprimile malo drugačiji, jednostavniji, izgled, prikazan na slici 2.2. Kasnije se iz hijeratskog pisma razvilo demotsko pismo, odnosno iz hijeratskih demotske brojke [58, 70, 103].

Kao što je jasno iz navedenog, stari Egipćani znali su zapisivati prirodne brojeve. No, znali su i puno više. Uz Mezopotamiju, tu prvi put dokazivo susrećemo osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uz to drugi korijen, ali njega samo u najjednostavnijim slučajevima). Osim prirodnih brojeva bili su poznati i pozitivni razlomci, ali se u starom Egiptu kao i u ostalim starim civilizacijama brojevi još nisu gledali kao apstraktni objekti. S obzirom na to da je brojevni sustav bio nepozicijski, zbrajanje i oduzimanje bilo je jednostavno, bilo je dovoljno pregrupirati znamenke. Simbola koji bi odgovarali današnjim + i − još nije bilo, bar ne ustaljenih [2, 10, 70, 104].

Zanimljivija je staroegipatska metoda množenja i dijeljenja [103]. Iz moderne perspektive gledano, množenje i dijeljenje svodilo se na korištenje distributivnosti i binarnog zapisa jednog faktora, odnosno djelitelja. Objasnit ćemo te metode kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 1 *Pomnožimo* $25 \cdot 72$ *koristeći suvremene brojke, ali na staroegipatski način. Formira se tablica sa dva stupca, svaki odgovara po jednom od faktora. Prvi red u prvom stupcu sadrži broj* 1*, a prvi red u drugom stupcu sadrži drugi faktor, ovdje je to* 72*. Sad se redovi uzastopno udvostručuju sve dok broj u prvom stupcu ne premaši prvi faktor* (25)*:*

1	**72**
2	144
4	288
8	**576**
16	**1152**
32	.

Slijedi niz oduzimanja. Od prvog faktora oduzme se najveći broj u prvom stupcu koji je manji od njega: $25 - 16 = 9$*. Pritom označimo* (*gore podebljano*) *pripadni broj u*

drugom stupcu. Od zadnje razlike oduzimamo sljedeći najveći broj u prvom stupcu, opet označavajući broj pokraj u drugom stupcu. Postupak ponavljamo sve dok razlika ne bude nula: $25-16=9$, $9-8=1$, $1-1=0$. *Pritom su označeni brojevi* 1152, 576 *i* 72. *Stoga je* $25\cdot 72=72+576+1152=1800$. *Primijetimo da je ovdje umnožak zapravo računat kao* $25\cdot 72=(1+8+16)\cdot 72=(2^4+2^3+2^0)\cdot 72=(11001)_2\cdot 72=1\cdot 72+8\cdot 72+16\cdot 72$.

Primjer 2 *Podijelimo* $203:16$ *na staroegipatski način, ali koristeći suvremene brojke. Opet se ispisuju dva stupca. Prvi odgovara djeljeniku* (203), *a drugi djelitelju* (16). *U prvom redu se zapisuju* 1 *i djelitelj* 16. *Sad se kao i kod množenja redovi uzastopno udvostručuju dok u drugom stupcu ne premašimo djeljenik, ako djelitelj nije veći od djeljenika, a nakon toga se, ako u drugom stupcu nismo dobili baš točno djeljenik, prvi red i naknadni raspolavaljaju (kriterij zaustavljanja ćemo navesti niže):*

1	16
2	32
4	**64**
8	**128***
$\dot{\mathbf{2}}$	**8**
$\dot{4}$	4
$\dot{\mathbf{8}}$	**2**
$\dot{\mathbf{16}}$	**1**

Na mjestu $*$ *stali smo s udvostručavanjem jer bi u sljedećem redu premašili djeljenik* 203. *Slijedi niz oduzimanja: Od djeljenika se u drugom stupcu zaredom oduzimaju najveći mogući brojevi, sve dok razlika ne padne ispod djelitelja. U našem slučaju to znači oduzimanja* $203-128=75$, $75-64=11<16$. *Pri svakom oduzimanju se, kao i kod množenja, označava odgovarajući broj prvog stupca (podebljano). Ti označeni brojevi se zbroje* $(8+4=12)$ *i to je cjelobrojni dio količnika, tj.* $203:16=12$ *i ostatak.*

Da bismo dobili razlomljeni dio kvocijenta, slijedi niz raspolavljanja redova počevši opet od 1 *i* 16. *Pritom smo s* $\dot{n}$ *označili jediničnu razlomak* $\frac{1}{n}$ *Cilj je da označavanjem odgovarajućih redova zbroj označenih brojeva u drugom stupcu bude jednak djeljeniku,* 203. *Trenutno je taj zbroj* $128+64=192$. *Nakon prvog raspolavljanja pribrojimo dobivenih* 8 *i dobijemo* $200<203$, *dakle nastavljamo raspolavljanje. Ako bismo sad pribrojili iz sljedećeg reda* 4 *dobili bismo broj veći od* 203, *dakle taj red ignoriramo. Pribrajamo iz sljedećeg* 2, *čime smo na* 202 *i fali* 1, *kojeg dobijemo nakon četvrtog raspolavljanja. Stoga je kvocijent jednak zbroju označenih brojeva u prvom stupcu:* $4+8+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$.

Uočimo da opisani postupak dijeljenja raspolavljanjem ne mora biti konačan te se ponekad umjesto raspolavljanja koristilo dijeljenje nekim drugim prikladnim brojem, ovisno o djelitelju, no opis takvih primjera bio bi predug te za njih čitatelje upućujemo na [30]. Ono što je svejedno vidljivo iz gornjeg primjera dijeljenja je egipatski pristup razlomcima. Stari Egipćani poznavali su (pozitivne) razlomke, ali nisu ih kao mi danas opisivali kao kvocijente brojnika i nazivnika. Umjesto toga, razlomci su shvaćani kao zbrojevi (različitih) prirodnih brojeva i jediničnih razlomaka $\dot{n}=\frac{1}{n}$,[1] Razlog takvog shvaćanja razlomaka je najvjerojatnije praktične prirode [6, 10, 26, 103].

Primjer 3 *Želimo li* 11 *kruhova podijeliti na* 16 *ljudi, najjednostavnije je prvo sve kruhove prepoloviti, čime smo dobili* 22 *polovice. Njih* 16 *damo svakome po jednu, preostalo je*

[1] Jedina iznimka bio je razlomak $\frac{2}{3}$, prema nekim izvorima i $\frac{3}{4}$.



Slika 2.3: Jedan egipatski razlomak.

6 *polovica. Njih opet prepolovimo pa imamo 12 četvrtina. Budući je* 12 *manje od* 16*, prepolovimo ih još jednom, pa imamo* 24 *osmine. Njih* 16 *opet jednu po jednu damo svakome. Preostalo je* 8 *osmina. Kad njih prepolovimo, dobit ćemo* 16 *šesnaestina i opet svakom damo po jednu. Dakle, svaka osoba je dobila* $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ *kruha.*

Stoga danas rastav razlomka na zbroj cijelog broja i različitih jediničnih razlomaka nazivamo **egipatskim zapisom razlomka**. U hijeroglifskoj i hijeratskoj notaciji zbrojevi jediničnih razlomaka su se zapisivali jednostavno nadopisivanjem, pri čemu je zapis jediničnog razlomka bio simbol usta povrh brojke koja predstavlja nazivnik; taj simbol kasnije je postao točka te smo mi zato koristili simboliku $\dot{n}$ [103]. Primjerice, na slici 2.3 je egipatski zapis razlomka $\frac{2}{5}$. Rhindov papirus sadrži tablicu egipatskih zapisa razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$, koji su među ostalim služili olakšanju dijeljenja za gore spomenute kompliciranije slučajeve dijeljenja [10, 26, 103].

Iz moderne perspektive prirodno se sad postavljaju pitanja: Može li se svaki pozitivan razlomak zapisati na egipatski način? Kako bismo našli takav zapis? Je li takav zapis jedinstven? Na prva dva pitanja odgovara:

Teorem 1 (Fibonacci) *Svaki pozitivan razlomak posjeduje egipatski zapis.*

Tvrdnju iz teorema uključivo pripadne metode dobivanja egipatskog zapisa razlomka otkrio je te u svom djelu *Liber Abaci* (1202.) opisao i (nesavršeno) dokazao znameniti srednjevjekovni matematičar Fibonacci (Leonardo iz Pise). Za potpun formalni dokaz Fibonaccijevog teorema potrebna je:

Lema 1 (J. J. Sylvester) *Neka je* $\frac{p}{q}$ *razlomak manji od* 1 *i* $p \neq 1$*. Neka je* $\frac{1}{n}$ *najveći jedinični razlomak manji od* $\frac{p}{q}$*. Tada je* $\frac{p}{q}-\frac{1}{n}=\frac{r}{qn}$ *razlomak sa svojstvom* $r<p$*.*

Dokaz Sylvesterove leme. Imamo: $\frac{p}{q}-\frac{1}{n}=\frac{pn-q}{qn}$, tj. $r=pn-q$. Pretpostavimo $r \geq p$, odnosno $p(n-1) \geq q$. Budući da je $n>1$, slijedi $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, što je kontradikcija.

Dokaz Fibonaccijevog teorema. Ako krenemo od pozitivnog razlomka i uzastopno oduzimamo najveći jedinični razlomak manji od njega, Sylvestorova lema garantira da će se brojnici smanjivati. Zbog dobrog uređaja skupa $\mathbb{N}$ slijedi da ne možemo nastaviti unedogled, pa je teorem dokazan.

Primjer 4 *Zapišimo* $\frac{3}{7}$ *na egipatski način, koristeći Fibonaccijev algoritam:*

$$\frac{1}{2}>\frac{3}{7}>\frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21};$$
$$\frac{1}{10}>\frac{2}{21}>\frac{1}{11}: \quad \frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{1}{231}.$$

Dobili smo jedinični razlomak, dakle je

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}.$$

Zadatak 1 *Na egipatski način zapišite rješenje sljedećeg zadatka [63]: Netko je iz riznice uzeo $\frac{1}{13}$ njenog sadržaja. Drugi je uzeo $\frac{1}{17}$ onog što je preostalo. Ostavio je* 150 *jedinica sadržaja u riznici. Koliko je na početku bilo u riznici?*

Teorem 2 *Svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo egipatskih zapisa.*

Dokaz. Egzistencija je dana Fibonaccijevim teoremom. Neka je nađen jedan egipatski zapis razlomka $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = m + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Jednakost $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ dijeljenjem s jednim od nazivnika početnog egipatskog zapisa, recimo s k_n, daje $\frac{1}{k_n} = \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}$. Ako to supstituiramo na mjesto $\frac{1}{k_n}$ u prvom egipatskom zapisu, dobili smo novi egipataski zapis istog razlomka:

$$\frac{p}{q} = m + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i}\right) + \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Očigledno se prethodno dijeljenje zapisa broja 1 s nekim od nazivnika trenutnog egipatskog zapisa može ponavljati unedogled, dakle vrijedi tvrdnja teorema. 

U Rhinodovom i Moskovskom papirusu nalazimo i zadatke koje bismo danas ubrojali u jednostavne linearne i čisto kvadratne jednadžbe, dakle u algebru. Tipičan primjer je sljedeći [30].

Primjer 5 (RP31) *Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine* 33. *Koliko sadrži hrpa?*

Vidimo da termin „hrpa“ odgovara modernom pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama“, česti su i zadaci s omjerima *pe(f)su*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pe(f)su* je omjer količina dobivenog kruha odnosno piva i utrošenog žita) [30, 103].

Primjer 6 (RP77) *Primjer razmjene piva za kruh. Recimo da ti je rečeno da* 10 des[2] *pive (s* pefsu 2*) treba zamijeniti za kruhove (s* pefsu 5*). Koliko kruhova će biti?*

Zadatak 2 *Na način koji smatrate što sličniji staroegipatskom, riješite zadatak RP34 [30]: Hrpa, njezina polovina i njezina četvrtina skupa daju* 10. *Koliko sadrži hrpa?*

Rješenja svih zadataka u ovim papirusima, kao i općenito u starim civilizacijama, daju se kao konstatacije, bez objašnjenja i pokušaja generalizacije, a kamoli dokaza. Primjerice, rješenje zadatka RP77 iz prethodnog primjera dano je ovako: Izračunaj količinu brašna u 10 des pive; to je 5 hekata.[3] Pomnoži 5 s 5, to je 25. Reci onda da za razmjenu treba 25 kruhova [26, 30, 103].

Stari su Grci otkriće geometrije pripisivali Egipćanima. Geometrijska znanja starih Egipćana svakako su bila impresivna. Poznavali su specijalni slučaj Pitagorinog poučka. Naime, starim Egipćanima je bila jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug utvrđivali su promatranjem točaka na horizontu gdje neka zvijezda izlazi i zalazi, a zatim se pomoću konopa s jednoliko razmaknutih 12 čvorova i pitagorejske trojke $(3, 4, 5)$ utvrđivao na prvi smjer okomiti smjer istok-zapad. No, tek papirus Kairo (iz

[2] Tipična staroegipatska posuda za pivu imala je volumen 1 des, to je otprilike 2,4 L.

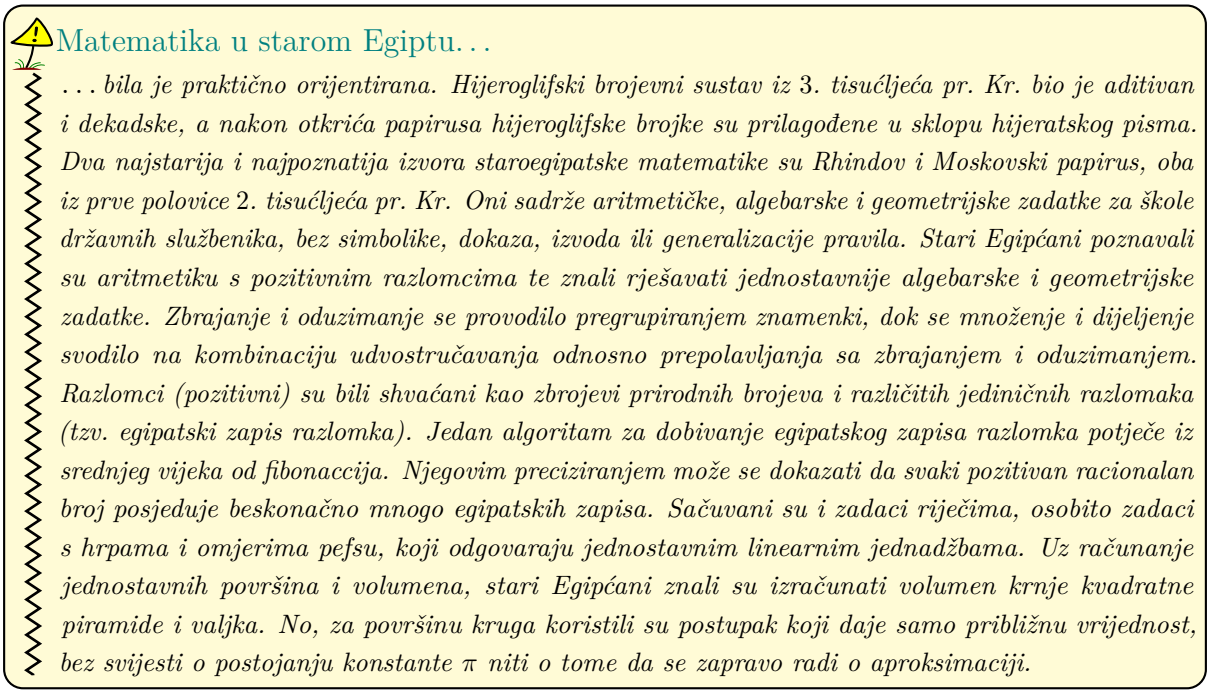
[3] Hekat je staroegipatska mjera volumena, iznosa otprilike 4,8 L.

ca. 300. pr. Kr., dakle nakon doba pitagorejaca) navodi i pitagorejske trojke $(5, 12, 13)$ i $(20, 21, 29)$. Stari su Egipćani znali računati i razne površine (trokut, pravokutnik, trapez) i volumene (kocka, kvadar). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine. Posebno je poznat 14. zadatak u Moskovskom papirusu s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide [103]. Ipak, najzanimljiviji je staroegipatski način računanja površine kruga. Čini se da je u doba kad su nastali Moskovski i Rhindov papirus već bio rasprostranjen postupak kakav je opisan, npr., u sljedećem zadatku [30, 103].

Primjer 7 (RP41) *Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera* 9 *i visine* 10*? Oduzmi* $\frac{1}{9}$ *od* 9*. Ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *s* 8*, dobiješ* 64*. Pomnoži* 64 *s* 10*, to je* 640 *kubičnih kubita.*[4]

Dakle, stari Egipćani su površinu kruga promjera d računali kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. S obzirom na to da je postupak bio šire poznat, čini se da su donekle implicitno primijetili proporcionalnost površine kruga i površine kvadrata nad polumjerom odnosno promjerom, no staroegipatski pristup još ne dozvoljava da govorimo o poznavanju ni naslućivanju egzistencije konstante koju danas zovemo π. Također, nema naznaka da su bili svijesni da taj postupak ne daje egzaktnu vrijednost površine. Ako staroegipatski postupak usporedimo s modernim, vidimo da staroegipatska procjena površine kruga odgovara aproksimaciji $\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3{,}16$ [26, 30, 103].

Zadatak 3 *Koliko, izraženo u postocima, iznosi greška računanja površine kruga na staroegipatski način u odnosu na točnu vrijednost?*



[4] 1 kubit $\approx$ 52,3 cm.

Poglavlje 3

Babilonska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

** aritmetika * algebra * geometrija * numerička matematika * teorija brojeva * broj i brojka * pozicijski brojevni sustav * pitagorejske trojke * Pitagorin poučak * Talesov teorem * površine i volumeni * π * linearne i kvadratne jednadžbe * korjenovanje * iterativne metode **

Na području Mezopotamije tijekom prva tri tisućljeća pr. Kr. izmijenili su se različiti dominantni narodi (Sumerani, Akađani, Babilonci, Asirci, Perzijanci), no od ca. 2500. pr. Kr. nadalje svi su koristili varijante klinastoga pisma te su iz tog razdoblja sačuvane mnoge glinene pločice, od kojih stotinjak imaju matematičke sadržaje (tablice, zadatke). Najviše takvih potječe iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr. Kr.). Nedavno (2016.) je otkrivena i jedna pločica na kojoj se može naći rani oblik primjene trapezne formule. Iz tih sačuvanih pločica saznajemo da je i sumersko-babilonska matematika bila praktično orijentirana (trgovina, građevina, nasljeđivanje, astronomija), a rješenja zadataka su se kao i u starom Egiptu davala se bez argumenata, dokaza ili generalizacije [47, 73, 103].

Često se čuje ili pročita da su Sumerani odnosno Babilonci koristili sustav s bazom 60, ali to nije sasvim točno. Iz ranijih, arhaičnih piktograma su se, kao uostalom i samo klinasto pismo, razvile klinaste brojke. Sam pripadni brojevni sustav se mijenjao tokom vremena. Uglavnom je bio dekadski ili pak primarno seksagezimalni (sustav s bazom 60) i sekundarno dekadski. Dugo vremena ti sustavi bili su aditivni ili aditivno-multiplikativni, no njihov razvoj postigao je vrhunac u doba treće urske dinastije (potkraj 3. tisućljeća pr. Kr.) u Babilonu. Taj sustav poznat je kao **(klasični) babilonski brojevni sustav**. Bio je to prvi pozicijski brojevni sustav u povijesti. Radilo se o brojevnom sustavu s primarnom bazom 60 i sekundardnom bazom 10. Zbog nedostatka znamenke nula taj sutav nije bio apsolutno pozicijski,[1] ali ga je već sama pozicionalnost učinila najmnoćnijim (u pogledu zahtjevnijih izračuna) među starim brojevnim sustavima. Zato je on iznimno dugo ostao u upotrebi u znanosti, posebice astronomiji, a i dan danas ga povremeno koristimo (računanje vremena; iznosi kutova u stupnjevima). Pedeset i devet znamenki tog sustava pisane su pomoću dva klina, horizontalnog 𒌋 koji ima vrijednost deset i vertikalnog 𒁹 koji ima vrijednost jedan, a vrijednost pojedine znamenke se formirala po aditivnom principu. Primjerice, 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 bi bila seksagezimalna znamenka 23 [26, 31, 70, 73, 103].

Jedna od prednosti seksagezimalnog sustava u odnosu na moderni pozicijski dekadski sustav je da više razlomaka imaju konačan zapis.

[1] Da u modernom dekadskom pozicijskom sustavu nedostaje znamenka 0, ne bismo bez konteksta mogli znati predstavlja li primjerice 12 broj dvanaest, stotinu i dva, stotinu dvadeset, ... — vrijednost znamenke ne bi bila apsolutno određena njenom pozicijom.

Primjer 8 *Zapišimo razlomak* $\frac{17}{48} = 0{,}35416\dot{0}$ *seksagezimalno:*

$$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60^1} + \frac{b}{60^2} + \dots,$$

gdje su $a, b, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$. *Množenje sa* 60 *daje* $21\,\frac{1}{4} = a + \frac{b}{60} + \dots$, *dakle je* $a = 21$. *Oduzmemo li* 21, *preostaje* $\frac{1}{4} = \frac{b}{60} + \dots$, *što opet pomnožimo sa* 60. *Dobijemo* $b = 15$, *dakle je*

$$\frac{17}{48} = \frac{21}{60} + \frac{15}{60^2} = (0; 21{,}15)_{60},$$

tj. 𒌋𒌋𒐕 𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕.[2]

Uz nedostatak znamenke nula, mana klasičnog babilonskog brojevnog sustava je da je osnovna tablica množenja veličine 60×60 (zapravo, 59×59), no tom su problemu Babilonci doskočili korištenjem tablica kvadratnih brojeva i algebarskim postupcima koji su ekvivalentni modernim formulama [2, 10, 26, 103]:

$$a\,b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Primjer 9 *Pomnožimo sto sa sedamnaest na babilonski način. Broj sto u seksagezimalnom sustavu je* $1 \cdot 60 + 40 \cdot 1 =$ 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋, *a sedamnaest je* 𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕.

Recimo da želimo ta dva broja pomnožiti koristeći prvo pravilo. U tom slučaju nam prije korištenja tablice kvadrata treba zbroj ta dva broja: $(1{,}40)_{60} + (0{,}17)_{60} = (1{,}57)_{60} =$ 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕. *Nakon toga u tablici kvadrata nađemo kvadrat tog broja te kvadrate faktora sto i sedamnaest.*

Kvadrat od sto je deset tisuća:

$$10000 = (2{,}46{,}40)_{60} = \text{𒐕 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋.}$$

Kvadrat od sedamnaest je dvije stotine osamdeset i devet:

$$289 = (4{,}49)_{60} = \text{𒐕 𒐕 𒐕 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕.}$$

Kvadrat zbroja faktora je trinaest tisuća šest stotina osamdeset i devet:

$$13689 = (3{,}48{,}9)_{60} = \text{𒐕 𒐕 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕}$$

Od posljednjeg oduzmemo prva dva kvadrata:

$$(3{,}48{,}9)_{60} - (2{,}46{,}40)_{60} - (4{,}49)_{60} = (3{,}48{,}9)_{60} - (2{,}51{,}29)_{60} =$$

$$= (56{,}40)_{60} = \text{𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋.}$$

Na kraju prepolovimo i dobijemo $(28{,}20)_{60} =$ 𒌋𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕 𒌋𒌋, *što je točan rezultat:* $100 \cdot 17 = 1700 = 28 \cdot 60 + 20$.

Zadatak 4 *Pomnožite* 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋 *s* 𒌋𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕𒐕 *koristeći drugo pravilo.*

[2]Kod seksagezimalnog zapisa na moderan način znamenke na pojedinim pozicijama razdvajamo zarezom pa cijeli dio od razlomljenog razdvajamo točka-zarezom. Također, uobičajeno je prve dvije znamenke iza seksagezimalnog točka-zareza označavati s ’ i ”, primjerice $(0; 5{,}2)_{60}$ se obično zapisuje kao $5'2''$.

Dijeljenje se svodilo na množenje s recipročnim brojem ($a/b = a \cdot \frac{1}{b}$), uz korištenje tablice recipročnih brojeva [2, 10, 26, 103].

Mnoge babilonske pločice sadrže algebarske zadatke, točnije zadatke koji se iz moderne perspektive svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave [103].

Primjer 10 (BM 13901) *Pločica BM* 13901 *sadrži zadatak koji glasi „Skupio sam površinu i moje nasuprotno: To je* $45'$*.“ Pod površinom se ovdje misli na površinu kvadrata nepoznate duljine stranice, dok je 'moje nasuprotno' sama ta stranica. Vidimo da se radi o jednažbi koju bismo danas zapisali kao* $x^2 + x = \frac{45}{60}$*. Postupak rješavanja je, skraćeno prema [56, str. 50–52], sljedeći: Uzmi 'projekciju'* (*koeficijent uz* x) 1 *i prepolovi, to je* $30'$*; zbroji* $15'$ (*četvrtinu kvadrata 'projekcije'*) *i* $45'$ (*slobodni član*)*, to je* 1*; dakle, rješenje je razlika od* 1 (*duljine stranice kvadrata površine* 1) *i* $30'$ (*polovinu 'projekcije'*)*, dakle* $30' = \frac{1}{2}$*. Vidimo da se u osnovi radi o primjeni postupka za rješavanje kvadratne jedadžbe:* (*Pozitivno*) *rješenje jednadžbe* $x^2 + b\,x = c$ *je* $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.

Zadatak 5 *Na pločici BM* 13901 *nalazimo ovaj zadatak [56, str. 73–74]: „Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio* $25'25''$*. Strana je* $2/3$ *strane i* $5'$*.“ Kako biste interpretirali „moje strane“? Zapišite ovaj zadatak modernom simbolikom!*

Naravno, geometrija je također bila razvijena u babilonsko doba. Na sačuvanim pločicama nalazimo mnoge geometrijske zadatke, posebice vezano za građevinu (izgradnja nasipa i kanala, često trapeznog presjeka) i astronomiju. Naravno, kao u isto doba Egipćani, Babilonci su znali računati površine kvadrata, pravokutnika, a znali su i da su obujmi prizme i valjka jednaki umnošku površine baze i visine [26, 103]. Evo jednog primjera geometrijskog zadatka vezanog za izgradnju kanala.

Primjer 11 *Na pločici VAT* 7528 *nalazimo zadatak [73, 103]: „Mali kanal.* 6 *kuša dug.* 2 *kuša gornja širina.* 1 *kuš donja širina.* $1\frac{1}{2}$ *kuš dubina.* $\frac{1}{3}$ sar *zemlje radni učinak.* 18 *ljudi. Dani su što?* [...] 11 *dana i* $\frac{1}{4}$ *su dani.“*

Vidljivo je da je ovdje opisano da je presjek kanala oblika jednakokračnog trapeza. Jedinica sar *može biti jedinica površine i volumena, ovdje volumena* (*kojeg dnevno iskopa jedan čovjek*)*. Pritom je* $1\,\text{sar} = 1\,\text{nindan}^2\,\text{kuš}$*, gdje je* $1\,\text{nindan} = 12\,\text{kuš}$.[3] *Volumen kanala ispada* $(1{,}7; 30)_{60}\,\text{sar}$*. S druge strane,* 18 *ljudi dnevno iskopa* $6\,\text{sar}$*, dakle se cijeli kanal iskopa za* $(11; 15)_{60}$ *dana.*

Izračuni površine i opsega kruga u babilonsko doba najčešće odgovaraju modernoj aproksimacinji $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, ponekad $\pi \approx 3$. Kao i kod starih Egipćana, ovdje ne možemo još govoriti o svijesti o egzistenciji i ulozi broja π niti o njegovoj svjesnoj aproksimaciji [26, 103].

Primjer 12 *Jedna pločica iz razdoblja* 1900.–1600. *pr. Kr. interpretira se kao tvrdnja da je opseg pravilnog šesterokuta jednak* $\frac{24}{25}$ *opsega tom šesterokutu opisane kružnice.*

Ako to razmotrimo na suvremen način, budući da je stranica a_6 *pravilnog šesterokuta upisanog u kružnicu jednak njezinom polumjeru* ($r = a_6$)*, opseg šesterokuta* ($O_6 = 6a_6 = 6r$) *je prema toj tablici jednak* $\frac{24}{25}O$*. Danas znamo da je to* $\frac{24}{25} \cdot 2r\pi$*. Vidimo da je tvrdnja na pločici ekvivalentna aproksimaciji* $\pi \approx \frac{25}{8} = 3\,\frac{1}{8}$.

[3] Jedinica duljine kuš (ili giš) poznata je i pod nazivom kubit, a nindan se može prevesti sa štap i iznosio je oko 6 m.

Jedna od dvije najznamenitije sačuvane babilonske pločice, Plimpton 322 (ca. 1800. g. pr. Kr.) sadrži tablicu **pitagorejskih trojki**. Zapravo, u toj je tablici su u drugom stupcu kraće katete b pravokutnih trokuta, u trećem odgovarajuće hipotenuze c, ali u prvom stupcu su kvadrati omjerâ $\frac{c}{a}$. Primjerice, u 14. redu te tablice nalaze se brojevi $\frac{c}{a} = (1; 25{,}48{,}51{,}35{,}6{,}40)_{60}$, $b = (29{,}31)_{60}$ i $c = (53{,}49)_{60}$. Vidimo dakle da taj redak odgovara pitagorejskoj trojci $(1771, 2700, 3229)$ [26, 73, 103]. Prema nekim interpretacijama, ta se tablica može gledati kao rana trigonometrijska tablica. Babilonci su poznavali i opći Pitagorin poučak, bez dokaza, i koristili ga za rješavanje raznih geometrijskih zadataka. Pogledajmo dva primjera.

Zadatak 6 *Na jednoj starobabilonskoj pločici pronađenoj* 1936. *kod Suse nalazimo određivanje polumjera kružnice opisane jednakokračnom trokutu sa stranicama duljina* 50, 50 *i* 60 *[103, str. 134–135]. U prvom se koraku računa visina* 40 *koristeći Pitagorin poučak, a onda se on koristi da bi se dobio polumjer* $(31{,}15)_{60}$. *Riješite taj zadatak modernom simbolikom, ali koristeći navedeni postupak!*

Primjer 13 *Na pločici BM* 85 196 *nalazi se zadatak [103]: „Greda duljine* 30′ kuš *je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za* 6′ kuš. *Koliko je donji kraj udaljen od zida¿' U rješenju se redom računa: Kvadrat od* 30′ *je* 15′. *Oduzme se* 6′ *od* 30′ *i dobije* 24′. *To se kvadrira i dobije* 9′36″. *To se oduzme od* 15′, *ostaje* 5′24″. *Naposlijetku je rješenje drugi korijen posljednjeg broja, tj.* 18′.

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera [103, str. 138–139].

Naposlijetku, u babilonsko doba možemo naći i začetke numeričke matematike. konkretno iterativnih metoda za izračunavanje aproksimativnih iznosa raznih jednadžbi. Kako sugerira druga od dviju najznamenitiji sačuvanih pločica YBC 7289, za aproksimativno izračunavanje drugih korijena korištena je iterativna metoda danas poznata pod imenom **Heronova metoda**, jer ju je opisao starogrčki matematičar Heron Aleksandrijski u svom djelu *Metrica* (vj. 1. st. AD). Na pločici YBC 7289 nalazimo crtež kvadrata s ucrtanim dijagonalama i tri brojke. Prva brojka je 𒌋𒌋𒌋=30, vjerojatno 30', uz stranicu, dakle kvadrat ima duljinu stranice $30' = \frac{1}{2}$. Druga brojka je 𒐕 𒌋𒌋 𒐕 𒐕 𒐕 𒐕 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋 𒐕 𒌋, tj. $(1; 24{,}51{,}10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41421\overline{296}$, što je $\sqrt{2}$ (s greškom reda veličine samo 10^{-7}). Treća brojka je 𒌋𒌋𒌋𒌋 𒐕 𒐕 𒌋𒌋 𒐕 𒐕 𒐕 𒐕 𒐕 𒌋𒌋𒌋 𒐕 𒐕 𒐕 𒐕 𒐕, tj. $(0; 42{,}25{,}35)_{60} = 0{,}707106\overline{481}$, tj. duljina dijagonale nacrtanog kvadrata (opet s greškom reda veličine 10^{-7}). Tako dobre vrijednosti naravno nisu mogle biti plod slučaja i pomnije istraživanje pokazuje da su $(1; 24{,}51{,}10)_{60}$ prve četiri seksagezimalne znamenke trećeg i četvrtog koraka Heronove metode za računanje drugog korijena od 2, iz čega zaključujemo da je Babiloncima bila poznata ta metoda [10, 26, 103].

Primjer 14 *Podsjetimo se Heronove metode za korjenovanje: Želimo li korjenovati neki broj* n, *krećemo od neke početne aproksimacije za* $\sqrt{n}$. *Primjerice, za račun* $\sqrt{2}$ *mogli bismo krenuti od početne aproksimacije* $a_0 = 1$.

U svakom koraku je nova aproksimacija polovina zbroja prethodne aproksimacije s kvocijentom broja kojeg korjenujemo i prethodne aproksimacije:

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{n}{a_i}\right).$$

Konkretno, za izračun $\sqrt{2}$ imamo sljedeća prva četiri koraka:

i	a_i	$a_{i+1} \approx \sqrt{n}$	seksagezimalno	dekadski
1	1	$\frac{3}{2}$	$1;30$	1.5
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$1;25$	$1.41\dot{6}$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$1;25{,}51{,}10(,35,\ldots) \approx 1;25{,}51{,}11$	$1.13169642857\ldots$
4	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	$1;25{,}51{,}10(,7,\ldots) \approx 1;25{,}51{,}10$	$1.41421356237\ldots$

S postupkom stajemo kad se zadovoljavajući broj znamenki počne ponavljati, primjerice ovdje su se počele ponavljati prve četiri seksagezimalne znamenke pa zaključujemo da je $\sqrt{2} \approx (1{,}25;51;10)_{60}$ aproksimacija s greškom reda veličine manjom od 60^{-3}.



Matematika u Mezopotamiji ...

... se kao i u drugim starim kulturama razvila iz praktičnih potreba. Primarni izvori su glinene pločice pisane klinastim pismom, a većina sačuvanih je iz doba starobabilonskog carstva. U to je doba korišten prvi pozicijski sustav u povijesti, koji je bio primarno seksagezimalan, a sekundarno dekadski, no zbog nedostatka znamenke nula nije bio apsolutno pozicijski. Množenje se svodilo na zbrajanje i oduzimanje kvadrata brojeva, a dijeljenje na množenje s recipročnim brojem, pri čemu su korištene tablice kvadrata i recipročnih brojeva. Babilonci su znali rješavati i neke linearne i kvadratne jednadžbe te njihove sustave, ali bez generalizacije ili dokaza ispravnosti postupaka. Geometrijski zadaci iz babilonskog doba najčešće su vezani za građevinu, a po svom matematičkom sadržaju slični su egipatskima: računanje raznih površina i volumena. Pritom su se za opseg i površinu kruga koristili postupci koji interpretirani na moderan način odgovaraju aproksimacijama broja π s $3\frac{1}{8}$ ili s 3. Babilonci su poznavali iskaz Talesovog teorema te općeg slučaja Pitagorinog poučka, a tablica Plimpton 322 sadrži tablicu pitagorejskih trojki. U babilonsko doba bio je poznat i Heronov postupak za korjenovanje, što zaključujemo iz iznimno dobrih približnih iznosa za $\sqrt{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ na tablici YBC 7289.

Poglavlje 4

Antička grčka matematika

4.1 Jonsko razdoblje



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

** dokaz * broj i brojka * prirodni brojevi * parni i neparni brojevi * prosti i složeni brojevi * savršeni brojevi * racionalni i iracionalni brojevi * aritmetika * teorija brojeva * geometrija * kut * pravci i kružnice * mnogokuti * Talesov poučak * Pitagorin poučak * pitagorejske trojke * zajednička mjera * Euklidov algoritam **

Dobro je poznato da temelji znanstvenog razmišljanja sežu u doba antičke Grčke, u tzv. arhajsko razdoblje starogrške povijesti. Tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj **grčki alfabet** s 24 slova:

A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν; Ξ, ξ; O, o; Π, π; P, ρ; Σ, σ ili ς; T, τ; Y, υ; Φ, φ; X, χ; Ψ, ψ; Ω, ω.

U isto se doba počinju se razvijati i grčki polisi (gradovi-države). Na području Jonije (današnja jugozapadna Turska) se na prijelazu 7./6. st. pr. Kr. pojavljuju temelji filozofije i znanostvenog načina razmišljanja. Pod utjecajem egipatskog i babilonskog nasljeđa, tu se počela razvijati i matematika, te je stoga prvo razdoblje starogrčke matematike (otprilike od početka 6. st. pr. Kr. pa do otprilike početka 5. st. pr. Kr.) poznato kao jonsko razdoblje starogrčke matematike. Iz tog doba nije sačuvan nikoji primarni izvor, no temeljem sekundarnih izvora saznajemo da se u to doba matematika počela formirati u znanost u kojoj se tvrdnje dokazuju. Najvažniji sekundarni izvor za ovo, ali i kasnija razdoblja je **Proklo** (5. st. A. D.), točnije njegovi komentari Euklidovih *Elemenata* (u nastavku ih označavamo s EE) [26, 52, 103].

Brojevi su se u jonsko doba, pa i dalje do 3. st. pr. Kr., zapisivali koristeći **atički (akrofonski) brojevni sustav**. Taj je sustav primarno dekadski i sekundardno kvinarni, aditivni brojevni sustav (kao i kasniji, poznatiji, rimski brojevni sustav) [31, 70, 103]. Znamenke akrofonskog sustava su:

I $= 1$ ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$); $\Gamma = 5$ ($\pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon$); $\Delta = 10$ ($\delta\acute{\varepsilon}\kappa\alpha$); $\boxed{\Delta} = 50$; H $= 100$ ($\acute{\varepsilon}\kappa\tau\acute{o}\nu$); $\boxed{\text{H}} = 500$; X $= 1000$ ($\chi\acute{\iota}\lambda\iota o\iota$); $\boxed{\text{X}} = 5000$; M $= 10000$ ($\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$); $\boxed{\text{M}} = 50000$.

Primjerice, broj kojeg danas zapisujemo kao 10539, u atičkom brojevnom sustavu bio bi zapisan kao M$\boxed{\text{H}}\Delta\Delta\Delta\Gamma$IIII.

Tradicionalno se prvim „pravim" matematičarem smatra **Tales iz Mileta** (oko 624.–527. pr. Kr.). On je prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inžinjer. Tradicija mu pripisuje prve dokaze, ali se zapravo ne zna je li išta dokazao. Štoviše, ne zna se ni je li Tales išta pisao. Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A. D.) i Proklovih komentara EE. Prema Proklu, Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Diogenes Laertius mu pripisuje Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice.[1] Također Diogenes Laertius spominje legendu o navodnom Talesovom određivanju visine piramide temeljem koje se Talesu pripisuju Talesovi teoremi o proporcionalnosti. Proklo pak Talesu pripisuje sljedeća četiri teorema: Svaki promjer raspolavlja krug; kutevi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki; vršni kutevi su jednaki; KSK-teorem o sukladnosti trokuta. No, nipošto nije sigurno da je išta od toga Tales stvarno dokazao, moguće je da se kod njega još radilo samo o empirijski utvrđenim činjenicama. Također, postoje i rasprave o točnom smislu tvrdnji (npr. vezano za teorem o kutovima uz osnovicu jednakokračnog trokuta u Proklovom tekstu nalazimo izraze koji su bliži značenju sličan nego jednak) [10, 52, 103].

Najstariji pouzdano poznati matematički dokazi potječu od pitagorejaca, pripadnika škole koju je osnovao **Pitagora sa Samosa** (ca. 570.–490. pr. Kr.). O njegovom životu malo toga se pouzdano zna, a nije ni sigurno je li ikoji od njemu pripisanih teorema sam otkrio i(li) dokazao. Rođen je na Samosu kao sin trgovca i s ocem je imao prilike putovati, a bio je i dobro obrazovan. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar. Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos i tamo osnovao svoju prvu školu („polukrug"). Iz ne pouzdano poznatih razloga je 518. (ili nešto ranije) otišao u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnovao znanstveno-vjerski-mističku **pitagorejsku školu**. Njene članove danas nazivamo pitagorejcima, no sami su se nazivali *μάθηματικοι* (*μάτημα* = znanje, ono što se uči). Pitagorejska škola je bila dijelom tajna zajednica pa mnogi podaci o njoj nisu pouzdani, a Pitagori su pripisivana božanska svojstva, te su to glavni razlozi zašto danas ne znamo tko je dokazao koji pitagorejski teorem. No, sigurno je da su pitagorejci počeli deduktivno dokazivati matematičke tvrdnje. Krajem 6. st. pr. Kr. je Pitagora zbog političko-ratnih sukoba u kojima su sudjelovali pitagorejci pobjegao u Metapont i vjerojatno ondje umro, no ne zna se kako i kada [10, 26, 52].

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji brojeva. Pitagorejci su prvi koji su brojeve gledali kao samostalne, apstraktne objekte. No, za njih, a tako i kasnije za sve starogrčke matematičare, broj (*άριθμός*) je isključivo prirodan broj.[2] Brojevima su pridavana mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima. Aritmetika kakvu su razvijali pitagorejci i ostali klasični starogrčki matematičari poznata je kao **teorijska aritmetika**, a iz moderne perspektive možemo ju smatrati začetkom teorije brojeva. Za razliku od toga, praktično računanje (logistika) u antičkoj Grčkoj nije smatrano matematičkom djelatnošću. Za logistiku su se u jonsko doba kao pomagala koristili kamenčići i prsti [10, 26, 52, 98].

Pitagorejci su razvili četiri discipline kojima je kasnije, početkom srednjeg vijeka, Boethius dao zajednički naziv *quadrivium*. Prva od njih je već spomenuta (teorijska) aritmetika, koja se bavi se onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost). Druga disciplina *quadrivium*-a je **geometrija** (*γεωμετρία*), koja se bavi onim što se može mjeriti

[1] Najstariji sačuvani dokaz ovog teorema nalazimo u EE kao EEIII31.

[2] Pritom jedinica (monada, *μόνος*) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji VII. knjige EE piše: Broj je skup jedinica.

(veličinama: duljina, površina, volumen, ali i trajanje, masa). Preostale dvije discipline *quadrivium*-a su glazba (harmonija, aritmetika u vremenu) i astronomija (geometrija u vremenu). O pitagorejskoj aritmetici saznajemo ne samo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. A. D). Mnogi pitagorejski aritmetički rezultati sačuvani su u VII., VIII. i IX. knjizi EE. Pitagorejci su uveli razne klasifikacije (prirodnih) brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: **Parni brojevi** su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a **neparnima** pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i **proste i složene brojeve**.[3] Razmatrali su i **savršene brojeve**, tj. brojeve koji su zbrojevi svih svojih pravih djelitelja, te kvadratne i kubne brojeve, tj. brojeve oblika n^2 i n^3. Kasnije, vjerojatno tek neopitagorejci u postklasičnom helenističkom razdoblju (oko prijelaza era), su razmatrani i razni **figurativni brojevi** te **prijateljski brojevi** (dva broja su prijateljska ako je svaki od njih zbroj pravih djelitelja drugog, tj. savršeni su brojevi oni koji su prijateljski sami sebi) [2, 10, 26, 52, 98, 103]. Pitagorejcima se pripisuje sljedeći poznati teorem:[4]

Teorem 3 (EEIX36) *Ako je proizvoljno mnogo brojeva počevši od jedinice razvijeno u dvostrukoj proporciji*[5] *sve dok im zbroj ne bude prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim dade broj, taj broj je savršen.*

Suvremenim načinom rečeno: Ako je $p = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ prost broj, onda je $2^n\, p$ savršen.

Pitagorejci su se vezano za Pitagorin poučak (vidi niže) bavili i pitagorejskim trojkama. Gotovo sigurno su znali ih ima beskonačno mnogo, a pripisuje im se i dokaz sljedećeg teorema (teorem dajemo u suvremenoj formulaciji) [10, 26]:

Teorem 4 (EEX29, lema) *Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2m\,n, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka*[6] *i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n, koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2m\,n, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.*

Primijetimo da specijalno za $n = 1$ odmah vidimo da postoji beskonačno mnogo pitagorejskih trojki [10]. Napomenimo ovdje da je generalizaciju gornje tvrdnje na općenite pitagorejske trojke dokazao tek 1901. L. Kronecker: Sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 = c^2$ su, do na udvostručavanje, dana kao $(2m\,n\,k, (m^2 - n^2)\,k, (m^2 + n^2)\,k)$ gdje su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $m > n$ i m i n su relativno prosti i nisu oba neparni (**Kroneckerov teorem**) [2].

Iako ne znamo je li Pitagora osobno dokazao Pitagorin poučak, čini se pouzdano da je neki pitagorejac prvi koji je taj teorem dokazao (kako smo vidjeli, teorem je bio poznat još Babiloncima, ali ne i dokaz). Ne znamo točno kakav je bio pitagorejski dokaz tog poučka, ali budući da se većina sadržaja I. knjige EE pripisuje pitagorejcima, razumno je pretpostaviti da je tamo zapisan dokaz zapravo pitagorejski [2, 26, 52, 103]:

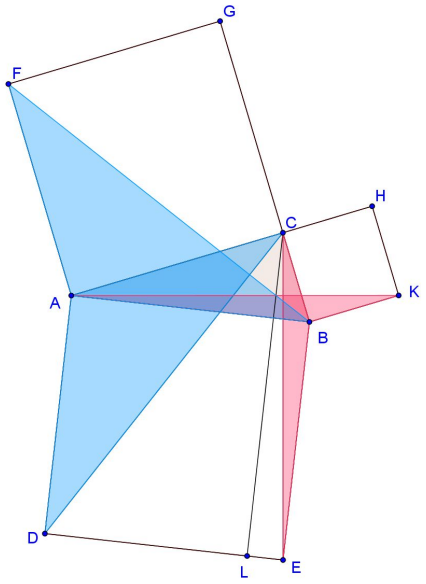
Teorem 5 (EEI47, EEI48) *Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.*

[3] U VII. knjizi EE 11. i 13. definicija kažu: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. Složen broj je onaj koji se može izmjeriti brojem.

[4] Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek L. Euler sredinom 18. st.

[5] Tj. svaki sljedeći član je dvostruko veći od prethodnog.

[6] Pitagorejska trojka u kojoj su brojevi relativno prosti.



Slika 4.1: Ilustracija uz Euklidov dokaz nužnosti u Pitagorinom poučku (slika izrađena programom Geogebra).

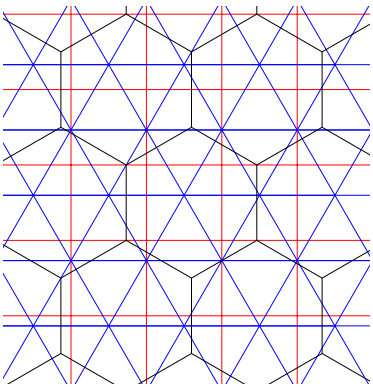
Dokaz nužnosti. Neka je dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C (slika 4.1). Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati $ACGF$, $BCHK$ i $ABED$. Nadalje, ucrtana je i visina CL na hipotenuzu, od vrha C do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika. Dokazujemo da je jedan od njih jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom. Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Dokažimo recimo da je lijevi pravokutnik $ADLT$ jednak kvadratu $ACGF$: Ucrtajmo trokute ADC i ABF. Ta dva trokuta imaju dvije stranice iste duljine ($|AB| = |AD|$ i $|AF| = |AC|$ jer su $ABED$ i $ACGF$ kvadrati), a i kut među tim dvjema stranicama je jednak ($\angle FAB$ je pravi kut uvećan za kut $\angle CAB$, a takav je i $\angle CAD$). Po SKS-teoremu[7] ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i sukladna. Budući da trokut $\triangle ACD$ ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik $ADLT$ (stranica AD je zajednička, a visina je DL) slijedi da je taj trokut jednak pola pravokutnika.[8] S druge strane trokut $\triangle AFB$ ima s kvadratom $ACGF$ zajedničku stranicu AF i visinu AC, dakle je taj trokut jednak pol tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki, slijedi da je kvadrat $ACGF$ jednak pravokutnik $ADLT$, što je i trebalo dokazati.

Iz ovog se dokaza vidi i osnovni princip tzv. **geometrijske algebre** starih Grka, a to je da su identitete koje danas interpretiramo algebarski antički Grci shvaćali i dokazivali čisto geometrijski, kao jednakost duljina, površina ili volumena. Kad se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao npr. ovdje o jednakosti jednog kvadrata s druga dva, misli se na jednakost mjere (ovdje površine), a ne na sukladnost [2, 10, 26, 52, 103].

Kao što je rečeno, pitagorejcima se pripisuje veći dio sadržaja I. knjige EE, što uključuje razne propozicije iz elementarne planimetrije kao što su konstrukcija paralele i okomice

[7] Ako je ovaj dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi EE kao EEI4, to je vrlo vjerojatno.

[8] I ovo se nalazi dokazano u EEI, propozicija 41: Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.



Slika 4.2: Tri pravilna popločenja ravnine.

na pravac, bisekcija kuta i dužine, teoremi o sukladnosti trokuta, odnos površine trokuta i paralelograma, ... Posebno, pitagorejci su znali da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 2 prava kuta,[9] a vjerojatno su dokazali i generalizaciju: Zbroj kutova u svakom četverokutu je četiri prava kuta, u svakom peterokutu je šest pravih kutova i t. d., tj. suvremenim stilom iskazano: Zbroj kutova u svakom n-terokutu je $2n-4$ prava kuta. Poznat je pitagorejski interes za pravilne mnogokute i pravilne poliedre. Prilično je sigurno da su poznavali svih pet pravilnih poliedara, s tim da se poznavanje prvih četiriju (kocka, pravilni tetraedar, pravilni oktaedar i pravilni ikozaedar) pripisuje već Pitagori, dok se otkriće pravilnog dodekaedra pripiduje Hipasusu iz Metaponta [2]. Pripisuje im se i poznavanje dokaza sljedećeg teorema [2, 25]:

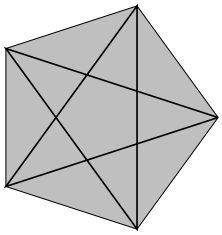
Teorem 6 *Postoje samo tri pravilna popločenja*[10] *ravnine: popločenje jednakostraničnim trokutima, popločenje kvadratima i popločenje pravilnim šesterokutima (slika 4.2).*

Dokaz. Najstariji sačuvan dokaz gornjeg teorema potječe od Keplera (1619.) [24]: Zbroj kutova u svakom n-terokutu je $2n-4$ prava kuta, pa je u pravilnom n-terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva. U svakom vrhu pravilnog popločenja sastaje se isti broj m pravilnih n-terokuta, dakle je $m\,\alpha$ jednak četiri prava kuta. Slijedi $m = 4\frac{n}{2n-4} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Pritom su m i n prirodni brojevi veći od 1. Ako je $n = 3$ dobije se $m = 6$ (popločavanje jednakostraničnim trokutima), ako je $n = 4$ dobije se $m = 4$ (popločavanje kvadratima), ako je $n = 5$ m nije cijeli, ako je $n = 6$ dobije se $m = 3$ (popločavanje pravilnim šesterokutima). Za $n > 6$ je $\frac{4}{n-2} < 1$, dakle ne može biti cijeli broj.

Široj matematičkoj i općenito obrazovanoj populaciji je uz Pitagorin poučak vjerojatno najpoznatiji pitagorejski rezultat kojeg danas iskazujemo ovako: $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. No, kako smo rekli, za pitagorejce samo prirodni brojevi su brojevi. Razlomci za stare Grke nisu brojevim, nego omjeri dvaju brojeva. Stoga nipošto brojevi koje danas zovemo iracionalnima za njih nisu bili brojevi. Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da im je osnovno uvjerenje bilo da su svake dvije *istovrsne* veličine (dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena, ...) **sumjerljive**. Pritom, dvije veličine su sumjerljive ako

[9] EEI32: U svakom trokutu, ako se jedna strana produlji, vanjski kut jednak je zbroju dvaju unutrašnjih nasuprotnih kutova, a zbroj tri unutrašnja kuta u trokutu je dva prava kuta.

[10] Popločenje ravnine je prekrivanje ravnine bez rupa i preklapanja kopijama jednog ili više likova ('pločica'). Popločenje je pravilno ako su sve pločice sukladni pravilni mnogokuti koji imaju zajedničke vrhove i ako se u svakom vrhu sastaje isti broj pločica.



Slika 4.3: Pravilni pentagram

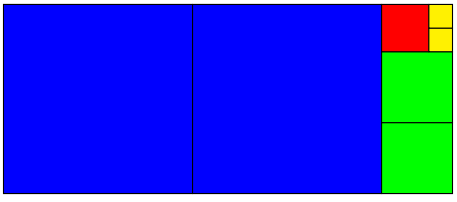
postoji veličina (zajednička mjera, iste vrste kao polazne dvije veličine) kojom se mogu obje izmjeriti. Dakle, pitagorejska pretpostavka (uvjerenje) o sumjerljivosti znači da su svake dvije istovrsne veličine višekratnici jedne te iste zajedničke mjere („mogu se njome izmjeriti"). Možemo to i ovako iskazati: Postoji jedinica duljine (površine, volumena, vremena, ...) takva da svaka duljina (površina, volumen, vremenski interval, ...) kao mjeru ima racionalan broj [2, 10, 26, 103].

Neki pitagorejac, navodno Hipasus iz Metaponta, je oko 450. g. pr. Kr. dokazao da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici. To je naravno ekvivalentno činjenici da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, ali je konceptualno bitno drugačije. Također, iz već navedenih razloga takav dokaz je zasigurno bio čisto geometrijski, a ne kao današnji algebarsko-simbolički [10, 52, 103]. Druge teorije sugeriraju da je prvi dokaz egzistencije nesumjerljivih veličina bio nesumjerljivost stranice i dijagonale pravilnog peterokuta jer je pravilni pentagram (slika 4.4) bio simbol pitagorejske škole [40]. Omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta danas je poznat pod nazivom **omjer zlatnog reza**.[11] Pitagorejci su uočili da je taj omjer moguće definirati kao omjer dviju duljina u kojem se dulja prema kraćoj odnosi kao kraća prema njihovoj razlici.

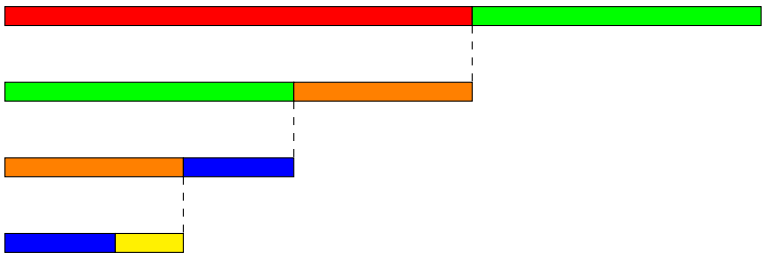
Bilo da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za kvadrat bilo za pravilni peterokut, gotovo sigurno ono je proizašlo iz otkrića **Euklidovog algoritma** [40]. Najkasnije od egipatskog i sumerskog doba bilo je lako usporediti dvije istovrsne veličine (broja, mase, duljine, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge. Primjerice, na sljedećoj slici ilustrirano je kako utvrđujemo da je dulja dužina 5 puta dulja od kraće:



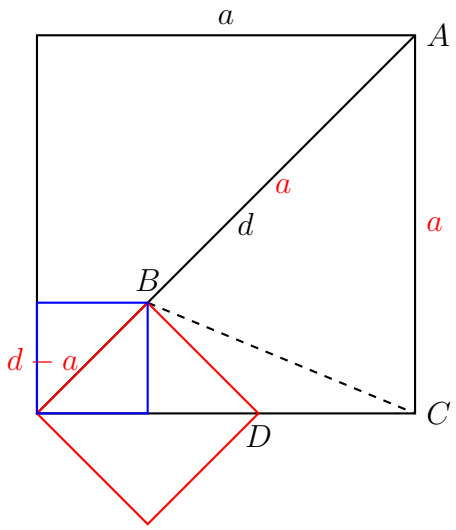
Pitagorejci (a možda već i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom". Naime, ako veća veličina nije višekratnik prve (veću ne možemo izmjeriti manjom), onda ostatkom mjerimo manju. Ako opet ostane ostatak, onda prvi ostatak mjerimo drugim i t.d., sve dok u nekom trenu ne nađemo zajedničku mjeru dvaju zadnjih ostataka, koja je onda (najveća) zajednička mjera polaznih dviju veličina. Tako je na sljedećoj slici mali žuti kvadratić najveća zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je najveća zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.



[11] Naziv 'omjer zlatnog reza' uveo je tek 1835. godine njemački matematičar Martin Ohm, brat znamenitijeg fizičara Georga Ohma.



Slika 4.4: Nesumjerljivost dijagonale i stranice pravilnog peterokuta.



Slika 4.5: Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata.

Temeljna pitagorejska pretpostavka o sumjerljivosti svake dvije istovrsne veličine povlači da za svake dvije istovrsne veličine postupak Euklidovog algoritma staje u konačno mnogo koraka (EEX2). Ako uzmemo dvije dužine (crvenu i zelenu) čije duljine su u omjeru zlatnog reza, imat ćemo niz koraka sa slike 4.4 u Euklidovom algoritmu:[12] Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti, postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine [40].

Primijenimo isti način razmišljanja na dokaz nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata. Pogledajmo sliku 4.5. Dan je kvadrat (duljinu stranice označili smo s a, a dijagonale s d). Ucrtamo manji kvadrat (crveno) tako da mu stranica leži na dijagonali i da mu je stranica duljine $d-a$. Trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan, iz čega (zbog jednakosti kutova s okomitim kracima) slijedi da je i $\triangle DBC$ jednakokračan, tj. $|CD| = d-a$. Stoga je dijagonala crvenog kvadrata duljine $a-(d-a) = 2a-d$. Sad bismo mogli na isti način u crveni kvadrat ucrtati kvadrat kojemu je stranica duljine njegove dijagonale minus njegove stranice, i tako u beskonačnost. Pritom je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Kad bi a i d bile sumjerljive, sa zajedničkom mjerom m, onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m), što je nemoguće. Zaključujemo da dijagonala i stranica kvadrata ne mogu biti sumjerljive [40].

[12] Ovo se obično ilustrira tzv. Pitagorinom lutnjom.



Jonsko razdoblje grčke matematike . . .

. . . doba je kad se matematika počela razvijati kao znanost u kojoj se tvrdnje logički dokazuju. Za brojke se koristio atički brojevni sustav. Prema tradiciji, ali nepouzdano, prvi je matematičke (geometrijske) tvrdnje dokazivao Tales iz Mileta u prvoj polovici 6. *st. pr. Kr. Prvi koji su sa sigurnošću dokazivali matematičke tvrdnje bili su pitagorejci, pripadnici škole koju je osnovao Pitagora sa Samosa oko* 520. *g. pr. Kr. Od pitagorejaca nadalje u starogrčkoj matematici pod brojevima se podrazumijevaju isključivo prirodni brojevi. Osim aritmetikom (koja je u pitagorejskom obliku začetak teorije brojeva) pitagorejci su se bavili i geometrijom. Iako su pretpostavljali da su svake dvije istovrsne geometrijske veličine sumjerljive, tj. da im se omjer može izraziti kao omjer prirodnih brojeva, otkrili su da to nije tako (dokazavši, vjerojatno geometrijskom varijantom Euklidovog algoritma, da dijagonale pravilnih četverokuta odnosno peterokuta nisu sumjerljive njihovim stranicama). No, ne možemo reći da su pitagorejci otkrili iracionalne brojeve jer ih oni nikad ne bi prihvatili kao brojeve.*

4.2 Atensko razdoblje grčke matematike



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

** brojka * infinitezimalni račun * limes * niz * konstrukcije ravnalom i šestarom * jednadžba * dedukcija * dokaz * kvadratni i kubni korijeni * omjeri i razmjeri * sinus i kosinus * površina i volumen * krivulja * pravilni poliedri * konike **

U prvoj polovici 5. st. pr. Kr. kao centar grčke filozofske i znanstvene djelatnosti pomalo se počinje isticati Atena. Dok se u općoj povijesti ovo razdoblje naziva klasičnim periodom grčke povijesti, u povijesti matematike poznato je i kao atensko razdoblje. Vrhunac (u znanstvenom smislu) atenskog razdoblja predstavlja Platonovo osnivanje Akademije (ca. 387. pr. Kr.). Atensko razdoblje potrajalo je do doba osvajanja Aleksandra Makedonskog, dakle do potkraj 4. st. pr. Kr. U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti je poprimila formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te (matematičke) logike.

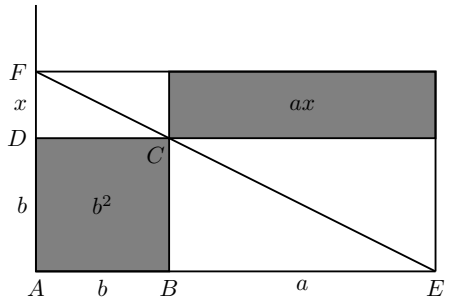
Tijekom atenskog razdoblja atičke brojke postepeno su zamijenjene **alfabetskim (miletskim) brojkama**. Princip tog sustava sličan je brojevnim sustavima koje su koristili Feničani, a kasnije Židovi, Arapi, Hrvati (glagoljske brojke), ...: Slovima alfabeta, u ovom slučaju grčkog, pridružene su brojevne vrijednosti. Grčki alfabetski sustav je dekadski brojevni sustav sa znamenkama koje odgovaraju brojevima jedan do devet pomnoženim s jedan, deset i sto. Za to je potrebno 27 znamenki, a grčki alfabet ima 24 slova pa su dodatno korištena tri arhaična slova: feničko slovo vau (digama) za 6, kopa za 90 i san (sampi) s vrijednošću 900. Dalje je alfabetski sustav znamenkasto aditivan. Korištenjem crtice (tzv. *hasta*) ispred znamenki za jedinice dobivaju se tisućice, a za desettisućice[13] su se istih tih devet znamenki pisale povrh slova M (veliko μ, od mirijada, tj. deset tisuća). Do početka helenističkog razdoblja znamenke ovog sustava poprimile su formu prikazanu slikom 4.6. Da bi se tekst razlikovao od brojki, alfabetske brojke obično su završavale apostrofom ili bivale natcrtane. Primjerice, $\overline{\rho\iota\alpha}$ ili $\rho\iota\alpha'$ je naš 111 [26, 31, 52, 70].

Začetke **infinitezimalnog računa** susrećemo kod dvaju filozofa atenskog razdoblja. **Zenonu iz Eleje** (ca. 490.–430. pr. Kr.) Aristotel pripisuje četiri paradoksa (dihotomiju, paradoks o Ahilu i kornjači, strijela i stadion) kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena Zenon dobiva prividno paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja. Iako sva četiri paradoksa otvaraju pitanje prirode kontinuuma, za povijest matematike su od strijele i stadiona značajnije dihotomija i paradoks o Ahilu i kornjači. *Dihotomija* argumentira nemogućnost kretanja time što se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Prema Zenonu, ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja. Sličan je paradoks o *Ahilu i kornjači*: Ahil je puno brži od kornjače, ali dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla, dok Ahil dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t. d. Dakle, prema Zenonu, Ahil neće nikad stići kornjaču. Danas naravno oba paradoksa lako razriješimo koristeći konvergentne redove (u prvom slučaju geometrijski s kvocijentom $\frac{1}{2}$, a u drugom općeniti konvergentni red s pozitivnim članovima) [20]. S druge strane, filozof **Demokrit iz Abdere** (ca. 460.–370. pr. Kr.), poznat po ideji nedjeljivih čestica „atoma“ kao osnovnih jedinica materije, za povijest matematike je zanimljiv po ideji podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi u svrhu određivanja njegova volumena. Tako je došao do dileme: Ako

[13] Vjerojatno tek početkom sljedećeg, helenističkog razdoblja.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Α′ α′	Β′ β′	Γ′ γ′	Δ′ δ′	Ε′ ε′	Ϛ′ ϛ′	Ζ′ ζ′	Η′ η′	Θ′ ϑ′
10	Ι′ ι′	Κ′ κ′	Λ′ λ′	Μ′ μ′	Ν′ ν′	Ξ′ ξ′	Ο′ ο′	Π′ π′	Ϙ′ ϙ′
10^2	Ρ′ ρ′	Σ′ σ′	Τ′ τ′	Υ′ υ′	Φ′ φ′	Χ′ χ′	Ψ′ ψ′	Ω′ ω′	Ϡ′ ϡ′
10^3	͵Α ͵α	͵Β ͵β	͵Γ ͵γ	͵Δ ͵δ	͵Ε ͵ε	͵Ϛ ͵ϛ	͵Ζ ͵ζ	͵Η ͵η	͵Θ ͵ϑ
10^4	$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	$\overset{\delta}{M}$	$\overset{\varepsilon}{M}$	$\overset{\varsigma}{M}$	$\overset{\zeta}{M}$	$\overset{\eta}{M}$	$\overset{\vartheta}{M}$

Slika 4.6: Znamenke klasičnog grčkog alfabetskog brojevnog sustava.



Slika 4.7: Primjer geometrijske algebre (primjer 15).

gledamo jedan takav disk, jesu li njegove osnovice jednake ili ne? Ako jesu, stožac je valjak, ako nisu, stožac je grbav. Naravno, ni tu dileme, znamo danas, nema, ali očigledno ovo njegovo razmatranje možemo smatrati prethodnikom ideje **integrala** [10].

Kao što smo već rekli, **geometrijska algebra** je naziv[14] za starogrčke geometrijske rezultate koje danas opisujemo algebarski. Tu, primjerice, kvadrat nije broj odnosno potencija broja, nego geometrijski lik poistovjećen sa svojom mjerom (površinom). Dva objekta su jednaka ako su jednaki po mjeri (iznosu, duljini, površini odnosno volumenu). Dakle, vrlo bitno je istaknuti: Nisu antički Grci jednadžbe rješavali geometrijski (niti je u njih bilo ideje jednadžbe), nego mi danas mnoge njihove rezultate interpretiramo i dokazujemo algebarski. Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki matematičari su dodatno počeli zahtijevati da se **geometrijske konstrukcije** kojima se dokazuju tvrdnje smiju provoditi isključivo (neoznačenim) ravnalom i šestarom. Stoga se za jednakost (brojeva, duljina, površina, odnosno volumena) tražilo i više od puke jednakosti mjere: Jednakost se mora moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Kao razlog tog ograničenja mnogi autori navode da su se kao jedine dvije krivulje prisutne u stvarnome svijetu smatrali pravci i kružnice, koje su smatrane „savršenim" krivuljama jer „svaka dva njihova dijela" izgledaju podjednako [10, 26, **?**, 103].

[14]Naziv potječe iz 19. st.

Primjer 15 *Zadan je kvadrat $ABCD$ i potrebno je na starogrčki način konstruirati njemu jednak pravokutnik kojemu je zadana jedna stranica. Zadana stranica se postavi kao nastavak $\overline{BE}$ stranice $\overline{AB}$, kao na slici 4.7. Zatim se konstruiraju pravci AD i EC te odredi njihovo sjecište F. Naposlijetku se EAF dopuni do pravokutnika (konstruirajući paralele) i produlje dužine $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ do rubova tog pravokutnika. Budući da je $\overline{EF}$ dijagonala tog pravokutnika, ona ga raspolavlja. Također, vidljiva su dva para sukladnih trokuta. Stoga su sive površine jednake, tj. pravokutnik je jednak (po površini) kvadratu. Uočimo li da su svi koraci izvedivi ravnalom i šestarom, zaključujemo da je zadatak korektno riješen. Pritom se stvarno radi o primjeru geometrijske algebre, jer bi opisanu konstrukciju danas bilo prirodnije gledati kao geometrijsko rješavanje linearne jednadžbe $a\,x = b^2$.*

U prethodnom primjeru ste se možda zapitali zašto smo na kraju linearnu jednadžbu zapisali kao $a\,x = b^2$, a ne kao $a\,x = b$. Razlog je u **principu homogenosti**, koji je ne samo u duhu antičkih shvaćanja, nego je sve do modernog doba zadržan u pristupima jednadžbama, a i danas je bitan u primjenama: Izjednačavati te zbrajati i oduzimati se mogu samo istovrsne veličine (ovdje su to površine kvadrata i pravokutnika).

Vjerojatno najpoznatija matematička tema koja potječe iz atenskog razdoblja antičke grčke matematike su **tri klasična problema**. Zašto su ta tri problema toliko važna? Danas znamo da oni nisu rješivi (naravno, poštujući uvjet konstrukcije rješenja ravnalom i šestarom), ali su pokušaji rješenja tih problema, posebno u antičko grčko doba, doveli do mnogih novih matematičkih otkrića. Ta su se tri problema vjerojatno pojavila pokušajem generalizacije konstrukcija bisekcije kuta, podjele dužine na proizvoljan broj jednakih dijelova i udvostručenja kvadrata koje su bile dobro poznate matematičarima potkraj jonskog i početkom atenskog razdoblja. Tri klasična problema su:

1. **Problem udvostručenja (duplikacije) kocke**: Za danu kocku treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.

2. **Problem trisekcije kuta**: Dani kut treba ravnalom i šestarom podijeliti na trećine.

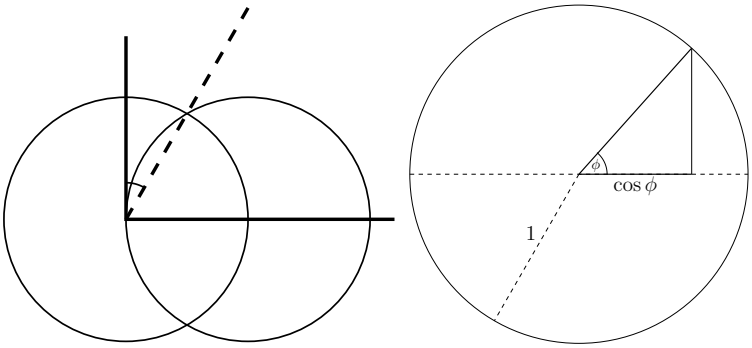
3. **Problem kvadrature kruga**: Ravnalom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke danas formuliramo ovako: Za zadani $a > 0$ zadatak je ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

O njegovoj prvoj pojavi govore dvije poznate legende. Jednu, po kojoj je ovaj problem poznat i kao delijski problem, navodi Teon iz Smirne (ca. 70.–130.) citirajući Eratostena, a to je da su građani Delosa u doba jedne epidemije potražili savjet proročišta u Delfima kako da se riješe epidemije te im je rečeno da konstruiraju dvostruko veći oltar od postojećeg kockastog oltara posvećenog bogu Apolonu. Drugu pak navodi Eutokije Askalonski (ca. 480.–540.) u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*, a to je da je kretski kralj Minos htio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa [26, 52, 103].

Za razliku od toga, o problemu trisekcije kuta nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o njegovoj formulaciji. Bio je manje popularan od druga dva klasična problema, vjerojatno zato što je za neke kutove rješiv ravnalom i šestarom. Kako se on uklapa u našu definiciju geometrijske algebre? Uočimo prvo da ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove, jer se pravi kut može trisektirati ravnalom i šestarom koristeći konstrukciju



Slika 4.8: Pravi kut se može trisektirati ravnalom i šestarom, a konstrukcija kuta ekvivalentna je konstrukciji njegova kosinusa.

jednakostraničnog trokuta (slika 4.8 lijevo). Nadalje, šiljasti kut ϕ (primjerice, trećina zadanog kuta α) može se konstruirati ako i samo ako se može konstruirati $\cos\phi$ (slika 4.8 desno).[15] To se lako vidi iz definicije sinusa i kosinusa u jediničnoj kružnici. Ako je zadan α, iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos\phi$ vidimo da je problem trisekcije kuta ekvivalentan konstrukciji rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos\alpha.$$

Zadatak 7 *Koja jednadžba odgovara trisekciji kuta od* $60°$*?*

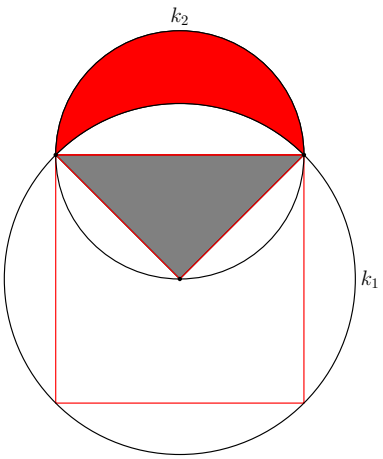
Naposlijetku, problem kvadrature kruga danas interpretiramo ovako: Za zadani $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^2 = r^2\pi.$$

Za ovaj problem postoji konkretno ime uz koje se veže njegova prva pojava. Bio je to navodno **Anaksagora iz Klazomena** (ca. 499.–428. pr. Kr.), Periklov prijatelj koji je završio u zatvoru zbog tvrdnje da Sunce nije bog te se navodno u zatvoru počeo baviti ovim problemom. Prvi važniji pokušaj rješavanja ovog problema pripisuje se sofistu **Antifontu** (ca. 480.–411. pr. Kr.). On je navodno predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica. Smatrao je da će se ostatak do površine kruga iscrpiti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica. Naravno, tu je počinio matematičku grešku, koju danas izražavamo ovako: Ako se svaki član nekog niza može konstruirati ravnalom i šestarom, to ne znači da se i limes tog niza može konstruirati. U svakom slučaju ovaj problem je brzo postao iznimno popularan, na što ukazujei činjenica da ga Aristofan spominje u komediji *Ptice* (414. pr. Kr.) [10, 26, 52, 103].

Zadatak 8 *Nađite primjer konvergentnog niza takvog da se svaki njegov član može konstruirati ravnalom i šestarom, ali da se njegov limes ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Pritom iskoristite činjenicu da se broj može konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako je zadana jedinična duljina i ako se taj broj može izračunati iz cijelih brojeva koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena.*

[15] Alternativno $\sin\phi$. Oprez: U ovo doba još nije postojala trigonometrija, tako da je ovo moderna analiza problema, a ne starogrčki pristup.



Slika 4.9: Prvi Hipokratov mjesec.

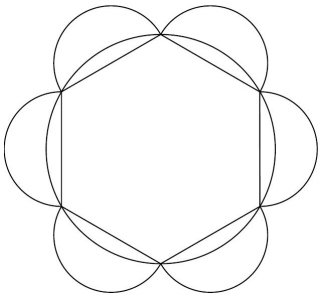
Sa sva tri klasična problema se bavio prvi značajni matematičar atenskog razdoblja **Hipokrat s Hiosa** (ca. 470.–410. pr. Kr.). On je navodno bio trgovac brodovima iz Jonije, ali je izgubio imovinu (jedni navode gusare, drugi nepoštene carinike) te je dvadesetak godina, otprilike 450.–430. pr. Kr., proveo u Ateni čekajući odštetu. Za to je vrijeme učio filozofiju i matematiku, te je postao najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.[16] Napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije*, koje je vjerojatno bilo osnova za prve četiri knjige EE. Znao je, a možda i dokazao, da se površine krugova odnose se kao kvadrati nad njihovim polumjerima[17] Hipokratu se pripisuje i uvođenje slova kao oznaka u geometrijskim dijagramima [10, 26, 52, 103].

Hipokrat je prva osoba koja je točno odredila kvadraturu (koristimo ovaj izraz jer se *ne* radi o računanju površine, nego o tome ekvivalentnoj geometrijskoj konstrukciji) nekog lika obrubljenog krivuljama. Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga Hipokrat je naime otkrio da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju **Hipokratovi mjeseci**. Geometrijski gledano, mjesec je lik omeđen lukovima dviju ekscentričnih kružnica različitih polumjera, a ako se mjesec može kvadrirati ravnalom i šestarom, nazivamo ga Hipokratovim. Sam Hipokrat je otkrio, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca, a danas je poznato da ih ima pet.[18] Mi ćemo ovdje opisati samo prvi tip, a za preostale i dokaz da ih ima točno pet upućujemo na ovaj link. Prvi Hipokratov mjesec je mjesec omeđen kružnicom k_1 kojoj je polumjer kateta pravokutnog jednakokračnog trokuta, a središte u vrhu s pravim kutom, te kružnicom k_2 čiji promjer je hipotenuza tog trokuta, tj. kružnicom opisanom tom trokutu (slika 4.9). Kvadrat nad hipotenuzom (promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad katetom trokuta (polumjerom od k_1). Budući da je polumjer pola promjera, to znači da je kvadrat nad hipotenuzom pola kvadrata nad promjerom kruga omeđenog s k_1. Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, što je, kako smo rekli, Hipokrat znao, slijedi da se površina kruga nad hipotenuzom prema površini kruga omeđenog s k_1 isto odnosi kao $1 : 2$, pa se tako odnose i odgovarajući polukrugovi. Stoga polukrug nad hipotenuzom ima jednaku

[16] Ne valja ga miješati sa suvremenikom i imenjakom, liječnikom Hipokratom s Kosa.

[17] Najstariji sačuvani dokaz nalazimo u EE.

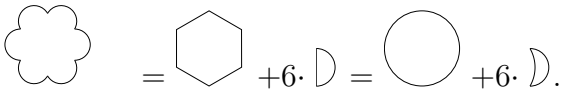
[18] Preostala dva su otkrivena u 18. st. (M. J. Wallenius), a u 20. st. je dokazano da nema drugih (N. G. Čebotarev, A. V. Dorodnov).



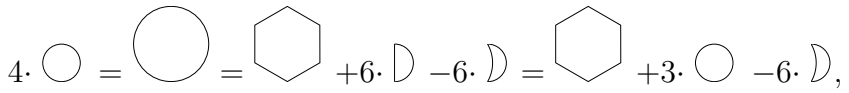
Slika 4.10: Veza mjesecâ i kvadrature kruga.

površinu kao isječak koji je četvrtina kruga omeđenog s k_1. Površina mjeseca (crveno na slici 4.9) je očito zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjena za spomenuti isječak u krugu omeđenom s k_1, pa slijedi da prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen. Budući da se trokut (kao i svaki drugi uglati lik, što ćemo kasnije i pokazati) može kvadrirati ravnalom i šestarom, opisani mjesec je stvarno Hipokratov mjesec [10, 26, 52, 103].

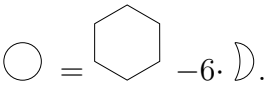
Prema više izvora, Hipokrat je bio svijestan da svojim otkrićem mjeseca koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom nije riješio problem kvadrature kruga. No, neki navode sljedeće krivo zaključivanje kao, možda, njegovo. Pogledajmo pravilni šesterokut s opisanom kružnicom i ucrtanim polukružnicama nad svim njegovim stranicama (slika 4.10). Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta (tj. promjeri malih polukružnica), pa se površine malih i velikih krugova se odnose $4 : 1$. Stoga vrijedi sljedeći „geometrijski račun": Prvo uočimo da je



Stoga je



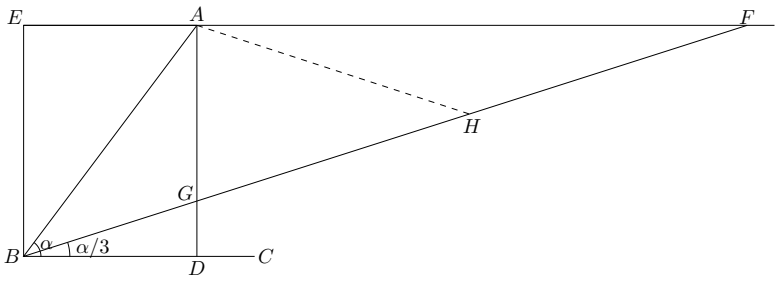
pa je



Dakle, kad bi se mjeseci sa slike 4.10 mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug [10, 26, 52].

Zadatak 9 *Osmislite još jedan primjer mjeseca koji nije Hipokratov.*

Vezano za trisekciju kuta, Hipokrat je otkrio sljedeću u praksi lako provedivu „mehaničku" trisekciju kuta. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ kojeg treba podijeliti na trećine (slika 4.11). Prvo konstruiramo okomicu iz A na krak BC, neka joj je nožište D. Zatim ADB dopunimo do pravokutnika $ADBE$ i produljimo dužinu $\overline{EA}$ na strani od A. Sljedeći korak nije provediv ravnalom i šestarom, ali u praksi jest izvediv: Na tom produljenju AE nađe se točka F takva da je $|FG| = 2|AB|$, gdje je $G = BF \cap AD$. U tom slučaju je



Slika 4.11: Hipokratova trisekcija kuta.

$\angle FBC = \frac{\alpha}{3}$. Naime, po konstrukciji je $|AB| = |HF| = |HG|$, dakle je $\triangle AFH$ jednakokračan (AH je težišnica u pravokutnom trokutu $\triangle GAF$ pa ga dijeli na dva jednakokračna trokuta) i posljedično $\triangle ABH$ jednakokračni trokut. Stoga je $\angle FAH = \angle AFH = \phi$ te je kao vanjski kut trokuta $\triangle AFH$ kut $\angle AHB = 2\phi$, ali je i $\angle ABF = \angle AHB = 2\phi$. Naposlijetku, uočimo da je AB transverzala (presječnica) paralelnih pravaca EA i BC. Stoga je $\angle FBC = \angle AFB = \phi$. Dakle, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 2\phi + \phi = 3\phi$, dakle je ϕ rješenje problema [10, 26].

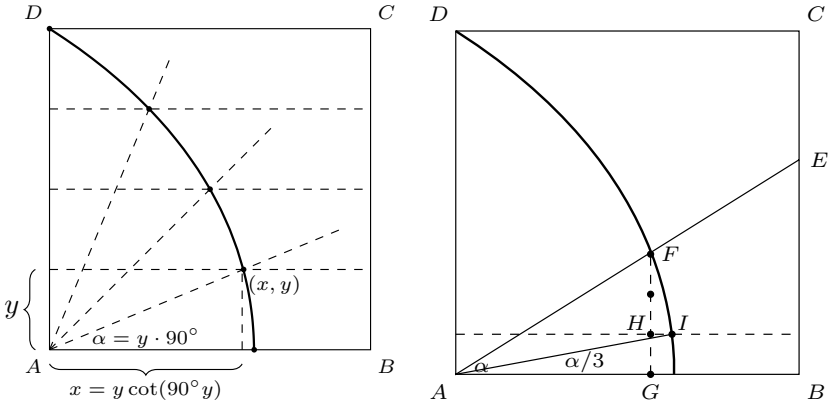
Hipokratov doprinos problemu udvostručenja kocke možda se čini najjednostavnijim od njegovih doprinosa trima klasičnim problemima, no pokazao se najvažnijim. Prvo definirajmo: **Srednje geometrijske proporcionale** između *istovrsnih* veličina a i b su njima istovrsne veličine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hipokrat je uočio da se kocka brida a može udvostručiti točno ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$. Danas to lako algebarski potvrđujemo: Iz $a : x = x : y = y : (2a)$ slijedi $2a\,x = y^2$ i $a\,y = x^2$ pa je $x^3 = 2a^3$. Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$ [10, 26, 52].

Istaknimo još trojicu grčkih matematičara iz 5. st. pr. Kr. Prvi od njih zapravo nije bio matematičar, nego državnik i filozof sofist **Hipija iz Elide** (ca. 460.–400. pr. Kr.). Za život je zarađivao putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga je kasnije opisao kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Jedini bitni matematički doprinos mu je otkriće krivulje **kvadratise** (**trisektrise**), koja se može iskoristiti i za kvadraturu kruga i trisekciju kuta (zapravo, za podjelu kuta na bilo koji broj jednakih dijelova), ali se sama ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Prema Papusu Aleksandrijskom, Hipijina kvadratisa nastaje dinamički. Polazište je kvadrat $\square ABCD$ (slika 4.12 lijevo). Zamislimo da u stranica $\overline{DC}$ pada jednoliko (stalnom brzinom) na stranicu $\overline{AB}$. U istom trenutku kad stranica $\overline{DC}$ počne padati, stranica $\overline{AD}$ počinje jednoliko rotirati oko A do pozicije $\overline{AB}$, u koju stiže u istom trenutku kad i $\overline{DC}$. U tom slučaju se u svakom trenutku pozicije stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$ sijeku u po jednoj točki (na slici 4.12 lijevo istaknute su pozicije nakon četvrtine, polovine i tri četvrtine ukupnog vremena gibanja stranica). Dobivene točke čine krivulju kvadratisu (trisektrisu) [10, 26, 52, 103].[19]

[19] Ako bismo ju gledali iz moderne perspektive, kao smještenu u Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u točki A i koordinatnim osima na pravcima AB i AD, onda se dio krivulje u prvom kvadrantu sastoji od točaka $(x, y) = (y\mathrm{ctg}\,(90°y), y)$.



Slika 4.12: Hipijina kvadratisa (trisektrisa).

Opišimo kako iskoristiti kvadratisu, tj. trisektrisu, za trisekciju kuta. Neka je zadan kut α, kojeg unesemo u kvadrat kao $\angle BAE$ (slika 4.12 desno). Neka je F presjek kvadratise i kraka AE (tu točku ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Iz F povućemo okomicu na AB, njeno nožište neka je G. Dužinu $\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela, neka je $|FH| : |HG| = 2 : 1$. Kroz točku H povućemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom (ni točku I ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Onda je $\angle IAB = \frac{\alpha}{3}$, što slijedi direktno iz definicije kvadratise (u istom vremenu padajuća stranica prijeđe trećinu puta kao rotirajuća trećinu kuta) [10, 26, 52].

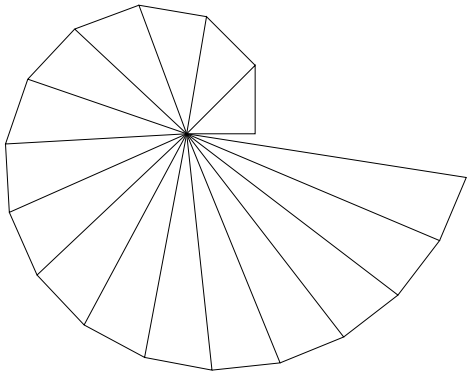
Hipijin suvremenik bio je **Teodor iz Kirene** (ca. 465.–398. pr. Kr.). Poznat je po tome što je bio učitelj Platona i Teeteta Atenskog. Iz Platonovog dijaloga *Teetet* saznajemo da je Teodor dokazao o

> stranicama kvadrata od tri kvadratne jedinice i od pet kvadratnih jedinica, da one nisu izmjerive jediničnom duljinom. Tako je prošao sve kvadratne korijene pojedinačno do kvadrata od sedamnaest kvadratnih jedinica, na kojem je stao.

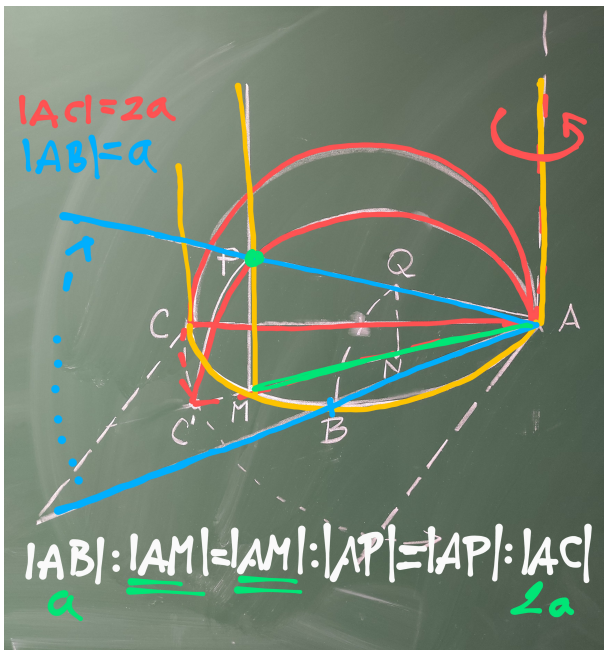
Vidimo dakle da iz moderne perspektive Platon Teodoru pripisuje dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$. Uočljivo je da ne spominje kvadrat površine dvije kvadratne jedinice — očigledno je nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata u to doba već bila opće poznata.[20] Razlog zašto je stao na kvadratu sa 17 kvadratnih jedinica nije poznat, ali jedna od popularnijih teorija je da je u pozadini **Teodorova spirala**. Ona nastaje tako da krenemo jednakokračnog pravokutnog trokuta koji je pola jediničnog kvadrata (dakle, hipotenuza mu je duljine $\sqrt{2}$). Sad se iterativno konstruiraju pravokutni trokuti tako da hipotenuza prethodnog postaje dulja kateta sljedećeg, a kraća kateta im je svima 1 (dakle, hipotenuze su redom duljina $sqrt3$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...), kao na slici 4.13. Pravokutni trokut hipotenuze duljine $\sqrt{17}$ je u takvoj konstrukciji zadnji koji se još ne preklapa ni s kojim od ranijih [10, 26, 40].

Spomenuti treba i **Arhitu iz Tarenta** (ca. 428.–350. pr. Kr.). On je bio vođa pitagorejske škole svog doba, koja je nakon ranijih političkih sukoba smanjena i svedena na zajednicu u gradu Tarentu. Arhita je bio Platonov prijatelj te je utjecao na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu problemu udvostručenja kocke na temelju Hipokratove ideje. Arhita je našao srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$ korištenjem presjeka

[20] Primijetimo da je stranica kvadrata površine dvije kvadratne jedinice isto što i dijagonala kvadrata površine jedne kvadratne jedinice.



Slika 4.13: Teodorova spirala.



Slika 4.14: Arhitina duplikacija kocke.

cilindra, konusa i torusa. Budući da u to doba koordinatni sustavi još nisu postojali (uvedeni su tek u 17. st., o tome kasnije), njegova je konstrukcija čisto geometrijska i vrlo impresivna te ćemo ju ukratko opisati [10, 26, 52].

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dužine između kojih želimo naći srednje geometrijske proporcionale (dakle, duljine su im a i $2a$, slika 4.14). Arhita zamišlja tri plohe opisane na sljedeći način. Prva je polucilindar promjera $\overline{AC}$ (žuto na slici 4.14). Nad $\overline{AC}$ (u ravnini okomitoj na osnovicu cilindra) konstruira se polukružnica, a njenom rotacijom oko izvodnice cilindra koja prolazi kroz A dobije se druga ploha, polutorus (crveno na slici 4.14). Naposlijetku, ako je B odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra (a tako da je $|AB| = \frac{1}{2}|AC|$) i ako je D presjek tangente na tu kružnicu povučene u C s pravcem AB, rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca AC dobije se konus (plavo na slici 4.14).[21] Neka je P točka presjeka

[21] Koristeći suvremenu analitičku geometriju, ako je A ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, x-os je pravac AC i z-os okomita na ravninu polukružnice ABC, jednadžbe tih triju ploha su redom $y = \sqrt{2a\,x - x^2}$), $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$. Rješavanjem tog sustava lako se pokaže



Slika 4.15: Pet Platonovih, zapravo Teetetovih, tijela.

tih triju ploha. Ona postoji jer polutorus siječe polucilindar duž neke krivulje, a ta krivulja onda negdje probada konus. Točka P se nalazi istovremeno na nekoj rotiranoj poziciji crvene polukružnice koja je generirala polutorus (neka je $\overline{AC'}$ odgovarajući promjer i M ortogonalna projekcija P na ravninu osnovice cilindra) i na nekoj rotiranoj poziciji plave izvodnice čijom rotacijom je nastao konus (neka je Q točka na toj izvodnici u kojoj se našla točka B i N njezina ortogonalna projekcija na ravninu osnovice cilindra). Iz te konstrukcije Arhita dalje razmatranjem geometrijskih odnosa izvodi da je

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|,$$

tj. $|AM|$ je rješenje problema duplikacije kocke brida $|AB|$ [52].

Spomenuli smo Platonov dijalog *Teetet*. On nosi ime po matematičaru **Teetetu Atenskom** (ca. 415.–369. pr. Kr.) koji je, koliko je poznato, bio prvi koji je konstruirao svih pet pravilnih poliedara (slika 4.15). Danas ih nazivamo i **Platonovim tijelima** jer ih je Platon opisao u dijalogu *Timej*, u kojem ih je povezao s četiri „elementa" (kocka — zemlja, oktaedar — zrak, tetraedar — vatra, ikozaedar — voda) i svemirom (dodekaedar) [10, 26, 103].

Platon je bio centralna figura znanosti atenskog razdoblja. Iako nije, koliko znamo, dokazao nikoji bitan matematički rezultat, on je iznimno značajan za povijest matematike. **Platon** (ca. 427.–347. pr. Kr.) je oko 387. pr. Kr. osnovao znamenitu Akademiju, na čijem je ulazu navodno pisao moto:

> Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Možda ste taj moto čuli s rječju matematika na mjestu geometrije, no tu se radi o moderniziranom smislu: Kao što ste zasigurno već primijetili, starogrčka matematika je u biti geometrija. Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. Platon razlikuje, primjerice, kvadrat (pravi, idejni) i kvadrat (nacrtani, postojeći u realnom svijetu). Platonistički pristup matematici podrazumijeva da matematičke istine postoje neovisno o tome jesmo li ih već otkrili, odnosno platonistički je stav da se matematika ne stvara, nego otkriva. Platon je također (čini se prvi) eskplicitno iskazao da se u geometriji treba koristiti što manje fizičkih pomagala — dozvoljeni su samo šestar i neoznačeno ravnalo [10, 26, 52, 103].

---

da je $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. prva koordinata presjecišta P ploha u standardno postavljenom cilindričkom koordinatnom sustavu, rješenje problema udvostručenja kocke brida a.

Stanimo na trenutak u napretku kroz stoljeća i osvrnimo se. Kao što smo vidjeli, prva civilizacija u kojoj su se matematičke tvrdnje počele dokazivati deduktivno, iz definicija, aksioma i već dokazanih tvrdnji, bila je antička Grčka. Prvi dokazi možda potječu još od Talesa, a zasigurno najkasnije od pitagorejaca. U taj razvoj uključio se Platon, koji je prvi jasno iskazao zahtjev strogih definicija i dokaza u matematici (geometriji) [10, 52, 103].

Platonov učenik (i učitelj Aleksandra Makedonskog) **Aristotel** (384.–322. pr. Kr.), iako ne posebno zainteresiran za matematiku, kroz temelje opće logike postavio je i temelje matematičke logike. Također, Aristotel je pojmu matematika dao moderno značenje. Osvrnimo se na osnovne za matematiku bitne crte Aristotelove logike. Aristotel je razlikovao dvije vrste logičkog zaključivanja: indukciju i dedukciju. **Indukcija** je zaključivanje s pojedinačnog na opće i Aristotel je uočio da ona bez dodatnih logičkih uvjeta ne mora dati istinit zaključak. S druge strane, za Aristotela je **dedukcija** (kod njega pod nazivom **silogizam**) argument kojim se iz određenih *istinitih* premisa (pretpostavki) logičkom nužnošću dobiva istinit zaključak (konkluziju) različit od premisa. Uočimo da je to različito od modernog pojma dedukcije, u kojem nije nužna istinitost premisa (a ima i drugih razlika). Premise i konkluzija u silogizmu su kategorički sudovi: iskazi koji se sastoje od *kvantora* (svaki, nikoji, neki) i *subjekta* S, koji je s *predikatom* P povezan *kopulom*, te eventualno negacije kopule. Aristotel razlikuje četiri tipa kategoričkih sudova: „Svaki S je P" (univerzalno afirmativni), „Nikoji S nije P" (univerzalno negativni), „Neki S su P" (partikularno afirmativni) i „Neki S nisu P" (partikularno negativni). Primijetio je da kategorički sudovi ne moraju imati jednoznačnu istinitosnu vrijednost, već da to ovisi o konkretnom smislu subjekta i predikata. **Tautologija** je kategorički sud koji je uvijek istinit, npr. „Svaki S je S", a **kontradikcija** je kategorički sud koji nikad nije istinit, npr. „Nikoji S nije S". **Silogizam** se sastoji od tri kategorička suda (dvije istinite *premise* i jedne *konkluzije*) uz uvjet u ta tri suda među njihovih šest subjekata i predikata imamo ukupno samo tri pojma, raspoređenih u jednu tri logičke figure silogizma:

1. (A B), (B C), (A C);
2. (A C), (B C), (A B);
3. (A B), (A C), (B C).

Ovisno o tipovima ta tri suda, konkluzija može i ne mora biti istinita.

Primjer 16 *Neka je prva premisa „Nikoja ptica nema četiri noge." Druga neka je „Nikoja patka nema četiri noge." Ta dva suda su forme (A C) i (B C), ali se silogizmom druge figure dobiva neistinita konkluzija (A B): „Nikoja ptica nije patka."*

No, ako je prva premisa „Nikoji čovjek nije patka.", a druga „Sve patke su pernate.", imamo dva suda formi (A B) i (B C) koji po prvoj figuri daju korektnu konkluziju „Nikoji čovjek nije pernat."

Spomenimo još i Aristotelove **zakone klasične logike**:

- Svaki S je S (princip identiteta).
- Svaki sud je istinit ili lažan (princip isključenja trećega).
- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan (princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike [10, 103].

Uz Hipokrata najznačajniji matematičar atenskog razdoblja bio je **Eudoks s Knida** (ca. 408.–355. pr. Kr.). Bio je filozof, matematičar, astronom i liječnik. Matematiku je studirao kod Arhite iz Tarenta. Najznačajniji matematički doprinosi su mu utemeljenje opće teoriju omjera i razmjera i metode ekshaustije (koja se temelji na Antifontovim indejama, ali ju je Eudoks precizirao). Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima", tj. spadaju i u prethodnike modernog infinitezimalnog računa [10, 26, 52, 103].

Eudoksova **teorija omjera i razmjera** opisana je u V. knjizi EE (cijeli njen sadržaj se pripisuje Eudoksu). i bila je posebno važna jer je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u geometrijske analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine. Primjerice, drugi korijeni $x = \sqrt{a\,b}$ se mogu analizirati kroz dvostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : b,$$

a treći korijeni $x = \sqrt[3]{a^2\,b}$ kroz trostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : y = y : b.$$

Primjer 17 *Već smo vidjeli da je rješenje problema duplikacije kocke, tj. ono što danas zapisujemo kao* $\sqrt[3]{2}$*, opisano trostrukim omjerom*[22] $1 : x = x : y = y : 2$ *kojeg trebaju zadovoljavati srednje geometrijske proporcionale.*

U 3.–6. definiciji u EEV vidimo kako je Eudoks definirao osnovne pojmove svoje teorije: **Omjer** (*lógos*) je odnos među iznosima dviju *istovrsnih* veličina. Za dvije veličine kažemo da imaju **omjer** ako je višekratnik jedne veći od druge (ovo je u biti ono što danas nazivamo Arhimedovim aksiomom), tj. $a, b > 0$ imaju omjer $a : b$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n\,b > a$ (iz čega je očigledno da a i b trebaju biti istovrsne). Za (istovrsne) veličine (uočimo da se ne zahtijeva sumjerljivost!) kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.[23] Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim). Pritom **razmjer**, tj. jednakost dvaju omjera, naziva *analogía* (logično je da nije koristio izraz *proportio*, zašto?). Propozicije u Eudoksove teorije omjera i razmjera, tj. propozicije u EEV, uključuju rezultate o aritmetici s veličinama, svojstva omjera i manipulacije razmjerima. Dok se prije Eudoksa moglo samo dokazati da neke dvije istovrsne veličine nisu sumjerljive te se eventualno moglo (tako primjerice Teetet analizira tzv. kvadratne iracionalnosti) uspoređivati njihove kvadrate ili kubove, koristeći Eudoksove produljene razmjere postalo je moguće direktno izvođenje zaključaka o veličinama koje bismo danas zvali n-tim korijenima [10, 52, 103].

Eudoksova **metoda ekshaustije** generalizira teoriju omjera i razmjera. Naziv je dobila u 17. st., a temelji se na:

[22] Zapravo, 1 i 2 uz neku jedinicu duljine, recimo 1 stopa i 2 stope.

[23] Tj. $a : b = c : d$ znači da za sve m i n: ako $m\,a < n\,b$, onda $m\,c < n\,d$; ako $m\,a = n\,b$, onda $m\,c = n\,d$; ako $m\,a > n\,b$, onda $m\,c > n\,d$.

Teorem 7 (Eudoksov princip ekshaustije EEX1) *Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.*

Suvremenim stilom zapisano: Ako su zadani brojevi $a > \varepsilon > 0$, te ako je niz pozitivnih brojeva (a_n) definiran tako da je $a_0 = a$ i $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$, onda postoji n_0 takav da e $\varepsilon > a_{n_0}$ (tj. $\lim a_n = 0$). Lako je uočiti da se princip ekshaustije temelji na spomenutoj definiciji kad dvije veličine imaju omjer, tj. Eudoksovoj izvornoj formulaciji kasnijeg Arhimedovog aksioma, koji je naziv dobio po tome što ga je u 3. st. pr. Kr. u svoje pretpostavke na početku djela *O kugli i valjku* uvrstio Arhimed iz Sirakuze. On ga je izrekao ovako:

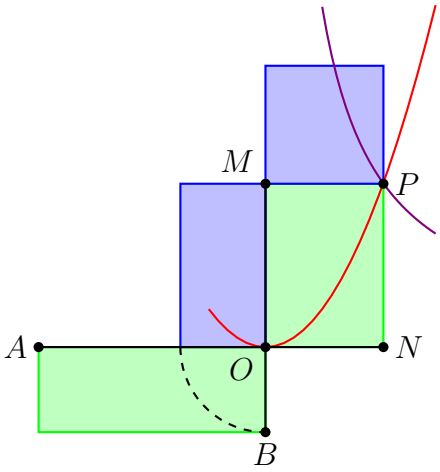
> Kod nejednakih linija, nejednakih ploha, nejednakih tijela[24] veća nadmašuje manju za veličinu, za koju se kad se one sebi pribraja može postići da nadmaši svaku određenu veličinu od onih koje su usporedive (s njom i međusobno).

To bi pak danas izgledalo ovako: Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ i za svaki $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n(a - b) > M$. Ta tvrdnja slijedi iz Eudoksove definicije (dokaz se može naći u sklopu dokaza EEV8), a i sâm Arhimed navodi da su njegovu pretpostavku, koju danas zovemo Arhimedovim aksiomom, koristili i raniji geometri, konkretno Eudoks. Zanimljivo je i da iako je Eudoks autor metode ekshaustije, Arhimed je bio matematičar koji ju se najviše i najpreciznije koristio i pomoću nje dokazao mnoge važne teoreme [10, 18, 52, 103]. O tome više kasnije.

U ovom odjeljku spomenut ćemo još samo jednog matematičara atenskog razdoblja, jer se njemu pripisuje otkriće jednog od standardnih školskih matematičkih sadržaja: konika. Bio je to **Menehmo** (ca. 380.–320. pr. Kr.). Prema Proklu, bio je Platonov prijatelj i Eudoksov učenik. Neki izvori ga navode kao učitelja Aleksandra Velikog, koji je Aleksandru na pitanje postoji li neki prečac za učenje geometrije navodno rekao: „O kralju, za putovanje zemljom postoje kraljevski putevi i putevi za običan puk, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve". Menehmo je otkrio **konike**, presjeke stošca ravninama, pokušavajući odrediti srednje geometrijske proporcionale između dvije duljine, tj. pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Tražene proporcionale uspio je naći u presjecima uspravnih kružnih stožaca s ravninama neparalelnim bazi. Za razliku od danas, kad sva tri tipa konika dobivamo presijecanjem jednog (ne nužno uspravnog) stošÂšca ovisno o kutu ravnine prema osnovici, Menhemo je gledao isključivo normalne presjeke uspravnih stožaca (presjeke ravninama okomitim na jednu izvodnicu stošca) pa je tipove konika dobio ovisno o kutu pri vrhu stošca: parabolu za pravokutni stožÂžac, elipsu za šiljastokutni, a hiperbolu za tupokutni. Menehmo im (vjerojatno) još nije dao nazive, ali mi ćemo koristiti nazive elipsa, parabola i hiperbola, koji su od Menehma mlađi nekih 100–150 godina (ime im je dao Apolonije iz Perge). Menhmo je ponudio dva načina nalaženja srednjih geometrijskih proporcionala, jedno pomoću presjeka parabole i hiperbole, a drugo pomoću presjeka dviju parabola. Oba rješenja su, naravno, opisana geometrijskom algebrom, a mi ćemo detaljno opisati samo prvo (drugo je stilski slično) [10, 26, 52, 103].

Za prvo Menehmovo rješenje uzmimo (vidi sliku 4.16) međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge. Pretpostavimo da je problem riješen, tj. da su nađene srednje geometrijske proporcionale između $|OA|$ i $|OB|$ i da su te proporcionale nanesene

[24] Kako vidimo, Arhimed je u klasičnom stilu geometrijske algebre geometrijske objekte poistovjećivao s njihovom mjerom, tj. ove nejednakosti se odnose na duljinu, površinu odnosno volumen.



Slika 4.16: Prvo Menehmovo rješenje problema duplikacije kocke pomoću konika.

kao $\overline{OM}$ na pravcu OB i kao $\overline{ON}$ na pravcu OA, dakle vrijedi $|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$ (ako je $|OA| = 2|OB|$, duljinom $|ON|$ je riješen problem duplikacije kocke čiji brid je duljine $|OB|$). Neka je P četvrti vrh pravokutnika $ONPM$. Teorija omjera i razmjera ($a : b = b : c \Leftrightarrow a\,c = b^2$) povlači da je pravokutnik sa stranicama duljina $|OM|$ i $|OB|$ jednak kvadratu nad $\overline{ON}$, a taj je pak jednak kvadratu (plavo na slici) nad $\overline{PM}$. Iz toga Menehmo temeljem uočenih svojstava presjeka pravokutnog stošca ravninom paralelnoj jednoj izvodnici zaključuje da je P točka parabole (crveno na slici) kojoj je O tjeme, os joj je MB, a $|OB|$ joj je ono što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*, tj. duljina tetive parabole okomite na os koja prolazi fokusom.[25] Nadalje, iz istog razmjera slijedi i da je $|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| \cdot |PN|$ (jednakost zelenih pravokutnika na slici), pa Menehmo zaključuje da je P ujedno i na hiperboli (ljubičasto na slici) sa središtem u O i asimptotama OM i ON.[26] Dakle, problem udvostručenja kocke bi se mogao riješiti ako bi se mogle konstruirati (ravnalom i šestarom) parabola (kojoj je *latus rectum* jednak duljini brida kocke koju želimo udvostručiti) te istostrana hiperbola (sa svojstvom da je za svaku njenu točku pravokutnik $ONPM$, tj. moderni $x\,y$, jednak dvostrukom kvadratu nad zadanim bridom kocke, jer je kod duplikacije kocke $|OA| = 2|OB|$). U tom slučaju samo bi trebalo odrediti točku P presjeka tih dviju krivulja, projicirati ju na pravac OA da dobijemo točku N i $|ON|$ bi bila tražena duljina brida kocke dvostrukog volumena [10, 26, 52, 103].

Atensko razdoblje grčke matematike ...

... je doba kad su postavljeni temelji matematike kao znanstvene discipline u kojoj se zaključci izvode deduktivno. Pritom je matematika ovog razdoblja čista geometrija, većinom u formi tzv. geometrijske algebre. Geometrijska algebra je moderni naziv za skup starogrčkih geometrijskih rezultata i problema koje je u suvremenoj matematici prirodnije opisivati algebarski. Pritom su se među mnoštvom problema istakla tri klasična problema (kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta), koja su kako danas znamo nerješiva, ali čiji pokušaji rješavanja su dali niz novih matematičkih rezultata. Najznačajniji matematičari ovog razdoblja su Hipokrat s Hiosa, koji se bavio sa sva tri

[25] Za parabolu koju danas opisujemo jednadžbom $x^2 = 2p\,y$ je $2p$ njezin *latus rectum*. Ako je $|OA| = a$, ovdje se radi o paraboli $x^2 = a\,y$, tj. *latus rectum* je a.

[26] To je istostrana hiperbola koju bismo danas opisali jednadžbom $x\,y = a\,b$, gdje je $a = |OA|$ i $b = |OB|$.

klasična problema i sveo problem duplikacije kocke na traženje srednjih geometrijskih proporcionala, te Eudoks s Knida, koji je utemeljio teoriju omjera i razmjera te metodu ekshaustije. Također, Hipokrat je opisao i konstrukcije kvadratura triju tipova likova zakrivljenih rubova, tzv. Hipokratovih mjeseca. Zanimljive i važne prijedloge rješenja za neke od triju klasičnih problema dali su Hipija iz Elide (krivulja koja se može iskoristiti za trisekciju kuta i kvadraturu kruga), Arhita iz Tarenta (konstrukcija srednjih geometrijski propoercionala presjekom konusa, cilindra i torusa) i Menehmo (koji je pokušavajući konstruirati srednje geometrijske proporcionale otkrio konike). Ostvaren je napredak i u analizi nesumjerljivih veličina (Teodor iz Kirene, Eudoks s Knida), osobito koristeći Eudoksovu teoriju omjera i razmjera. Platon je pak prvi jasno istaknuo važnost preciznih definicija i logičkih dokaza, a vjerojatno je i prvi koji je jasno iskazao zahtjev da konstrukcije budu izvedive šestarom i neoznačenim ravnalom. Aristotel je postavio temelje pravilnog logičkog zaključivanja kroz svoj silogizam (dedukciju) i zakone klasične logike. Također, u ovom su se razdoblju pojavila prva razmatranja infinitezimalnih veličina (Zenon, Demokrit, ali i Eudoks, osobito njegova metoda ekshaustije). U atenskom razdoblju stariji atički brojevni sustav postepeno je zamijenjen alfabetskim.

4.3 Helenističko razdoblje grčke matematike

4.3.1 Klasični helenizam

Matematički pojmovi u ovom odjeljku

*definicije i aksiomi * dedukcija * konstrukcije ravnalom i šestarom * planimetrija i stereometrija * pravac * mnogokut * krug i kružnica * ravnina * poliedar * kugla, valjak i stožac * proporcionalnost * sličnost * duljina, površina i volumen * omjeri i razmjeri * prirodni brojevi * teorija brojeva * djeljivost * prosti i složeni brojevi * iracionalni brojevi * geometrijski red*

U razdoblju 336.–323. pr. Kr., Aleksandar Veliki (Makedonski) osvojio je velike teritorije. Budući da mu je učitelj bio Aristotel, bio je pod jakim utjecajem grčke kulture, te je na područjima njegova carstva došlo do znatnog utjecaja grčke znanosti i kulture. Nakon njegove smrti carstvo se raspalo na manja carstva njegovih dijadoha, no sva s jakim utjecajem grčke kulture. Aleksandar je 331. pr. Kr. osnovao **Aleksandriju**, grad koji je do kraja antike postao i ostao glavni centar znanosti. Prvo razdoblje od njena osnutka do rimskih osvajanja (obično se uzima do osvajanja Egipta 30. g. pr. Kr.) poznato je kao klasični helenizam, dok nakon toga do pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. govorimo o postklasičnom (ili rimskom) helenizmu.

Glavni znanstveni centar cijelog helenizma bila je Aleksandrija. Za to je ključan bio **mouseion** („sjedište muza"), vrsta sveučilišta koje je sadržavalo znamenitu aleksandrijsku knjižnicu, koji je osnovan u Aleksandriji oko 300. g. pr. Kr., a čiji sadržaj je većim dijelom uništen u požaru pri rimskoj opsadi 48. pr. Kr. Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *museion*-u bio je **Euklid Aleksandrijski** (ca. 325.–265. pr. Kr.). O njegovom se životu gotovo ništa pouzdano ne zna.[27] Iza sebe je ostavio više djela no najznačajnije Euklidovo djelo su njegovi ***Elementi*** (EE), u originalu $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$, djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku.

Euklidov cilj bio je sistematizirati tada poznatu matematiku u 13 knjiga (veličine poglavlja).[28] No, iako u EE zapravo ne možemo naći svu matematiku jonskog i atenskog razdoblja (primjerice, nedostaju konike) te iako gotovo sigurno nijedan rezultat u EE nije izvorno Euklidov, ovo djelo je puno važnije zbog originalne kompozicije odnosno stila teksta, kojom je Euklid postavio temelj matematike kao egzaktne znanosti: Teoremi (propozicije) su u EE logički poredani tako da svaki slijedi *isključivo* iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji i definicija danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno. Euklidova ideja bila je izvesti svu matematiku iz malog broja početnih pretpostavki, aksioma i postulata (aksiomi su za Euklida više općematematičke, a postulati čisto geometrijske pretpostavke). U tome je bio toliko uspješan da su sve do 20. st. EE ostali apsolutni uzor matematičkog djela. Što se samog sadržaja tiče, on se pripisuje Euklidovim prethodnicima. Prve četiri knjige pripisuju se jonskom periodu, posebice pitagorejcima, te Hipokratu.. Sadržaj pete i šeste te dvanaeste knjige se pripisuje Eudoksu,. Sedma, osma i deveta knjiga se sadržajno pripisuju pitagorejcima. Jedanaesta knjiga također uglavnom sadrži rezultate iz jonskog perioda, a sadržaji desete i trinaeste knjige pripisuju se Teetetu [2, 10, 52, 103].

Prva knjiga EE, EEI, započinje s 23 definicije te po pet aksioma i postulata. Dodatne definicije nalaze se i na početcima većine ostalih knjiga. Prva Euklidova definicija glasi:

[27] Neki povjesničari su čak argumentirali da nije postojao, već da su *Elementi* djelo grupe autora. To se ipak smatra nevjerojatnim, jer se radi o iznimno ujednačenom i originalnom djelu.

[28] U postklasičnom razdoblju dodane su im još dvije knjige, ali bez stvarnog matematičkog značaja.

Točka je ono što nema dijela.

Vidljivo je da Euklidove definicije još nisu precizne definicije u modernom smislu riječi, već su više opisi pojmova s kojima se dalje bavi. Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposlijetku u 23. definiciji **paralelni pravci**:

Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji se, ako ih u oba smjera neograničeno produljimo, nikad ne susreću.

Slijedi pet Euklidovih **postulata**:

1. Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
2. Proizvoljno produljiti dužinu.
3. Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
4. Svi pravi kutovi[29] su jednaki.
5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produljee) na toj strani sijeku.

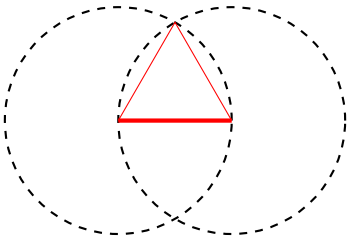
Uočimo da prva tri Euklidova postulata *de facto* definiraju što je dopustivo u konstrukcijama ravnalom i šestarom. Četvrti postulat je temelj mjerenja kutova, jer se kod Euklida svi kutovi opisuju uspoređivanjem s pravim kutem. Peti postulat, poznat kao **postulat o paralelama**, je vidno bitno kompliciraniji od ostalih postulata i aksioma, a uz to se jedini odnosi na neograničeno, potencijalno nedostupno, područje ravnine. To, a uz to i činjenica da se taj postulat koristi tek u dokazu EEI29 (propozicija o kutovima uz transverzalu paralelnih pravaca), već je u Euklidovo doba izazvala pozornost i mnogi su se matematičari od tada pa sve do 19. stoljeća pitali je li taj postulat možda ipak teorem, dokaziv iz definicija i ostalih postulata i aksioma. Tek se u 19. stoljeću, s otkrićem neeuklidskih geometrija (o čemu ćemo kasnije više reći), pokazati da se stvarno radi o postulatu, koji se doduše može zamijeniti raznim ekvivalentnim formulacijama, a zamjena njegovom negacijom dovodi do drugačijih, ali smislenih geometrija. Primijetimo također da ovaj postulat u svojoj izvornoj formulaciji *ne* tvrdi da paralele postoje, odnosno on je ekvivalentan postojanju najviše (a ne točno) jedne paralele s danim pravcem kroz danu točku. Stoga je taj izvorni oblik postulata o paralelama konzistentan ne samo s uobičajenom euklidskom geometrijom, već i sa sfernom, čiji će temelji biti postavljeni u postklasičnom razdoblju helenizma.

Zatim dolazi pet Euklidovih **aksioma**:

1. Dvije stvari koje su jednake[30] trećoj su i međusobno jednake.
2. Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.
3. Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
4. Ono što se podudara je jednako.

[29] Euklid pravi kut u 10. definiciji definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

[30] Podsjetnik: Misli se na jednakost po mjeri, a ne na sukladnost!



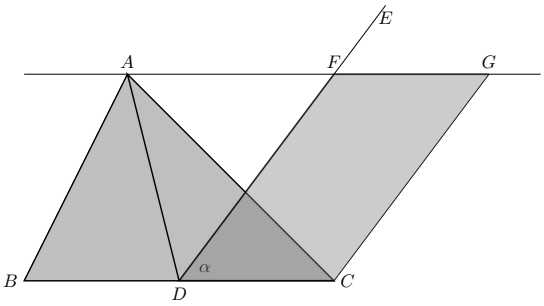
Slika 4.17: Konstrukcija jednakostraničnog trokuta prema EEI1

5. Cjelina je veća od dijela.

Pregled sadržaja EE po knjigama je sljedeći (u zagradama su navedeni brojevi definicija plus brojevi propozicija u pojedinoj knjizi):

1. EEI: elementarna planimetrija (23+48);
2. EEII: geometrijska algebra (2+14);
3. EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);
4. EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
5. EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
6. EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
7. EEVII: djeljivost u $\mathbb{N}$ (22+39);
8. EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
9. EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
10. EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
11. EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
12. EEXII: primjena ekshaustije u geometriji (0+18)
13. EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

U nastavku ćemo predstaviti neke odabrane definicije i propozicije iz tih knjiga, no naravno podsjećamo da smo se s nekima već susreli u prethodnom dijelu gradiva. Prva propozicija u EE, EEI1, glasi „Konstrukcija jednakostraničnog trokuta zadane duljine stranice“. U dokazu, Euklid (koristeći 1. aksiom, 1. i 3. postulat i 15. i 20. definiciju) argumentira da konstrukcija sa slike 4.17 stvarno daje jednakostranični trokut. U propozicijama EEI9 i EEI10 Euklid opisuje standardne konstrukcije bisekcije (raspolavljanja) kuta i dužine, u EEI11 i EEI12 opisuje konstrukcije okomice na pravac kroz zadanu točku (na odnosno izvan pravca), a u EEI31 je dana konstrukcija paralele kroz zadanu točku izvan pravca. Prva propozicija koja zahtijeva korištenje postulata o paralelama je, kako smo već spomenuli, EEI29: „Ako pravac siječce dva paralelna pravca, onda on s njima tvori jednake izmjeničcne kutove, vanjski kut odgovara unutrašsnjem s iste strane i



Slika 4.18: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu (EEI42).

dva unutrašnja kuta s iste strane su[31] jednaka dvama pravim kutovima“. Potkraj EE1 nalazimo propozicije temeljem kojih (u kombinaciji s EEII14) slijedi da se svaki uglati lik u ravnini može kvadrirati ravnalom i šestarom. Pogledajmo te propozicije malo detaljnije.

Propozicija 1 (EEI42) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu.*

U ovoj propoziciji dokazana je korektnost sljedeće konstrukcije. Neka je zadan $\triangle ABC$ te ravninski kut α (slika 4.18). Odredimo polovište D stranice $\overline{BC}$ trokuta i nanesimo kut α kao kut $\angle CDE$. Kroz A povucimo paralelu s BC, neka ona krak DE siječe u točki F. U C povucimo paralelu s DF, neka ona AF siječe u G. Tada je $CDFG$ paralelogram iste visine kao trokut $\triangle ABC$ i upola kraće osnovice, dakle taj paralelogram je jednak (po površini) danom trokutu.

Primijetimo da ako je α pravi kut EEI42 omogućuje pretvaranje (ravnalom i šestarom) svakog trokuta u pravokutnik iste površine.

Na tu propoziciju se nadostavlja EEI43, u kojoj se dokazuje jednakost (površina) sivih paralelograma na slici 4.19, ako je HI dijagonala paralelograma $JIGH$. Slijedi:

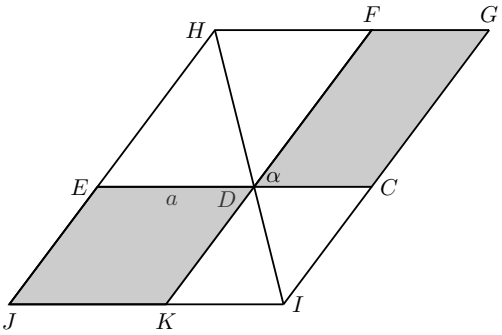
Propozicija 2 (EEI44) *Konstrukcija paralelograma jednakog zadanom trokutu ako mu je zadan kut i jedna stranica.*

Odgovarajuća konstrukcija je sljedeća. Prvo se pomoću EEI42 dani trokut pretvori u paralelogram $CDFG$ zadanog kuta. Sve njegove stranice produljimo u pravce (slika 4.19). Nanesimo zadanu duljinu stranice na pravac FG kao $\overline{FH}$. Povucimo pravac HD, neka je njegovo sjecište s pravcem CG točka I. Kroz nju povučemo paralelu s CD, a kroz H paralelu s DF, neka se one sijeku u J. Ako je E presjek CD s HJ, a K presjek DF s IJ, onda je prema EEI43 paralelogram $JKDE$ traženi paralelogram.

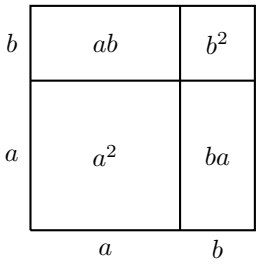
Propozicija 3 (EEI45) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom mnogokutu.*

Naime, očito se svaki mnogokut može rastaviti na trokute. Prvi od tih trokuta pretvorimo u paralelogram koristeći EEI42, te odaberemo jednu njegovu stranicu kao zadanu duljinu a. Sve ostale trokute pretvaramo u paralelograme s istim kutem kao prvi i jednom stranicom a koristeći EEI44. Sad imamo neki broj paralelograma koji imaju zajednički jedan kut i jednu stranicu, pa se mogu spojiti u jedan veći paralelogram zadanog kuta.

[31] Misli se: zbrojena.



Slika 4.19: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu i zadane duljine stranice (EEI44).



Slika 4.20: Kvadrat binoma: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (EEII4).

Uočimo dakle da sad znamo: Svaki mnogokut se može pretvoriti u pravokutnik. Propozicija koja omogućuje kvadraturu nalazi se u sljedećoj knjizi, EEII. **EEII** sadrži više zanimljivih propozicija. Primjerice, EEII4 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za kvadrat binoma (slika 4.20), a EEII5 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za razliku kvadrata (slika 4.21). Kao EEII11 nalazimo konstrukciju dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza (slika 4.22: $|BF|$ je duljina koja duljinu $|AB|$ dijeli u omjeru zlatnog reza).

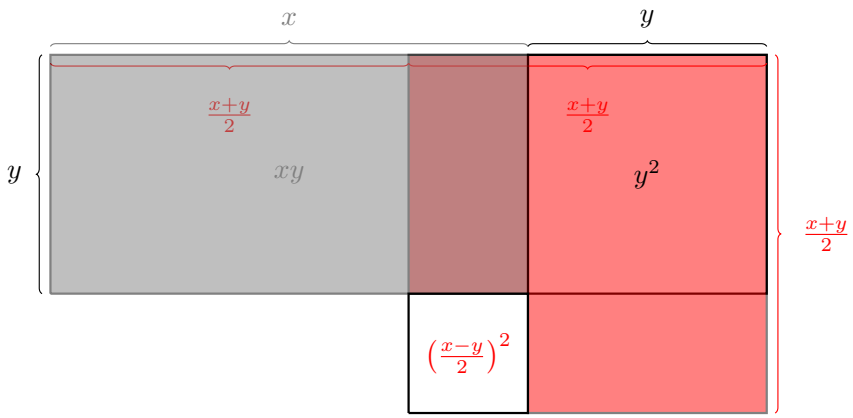
EEII12 i EEII13 u biti iskazuju kosinusov poučak bez (tada još nepoznate) trigonometrije — tamo gdje bismo danas pisali umnožak jedne stranice s kosinusom kuta, Euklid koristi površinu pravokutnika određenog tom stranicom i njenom projekcijom na drugu, tom kutu susjednu stranicu. Naposlijetku imamo:

Propozicija 4 (EEII14) *Kvadratura proizvoljnog mnogokuta.*

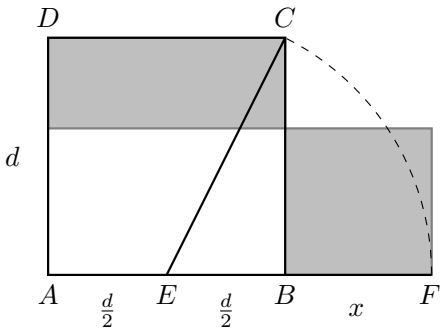
Prvo se kako je opisano u EEI44 mnogokut pretvori u pravokutnik $ABCD$ (slika 4.23). Zatim se konstruira kvadrat jednak tom pravokutniku: Produlji se dulja stranica pravokutnika (DC) na jednu stranu i na to produljenje se šestarom prenese kraća stranica (dakle, $|CB| = |CX|$). Zatim se nacrta polukružnica nad $\overline{DX}$. Produljimo BC do sjecišta F s tom polukružnicom. Tada je $\overline{CF}$ stranica kvadrata jednakog pravokutniku $ABCD$,[32] dakle i polaznom mnogokutu.

Iz **EEIII** ističemo samo dvije propozicije. Prva je EEIII1 u kojoj se konstruira središte zadane kružnice. Euklid polazi od proizvoljne tetive kružnice, konstruira njezinu simetralu koja siječe kružnicu u dvije točke (krajevima jednog promjera) te je središte kružnice

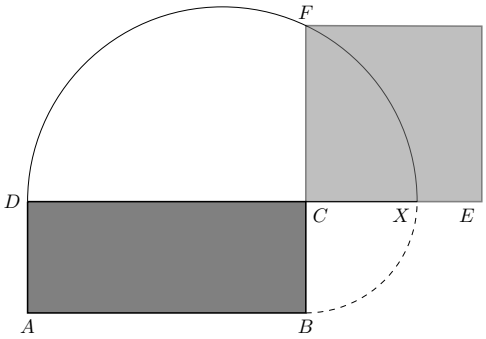
[32] To se lako pokaže pomoću EEII5 i Pitagorinog poučka, tj. EEI47.



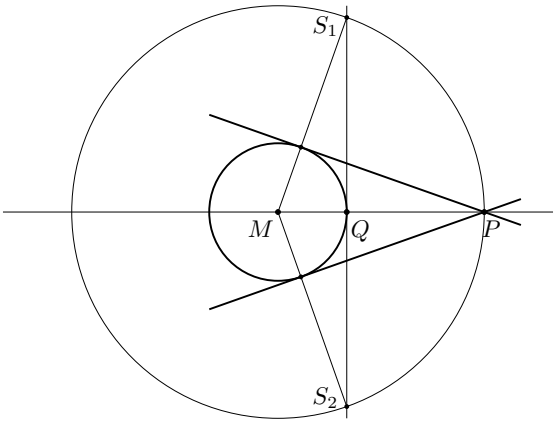
Slika 4.21: Razlika kvadrata: $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (EEII5).



Slika 4.22: Dijeljenje dužine u omjeru zlatnog reza (EEII11).



Slika 4.23: Kvadratura pravokutnika (EEII14).



Slika 4.24: Konstrukcija tangenti na kružnicu iz točke izvan kružnice (EEIII17).

polovište tog promjera. Druga zanimljiva propozicija je EEIII17 u kojoj Euklid daje konstrukciju tangenti na danu kružnicu (središta M) iz točke P izvan nje (slika 4.24). Prvo se povuče pravac MP, on siječe kružnicu u točki Q. Zatim se nacrta kružnica središta M i polumjera $|MP|$. U Q se povuče okomica na MP, koja u prethodnom koraku nacrtanu kružnicu siječe u S_1 i S_2. Te dvije točke spojimo s M, sjecišta tih spojnica s polaznom kružnicom su dirališta traženih tangenti.

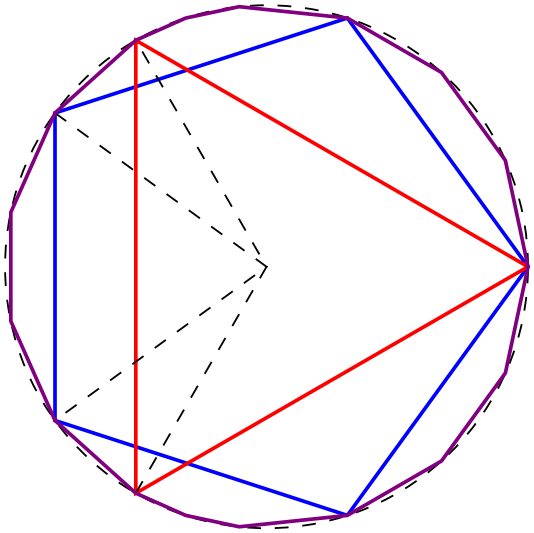
U **EEIV** nalazimo standardne konstrukcije pravilnih mnogokuta, većinom iste kakve i danas znamo.[33] Ovdje se ipak ističe sljedeća propozicija, koja je bila vrhunac u konstrukcijama pravilnih mnogokuta sve do Gaußa, koji je 1796. otkrio konstrukciju pravilnog 17-erokuta.

Propozicija 5 (EEIV16) *Konstrukcija pravilnog 15-erokuta upisanog kruž nici.*

Prvo se konstruiraju pravilni trokut i peterokut upisani u kružnicu, ali tako da im je jedan vrh zajednički (crveno i plavo na slici 4.25). Tada je spojnica jednog od druga dva vrha trokuta s njemu najbližim vrhom peterokuta stranica pravilnog 15-erokuta (ljubičasto na slici 4.25). Naime, ako ucrtamo odgovarajuće polumjere na obje strane (crtkano na slici 4.25), dobijemo dva jednaka kuta koji su u zbroju očigledno razlika središnjih kutova pravilnog trokuta i peterokuta, tj. zbroj ta dva kuta je razlika trećine i petine četverostrukog pravog (tj. punog) kuta, što je točno $\frac{2}{15}$ punog kuta, dakle je središnji kut koji odgovara opisanoj ljubičastoj stranici točno središnji kut pravilnog 15-erokuta.

Glavne crte sadržaja **EEV** već smo opisali kod Eudoksa, pa prelazimo na **EEVI**. Ovdje ističemo 1. definiciju: Dva uglata lika zovemo **sličnima** ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne. Propozicija EEVI2 je u biti Talesov poučak o proporcionalnosti: Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta. Ta se propozicija koristi za konstrukciju podjele dužine na bilo koji određeni broj jednakih dijelova (EEVI9) te za konstrukciju dužine duljine x takve da je $a : b = c : x$ (tzv. četvrte proporcionala triju dužina, EEVI12). U EEVI13 je dana konstrukcija srednje proporcionale dviju dužina, tj. duljine x takve da je $a : x = x : b$ ako su zadane duljine a, b, c (to je u

[33] Euklidova konstrukcija pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu je kompliciranija je od danas uobičajene, koju je osmislio H. W. Richmond, 1893.



Slika 4.25: Konstrukcija pravilnog 15-erokuta (EEIV16).

biti konstrukcija iz EEII14). René Descartes je u 17. st. uočio da se navedene propozicije mogu koristiti za množenje, dijeljenje i korjenovanje duljina (tako da rezultat oper bude duljina). Drugim riječima: Nakon Descartesa je poznato da se iz zadanih duljina a i b mogu ravnalom i šestarom konstruirati duljine $a+b$, $a-b$, $a\,b$, a/b i $\sqrt{a}$. O tome više kasnije.

Među, vjerojatno pitagorejskim, sadržajima iz teorije brojeva u **EEVII**, **EEVIII**, **EEIX**, ističemo sljedeće. U 11., 12. i 13. definiciji u EEVII Euklid definira: **Prost broj** je broj koji se može izmjeriti samo *jedinicom*. Dva broja su **relativno prosta** ako je jedinica jedina njihova zajednička mjera. **Složen broj** je broj koji se može izmjeriti[34] drugim brojem. U EEVII2 opisan je Euklidov algoritam ($\alpha\nu\theta\upsilon\varphi\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$) za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj. U EEVIII nalazimo razne propozicije o omjerima i razmjerima prirodnih brojeva, a u EEIX mnoge klasične propozicije teorije brojeva, primjerice EEIX14 je parcijalni osnovni teorem aritmetike:[35] Najmanji zajednički višekratnik nekih prostih brojeva nije djeljiv ni s kojim drugim prostim brojem osim njih. Posebno je poznat **Euklidov teorem (o prostim brojevima)**

Propozicija 6 (EEIX20) *Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva.*

Euklidov dokaz je u biti isti kao moderni. Ako imamo neke proste brojeve (Euklid ih uzima tri), uzmemo njihov najmanji zajednički višekratnik, dodamo mu 1. Tako smo dobili prost ili složen broj. Ako je prost, očito je veći od svih prostih brojeva od kojih smo krenuli, dakle imamo novi. Ako je složen, onda ima neki djelitelj, ali taj ne može biti nikoji od polaznih prostih brojeva jer bi onda taj morao mjeriti i jedinicu, dakle smo opet našli novi prosti broj.

[34] Podsjećamo na već kod pitagorejaca opisan smisao izraza 'izmjeriti', koji danas obično zamjenjujemo s 'podijeliti'.

[35] U punoj općenitosti taj teorem dokazat će tek 1801. Gauß.

Ugrubo rečeno, **EEX** se bavi preoblikovanjem **kvadratnih iracionalnosti**,[36] tj. veličina koje bismo danas opisivali kao brojeve oblika $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ s $a, b \in \mathbb{Q}$.[37] U ovoj knjizi definicije ne nalazimo samo na početku, nego i uz mnoge kasnije propozicije. Sadržaj ove knjige je jako teško izložiti, a o smislu mnogih propozicija i razlozima velikog opsega ove knjiga postoje i razilaženja. Ipak, vrijedi istaknuti definicije vezane za **sumjerljivost** i nesumjerljivost. U prve četiri definicije EEX Euklid definira: Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive; dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi; ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne; ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Kako vidimo, Euklid je ovdje razlikovao racionalne duljine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj duljini bismo danas izrazili razlomkom ili drugim korijenom razlomka) i racionalne površine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj površini bismo danas izrazili razlomkom, dakle tu se pojam racionalnosti podudara s modernim smislom). U EEX2 Euklid karakterizira nesumjerljive veličine (usporedite s dijelom o pitagorejskom otkriću nesumjerljivih veličina): Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

U **EEXI** izlažu se temelji stereometrije. Sfera je u 14. definiciji definirana kao rotaciona ploha polukružnice oko njezina promjera. Među propozicijama nalazimo sve stanardne temeljne stereometrijske rezultate, primjerice dokazano je da je presjek dvije ravnine pravac, da su dva pravca okomita na istu ravninu paralelni, da su dvije ravnine okomite na isti pravac paralelne, ... Dokazano je i da je svaki prostorni kut sadržan u ravninskim kutovima čiji zbroj je manji od četiri prava kuta, te da se paralelepipedi iste visine (tj. njihovi volumeni) odnose kao njihove osnovice. U **EEXII** se na geometriju primjenjuje metoda ekshaustije. Istaknimo primjerice

Propozicija 7 (EEXII) *Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.*

Već smo spomenuli da je ova propozicija bar sadržajno vjerojatno bila poznata još Hipokratu s Hiosa. Uočimo i da je ona ekvivalentna postojanju konstante proporcionalnosti između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim promjerom (a stoga i polumjerom). Ovdje navodimo njen skraćeni dokaz, koristeći modernu notaciju. Neka su K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2. Pretpostavimo suprotno, tj. da kvadrati nad promjerima nisu u omjeru jednakom omjeru krugova (tj. njihovih površina): $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. Tada je omjer $d_1^2 : d_2^2$ jednak omjeru površine kruga K_1 i neke površine P koja je ili manja ili veća od površine kruga K_2. Ako je manja, onda je razlika $P(K_2) - P$ neka (pozitivna) površina. Sad Euklid u krug K_2 upisuje redom kvadrat, pravilni osmerokut, pravilni šesnaesterokut i t.d., gledajući razliku površina upisanog lika i kruga (uniju kružnih odsječaka). Koristeći Eudoksovu lemu zaključuje da će nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti manja od $P(K_2) - P$. To znači da je odgovarajući upisani mnogokut površine veće od P. Pravilni mnogokut s istim brojem stranica upisuje u krug K_1. Tada su ta dva pravilna mnogokuta slična pa im se (prema prethodno dokazanoj propoziciji EEXII1) površine P_1 i P_2 odnose kao kvadrati nad dijagonalama (tj. promjerima krugova). No, $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, pa je $P(K_1) : P_1 = P : P_2$. Budući da je K_1 veći od u

[36] Podsjećamo da EEX1 sadrži Eudoksovu lemu o ekshaustiji. Ta se propozicija dalje ne koristi u ovoj knjizi, nego tek u EEXII.

[37] Podsjećamo, korijeni nisu smatrani brojevima. No, x kojeg danas bilježimo kao $\sqrt{a} = \sqrt{1\,a}$ ekvivalentno je definiran tzv. dvostrukim razmjerom $1 : x = x : a$.

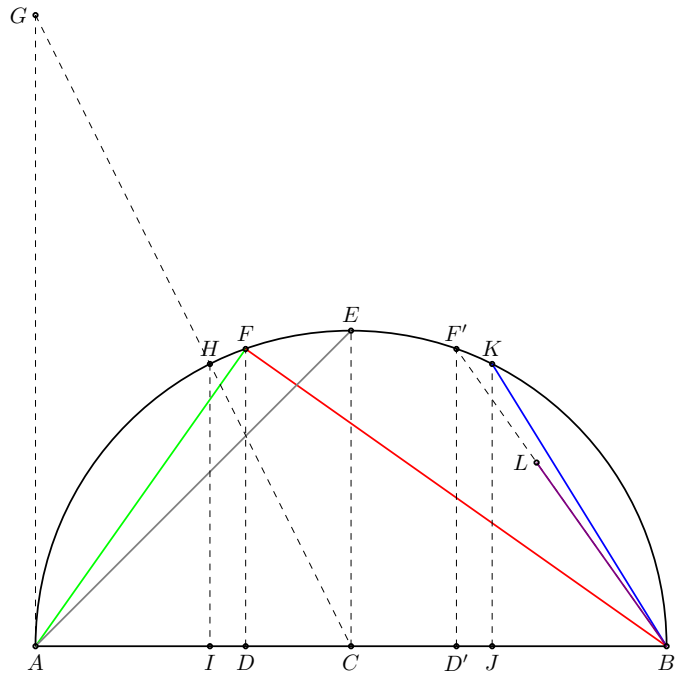
njega upisanog mnogokuta, imamo $P > P_2$ i istovremeno bi moralo biti $P < P_2$, što je nemoguće. Analogno se isključi mogućnost da je $P > P(K_2)$.

Dalje u EEXII imamo dokazano primjerice da se piramide istih visina odnose kao njihove baze, da se trostrana prizma može podijeliti na tri trostrane piramide istih volumena, da je stožac (po volumenu) trećina valjka iste baze i visine te da se valjci odnosno stošci jednakih baza odnose (po volumenu) kao njihove visine. Posljednja propozicija je EEXII18: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih dijametara. Dakle, Euklid je dokazao da postoji i proporcionalnost volumena kugle s volumenom kocke čiji brid je jednak promjeru (odnosno polumjeru) kugle. Naime, trostruki omjer od $A : B$ je u EEV definiran kao omjer $A : D$ ako je $A : B = B : C = C : D$ za neki C (usporedite sa srednjim geometrijskim proporcionalama između A i D!). Suvremenom algebrom lako vidimo da je $A : D$ trostruki omjer od $A : B$ ako je $A^2\, D = B^3$.

Naposlijetku, **EEXIII** sadrži konstrukcije bridova svih Platonovih tijela upisanih u istu sferu, te dokaz da nema drugih pravilnih poliedara. Ovdje navodimo konstrukciju (pojednostavljenu u odnosu na onu danu u EEXIII) bridova pravilnog[38] tetraedra, kocke, pravilnog okraedra, pravilnog dodekaedra i pravilnog ikozaedra. Neka je dan promjer sfere $\overline{AB}$ (slika 4.26). Ucrtajmo polukružnicu nad tim polumjerom, odredimo središte C te ucrtamo polumjer $\overline{CE}$ okomit na promjer $\overline{AB}$. Tada je $\overline{EA}$, alternativno $\overline{EB}$ (sivo na slici) brid pravilnog oktaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za bridove kocke i pravilnog tetraedra potrebno je $\overline{AB}$ podijeliti na tri jednaka dijela (točkama D i D'). Iz jedne od njih, recimo D, povuče se okomica na $\overline{AB}$ i odredi sjecište F te okomice s polukružnicom. Tada je $\overline{FA}$ (zeleno na slici) brid kocke, a $\overline{FB}$ (crveno na slici) brid pravilnog tetraedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za konstrukciju brida pravilnog ikozaedra potrebno je prvo konstruirati okomicu na $\overline{AB}$ u jednom od krajeva, recimo u A, te na nju nanijeti duljinu promjera da dobijemo točku G. Tu točku spojimo sa središtem C, ta spojnica siječe polukružnicu u točci H. Tada je $\overline{HA}$, odnosno, što je ekvivalentno, $\overline{KB}$ (plavo na slici) uz K osno simetričnu točki H s obzirom na CE, brid pravilnog ikozaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Naposlijetku, za pravilni dodekadar potrebno je točkom L u omjeru zlatnog reza podijeliti brid kocke ($\overline{F'B}$) te je $\overline{BL}$ (ljubičasto na slici) brid pravilnog dodekaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$ [2, 10, 52, 93, 103].

Prvi značajni matematičar nakon Euklida bio je **Eratosten iz Kirene** (ca. 275.–195. pr. Kr.). Osim matematikom i filozofijom, bavio se i poezijom, geografijom, astronomijom i teorijom glazbe. Oko 240. g. pr. Kr. postao je glavni knjižničar u *mouseionu*. Znamenito **Eratostenovo sito** za proste brojeve pripisao mu je neopitagorejac Nikomah iz Geraze početkom 2. st. A. D. Uz to, Eratostenu se pripisuju dva druga značajna matematička rezultata. Prvi od njih je iz područja matematičke geografije, a radi se o metodi određivanja opsega Zemlje. U to doba je kuglasti oblik Zemlje već bio opće poznat u grčkm znanstvenim krugovima. Eratosten je svoju metodu opisao u jednom danas izgubljenom djelu, koje je citiralo više kasnoantičkih autora. Eratosten je znao da na dan ljetnog solsticija u Syeni (današnji Aswan u Egiptu) Sunčeve zrake upadaju direktno u jedan bunar, dakle okomito na Syenu. Pretpostavio je da zbog velike udaljenosti Sunca od Zemlje možemo uzeti da Sunčeve zrake na Zemlju upadaju međusobno paraleno te je koristeći u zemlju zataknut ššta izmjerio kut pod kojim na isti dan Sunčeve zrake upadaju u Aleksandriju. Njegovo je mjerenje dalo da je taj kut $\frac{1}{50}$ punog kuta. Znajući da je Syene 5000 stadija južno od Aleksandrije, koristeći proporcionalnost središnje kuta u krugu s pripadnim lukom

[38] Naglašavamo 'pravilnog' jer je tetraedar poliedar s četiri strane, oktaedar tijelo s osam strana i t.d.



Slika 4.26: Konstrukcija bridova pet pravilnih poliedara upisanih u istu sferu (EEXIII).

kružnice zaključio je da je

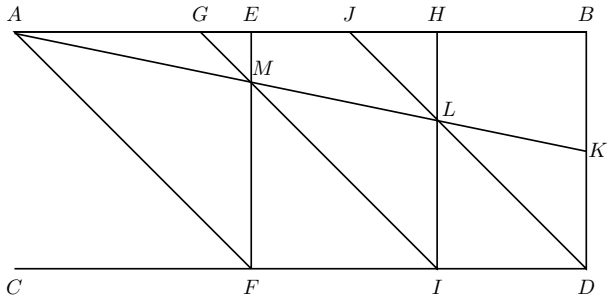
$$5000\,\text{stadij} : \text{opseg} = \frac{1}{50} : 1,$$

tj. da je opseg zemlje 250000 stadija. Koliko je to zapravo točno, danas je teško reći, jer se u Eratostenovo doba koristilo više tipova jedinice duljine stadij, pa ovisno o tome koji stadij uzmemo greška u odnosu na danas poznatu vrijednost prosječnog opsega Zemlje iznosi između 1 % i 16 %. Drugi znameniti matematički doprinos Eratostena bio je njegov mehanizam za određivanje srednjih geometrijskih proporcionala, tj. za rješavanje problema duplikacije kocke. Taj mehanizam, poznat pod imenom mezolabij, pripisan mu je temeljem jednog krivotvorenog Eratostenovog pisma za koje je utvrđeno da ipak neki njegovi dijelovi potječu iz Eratostenovih spisa. Mezolabij se sastojao od dvije paralelne jednako duge prečke AB i CD (slika 4.27) između kojih su postavljena tri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta AEF, GHI i JBD. Prva dva mogu slobodno kliziti između prečki, dok je posljednji, JBD, učvršćen. Neka je K polovište$\overline{BD}$. Ako se trokuti dovedu u položaj u kojem su A, presjek M vertikalne katete prvog i hipotenuze drugog trokuta, presjek L vertikalne katete drugog i hipotenuze trećeg trokuta te K na istom pravcu, onda očito vrijedi

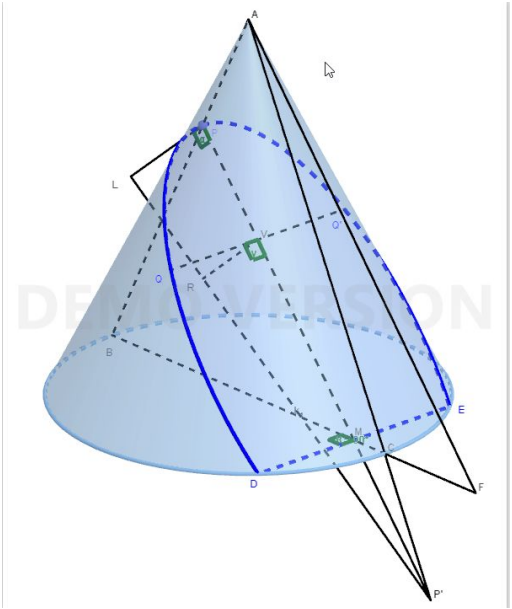
$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$

pa je $|IL|$ stranica kocke dvostrukog volumena od kocke brida duljine $|DK|$ [10, 53, 103].

Eratostenov suvremenik bio je znameniti **Apolonije iz Perge** (ca. 262.–190. pr. Kr.). Bio je matematičar i astronom, a poznat je i pod nadimkom „veliki geometar". Jedno vrijeme je boravio (studirao i predavao) u Aleksandriji. Najvažniji mu je doprinos prva potpuna teorija konika. Podsjetimo se: Konike je prvi razmatrao Menehmo, pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Za razliku od Menehma koji je razmatrao samo



Slika 4.27: Eratostenov mezolabij



Slika 4.28: Apolonijeva karakterizacija konika, osnovni pristup (slika izrađena programom Geogebra)

normalne presjeke uspravnih stožaca, Apolonije je razmatrao presjeke ne samo uspravnih, već i kosih stožaca, i to proizvoljnom ravninom. Apolonije je tako dobio sva tri tipa konika presijecanjem samo jednog stošca, a on im je i dao imena **elipsa**, **parabola** i **hiperbola**. Apolonijevo glavno djelo nosi naslov *Konike*. Sastojalo se od osam knjiga, od kojih su četiri sačuvane na grčkom jeziku, tri u arapskom prijevodu, a zadnja je izgubljena. Apolonije je u tim knjigama starije rezultate (Menehmove, Aristejeve, Euklidove) nadopunio vlastitim. U prvoj se knjizi opisuje generiranje konika i njihova osnovna svojstva, u drugoj osi, tangente i asimptote, u trećoj fokusi, pol i polara, u četvrtoj presjeci dvije konike, u petoj normale i središta zakrivljenosti, u šestoj sličnost konika, u sedmoj svojstva konjugiranih promjera. Sve tvrdnje dokazao je pomoću geometrijske algebre, što mnoge dokaze čini teško razumljivima za suvremenog čitatelja. Naravno, problem je bio u tome što u to doba još nije bilo analitičke geometrije. Ipak, mnogi Apolonijevi dokazi mogu se interpretirati kao korištenje specijalnih kosokutnih koordinatnih sustava (biranih relativno prema konici). Ovdje ćemo opisati samo način na koji je Apolonije razlikovao tri tipa konika, kako je opisao u prvoj knjizi *Konika* [10, 53].

Apolonije kreće od dvostrukog kosog stošca s vrhom A presječenog ravninom koja osnovicu siječe u $\overline{DE}$. Neka je $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ promjer osnovice (slika 4.28). Dalje, neka je P probodište izvodnice AB s ravninom i $M = \overline{DE} \cap \overline{BC}$. U nastavku Apolonije izvodi karakteristike triju tipova konika s obzirom na na njihov 'promjer' $\overline{PM}$. Za proizvoljnu tetivu konike $\overline{QQ'}$ paralelnu s $\overline{DE}$ Apolonije prvo dokazuje da ju PM raspolavlja (polovište označimo s V). Nadalje, kroz P u ravnini presjeka povlači paralelu s DE i na njoj bira točku L tako da zadovoljava određeni razmjer (ovisan o tome je li PM paralelno s AC ili ne, vidi niže). Nadalje, Apolonije povlači paralelu s BC kroz V (slike 4.29 i 4.30), njena sjecišta sa stočem neka su H i K. Tada H, Q, K i Q' leže na kružnici paralelnoj osnovici kojoj je $\overline{HK}$ promjer, a $\overline{QQ'}$ tetiva okomita na promjer koja ga siječ u V. Stoga je po Talesovom teoremu $\triangle HQK$ pravokutan i visina na hipotenuzu mu je $\overline{QV}$ pa vrijedi

$$|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|. \tag{4.1}$$

Za slučaj parabole (slika 4.29), tj. ako je $PM \parallel AC$, L se bira tako da zadovoljava razmjer

$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|). \tag{4.2}$$

U tom je slučaju $\triangle PHV \sim \triangle ABC$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BC| : |AC|. \tag{4.3}$$

Nadalje, pravci PM i AC su paralelni i sijeku krakove kuta $\angle ABC$, pa vrijedi

$$|VK| : |PA| = |BC| : |BA|. \tag{4.4}$$

Sad imamo redom:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |PA|) = 4.3\&4.4$$

$$= |BC|^2 : (|AB| \cdot |AC|) = 4.2 = |PL| : |PA| = (|PL| \cdot |PV|) : (|PA| \cdot |PV|),$$

dakle za svaku točku Q na paraboli vrijedi

$$|QV|^2 = |PL| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ jednak je pravokutniku određenom s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$,[39]š što je uzrok naziva $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$ (u slobodnom prijevodu 'biti poravnan').

Slučaj elipse i hiperbole dobivamo kad PM nije paralelno s AC, tj. kad PM siječe stožac u još jednoj točci P' (na izvodnici AC, slika 4.30). U tom slučaju se L bira tako da zadovoljava razmjer

$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2. \tag{4.5}$$

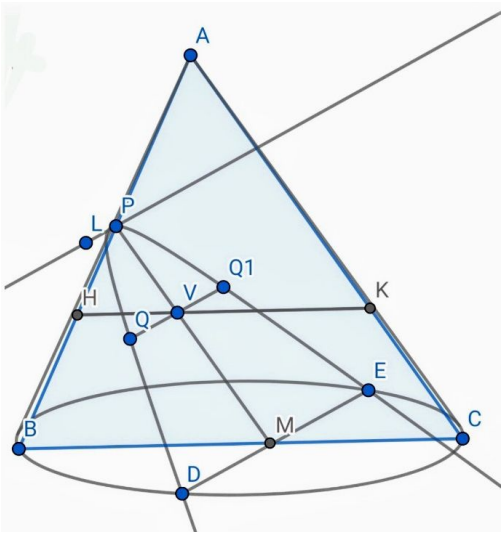
U ovom je slučju $\triangle PHV \sim \triangle ABF$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF|. \tag{4.6}$$

Također, $\triangle P'KV \sim \triangle ACF$ pa vrijedi

$$|VK| : |P'V| = |FC| : |FA|. \tag{4.7}$$

[39]Uočimo da ako bismo postavili pravokutni Kartezijev sustav s ishodištem u P, y-osi na pravcu PL i x-osi na pravcu PM, onda ova jednakost postaje jednadžba $y^2 = a\,x$.



Slika 4.29: Apolonijeva karakterizacija parabole

Sad imamo redom:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) = 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |P'V|) = 4.6\&4.7$$
$$= (|BF| \cdot |FC|) : |FA|^2 = 4.2 = |PL| : |PP'| = (\triangle PLP' \sim \triangle VRP') =$$
$$= |RV| : |P'V| = (|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|),$$

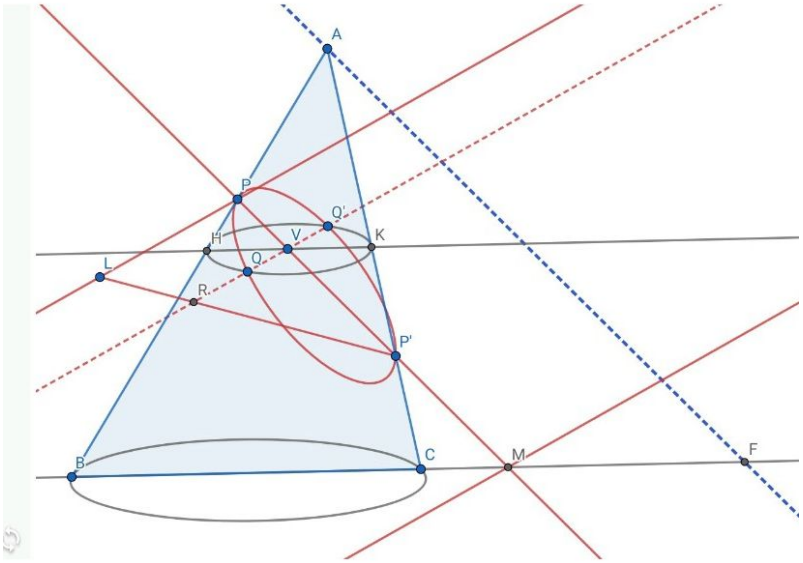
dakle za svaku točku Q na elipsi odnosno hiperboli vrijedi

$$|QV|^2 = |RV| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ je manji ili veći od pravokutnika određenog s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$. Zbog tog su ove krivulje dobile nazive *έλλειψις* (u slobodnom prijevodu 'ono s manjkom') i *ύπερβολή* (u slobodnom prijevodu 'ono s viškom') [53].

Po Apoloniju nosi ime i znameniti **Apolonijev problem**. Iskazao ga je u danas izgubljenom tekstu *O dodirima*, a glasi: Za dane tri kružnice u ravnini treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju. Pritom kružnice mogu biti i degenerirane (točke, tj. polumjera 0, ili pravci, tj. polumjera $+\infty$). O Svaka od tri zadane kružnice može biti točka, „prava“ kružnica ili pravac pa dobivamo deset mogućih slučajeva Apolonijevog problema. Najjednostavnija dva imamo kad su sve tri zadane kružnice točke ili kad su sve tri pravci. U prvom od njih rješenje je kružnica kroz tri točke (kružnica opisana trokutu), a u drugom je kružnica koja dira tri pravca (kružnica upisana trokutu). Ta dva slučaja znao je riješiti još Euklid (EEIV4 i EEIV5). Za slučaj triju „pravih" kružnica rješenja se često nazivaju Apolonijevim kružnicama, no taj naziv ima i druga značenja (vidi niže). Apolonijevo rješenje pokušao je rekonstruirati krajem 16. st. F. Viète, koristeći konstrukcije ravnalom i šestarom (objavljeno 1600.), a njegov suvremenik i prijatelj A. van Roomen prvi je 1596. predložio novo rješenje u kom je središta rješenja našao presijecajući dvije hiperbole [102].

Kao što smo upravo rekli, pojam **kružnice, Apolonijeve** nije jednoznačn. Uz navedeno značenje kao rješenja Apolonijevog problema, pojavljuju se još tri. Jedno se odnosi na Apolonijevu definiciju kružnice: Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $k = |AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB.



Slika 4.30: Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole

Zadatak 10 *Dokažite da je Apolonijeva definicija kružnice ekvivalentna uobičajenoj. Ako je fiksiran iznos k, koliki je polumjer te kružnice?*

Ako promatramo familiju svih kružnica određenih gornjom definicijom za fiksne A i B, ali različite omjere k, te uz nju drugu familiju svih kružnica koje prolaze kroz A i B, može se dokazati da su te dvije familije međusobno ortogonalne i naziv Apolonijeve kružnice ponekad se odnosi upravo na te dvije familije kružnica. Posljednje, četvrto značenje naziva Apolonijeva kružnica odnosi se na kružžnicu koja izvana dodiruje sve tri pripisane kružnice trokuta [10].

Posljednji veliki matematičar klasičnog helenizma, po mišljenju mnogih ujedno i najveći primijenjeni matematičar prije Newtona, bio je **Arhimed iz Sirakuze** (ca. 287.–212. pr. Kr.). Poznate su mnoge anegdote o njemu i vezano za njih navodni citati: „Heureka!", „Ne dirajte moje krugove!", „Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!", ... Jedno je vrijeme boravio u Aleksandriji i tamo upoznao Eratostena, s kojim se kasnije nastavio dopisivati. Za vrijeme rimske opsade Sirakuze konstruirao je obrambena sredstva, ali je i ubijen kad su Rimljani zauzeli Sirakuzu. Mnoga Arhimedova djela sačuvana su bilo u grčkom originalu, bilo u arapskom prijevodu: *O mjerenju kruga*, *O kugli i valjku*, *O spiralama*, *O kvadraturi parabole*, *O ravnoteži ravninskih likova*, *O plovećim tijelima*, *O konoidama i sferoidama*, *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*, *Pješćanik* te Arhimedov problem goveda.

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? Radi se o 1906. otkrivenom Arhimedovom tekstu „skrivenom" ispod srednjevjekovnog crkvenog teksta. Tu nalazimo njegov tekst *Metoda mehaničkih teorema*, iz kojeg saznajemo da je Arhimed prvo svoje teoreme naslućivao fizikalno-eksperimentalnim pristupom, a zatim ih matematički (metodom ekshaustije) dokazivao, te *Stomahion*, opis matematičke slagalice slične tangramu kod koje je zadatak složiti kvadrat na različite načine. U *Pješćaniku*, Arhimed je opisao imenovanje velikih prirodnih brojeva, s ciljem da može imenovati broj čestica pijeska u svemiru. Osnovna jedinica mu je mirijada, 10^4, a brojevi manji od nje su u Arhimedovo doba doba imali standarne nazive. Brojeve do mirijade mirijada (10^8) Arhimed naziva brojevima prvog

reda, a 10^8 je jedinica drugog reda. Mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d. Tako je imenovao sve brojeve „prve periode", tj. brojeve do $(10^8)^{(10^8)}$. Taj je pak broj jedinica druge periode i Arhimed je analogno nastavio imenovati brojeve sve do $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^{64}}$.[40] Arhimedov problem goveda iskazan je pjesmicom pronađenom u jednom grčkom rukopisu tek 1773., a koja se pripisuje Arhimedu. Traži se broj goveda, koja su raspodijeljena u četiri stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava:[41] Bijelih bikova je koliko $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ crnih i žutih zajedno, crnih bikova je koliko $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno, šarenih bikova je koliko $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno, bijelih krava je koliko $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ cijelog crnog stada, crnih krava je koliko $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada, šarenih krava je koliko $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ cijelog žutog stada, a žutih krava je koliko $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada. Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj. Ovaj se problem svodi na Pellovu jednadžbu $x^2 - 4729494y^2 = 1$, s najmanjim rješenjem reda veličine 10^{206544} [10, 53, 103].

U djelu *O ravnoteži ravninskih likova* Arhimed je iskazao svoj princip poluge: Poluga na čijim krajevima su pozicionirane mase m_1 i m_2 je u ravnoteži ako uporište postavljeno tako da je $m_1\, r_1 = m_2\, r_2$, gdje je r_i udaljenost mase m_i od uporišta. Koristeći taj princip dokazao je, među ostalim, da je težište paralelograma sjeciše njegovih dijagonala i da je težište trokuta sjecište njegovih težišnica [2, 53].

Posebno poznati su Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije, koju je on u potpunosti usavršio. Njegovi su dokazi izuzetno precizni, čak i precizniji od ekvivalentnih kasnijih Newtonovih i Leibnizovih. Pritom se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom, kako smo već opisali. Među rezultatima koje je dokazao metodom ekshaustije ističu se Arhimedov teorem o krugu, određivanje volumena kugle, kvadratura Arhimedove spirale i kvadratura segmenta parabole.

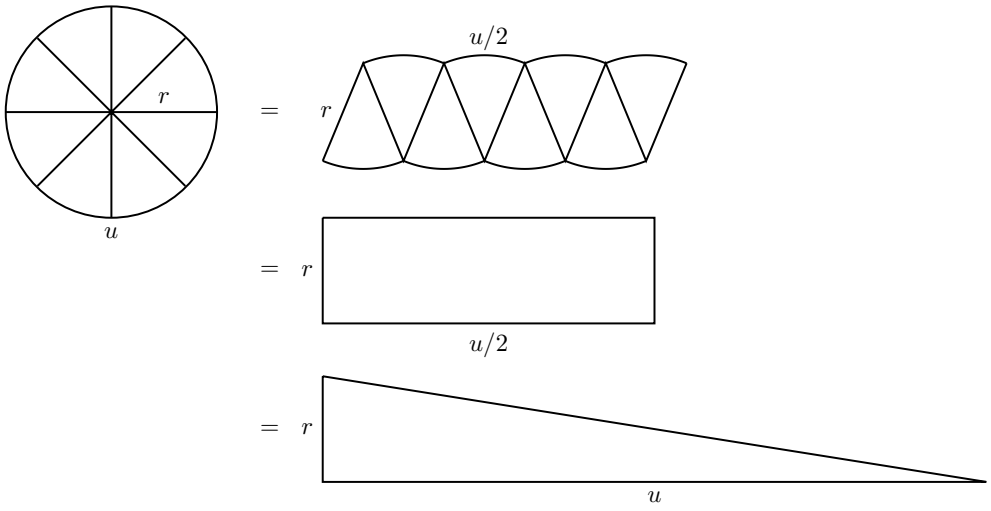
Teorem 8 (Arhimedov teorem o krugu, iz *O kružnici i krugu*) *Svaki krug ima istu površinu kao pravokutni trokut čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg.*

Uočimo da ovaj teorem povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak omjeru opsega i promjera kruga, tj. da zapravo tek od Arhimeda ima smisla govoriti o broju π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao ju je od 1736. nadalje L. Euler. Kako je Arhimed naslutio teorem o krugu? Smatra se da je koristio razmišljanje ilustrirano slikom 4.31 [10, 53, 103].

Slijedi modernizirani Arhimedov dokaz teorema o krugu. Slično kao i kod Euklidovog dokaza propozicije EEXII2, dokaz se svodi na „princip isključenja trećeg": Arhimed prvo dokazuje da površina kruga nije veća od površine navedenog trokuta, pa da nije manja, te preostaje da su jednake. Neka je K oznaka za krug i T oznaka za pravokutni trokut, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg. Pretpostavimo prvo da je $P(K) > P(T)$, dakle $P(K) - P(T) > 0$. U tom slučaju u krug se upisuju pravilni n-terokuti P_n i očito za svaki n imamo da je zbroj površina kružnih odsječaka između n-terokuta i kružnice $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati (to je dio EEX2) da za sve n vrijedi i $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$, dakle se pri udvostručenju broja stranica upisanog mnogokuta

[40] Za usporedbu, danas se broj svih čestica u svemiru procjenjuje u rasponu 10^{78}–10^{82}.

[41] Uočimo korištenje egipatskog zapisa razlomaka.



Slika 4.31: Arhimedov teorem o krugu

površina odsječaka smanjuje više od dva puta. Sad se Arhimed ograničava na n-ove koji su potencije od 2, tj. gleda upisane pravilne 2^k-terokute P_4, P_8, P_{16}, ... Eudoksova lema o ekshaustiji (EEX1) primijenjena na $P(K) - P(T)$ i δ_{2^k}-ove povlač da za dovoljno velik k imamo $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$ pa je

$$P(P_{2^k}) > P(T).$$

S druge strane, za svaki upisani pravilni n-terokut njegova površina je

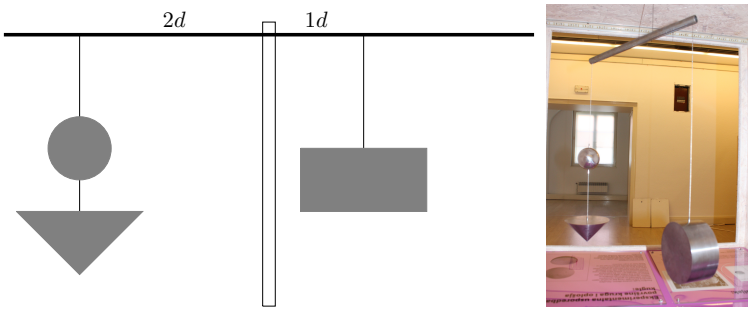
$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

gdje je a_n duljina stranice pravilnog n-terokuta, r i o su polumjer odnosno opseg kruga K, O njegovo središte, a N nožište okomice iz O na jednu stranicu pravilnog n-terokuta. Stoga za sve k vrijedi $P(P_{2^k}) - P(T) < 0$, što je kontradikcija s gore dokazanom nejednakosti.

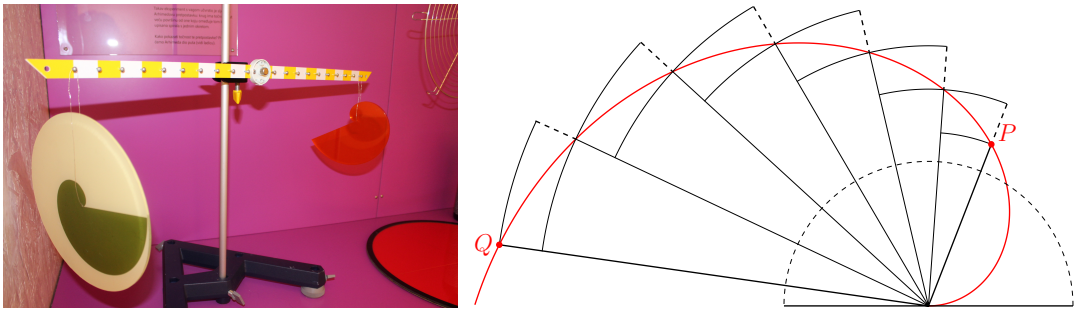
Dokaz da je i druga nejednakost površina, $P(K) < P(T)$, nemoguća je sličan, s tim da se koriste opisani pravilni n-terokuti i gledaju viškovi Δ_n površina tih opisanih n-terokuta u odnosu na površinu kruga. Dokaz ovog dijela prepuštamo čitatelju, uz napomenu da se u njemu koristi (naravno, dokaziva) tvrdnja $\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}$.

U svojem djelu *O kugli i valjku* Arhimed je dokazao da je **volumen kugle** jednak $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru) te da je **oplošje kugle** 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle $\frac{2}{3}$ je oplošja opisanog joj valjka. Uočimo da su tvrdnje teorema ekvivalentne modernim formulama: Ako s r označimo polumjer kugle, volumen valjka istog polumjera i visine kao kugla je $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$, pa je $\frac{2}{3}$ od toga točno $\frac{4}{3}r^3\pi$, tj. volumen kugle. Površina kruga istog polumjera kao kugla je $r^2\pi$, a $4r^2\pi$ je naravno odgovarajuće oplošje kugle. Odnos volumena kugle, valjka i stošca Arhimed je otkrio koristeći svoj princip poluge, kako je ilustrirano slikom 4.32, a dokaz obje tvrdnje je proveden metodom ekshaustije.

U *O spiralama*, Arhimed je opisao po njemu nazvanu spiralu: **Arhimedova spirala** je putanja točke koja se jednoliko giba po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazne



Slika 4.32: Arhimedovo otkriće odnosa volumena kugle, valjka i stošca (desna slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)



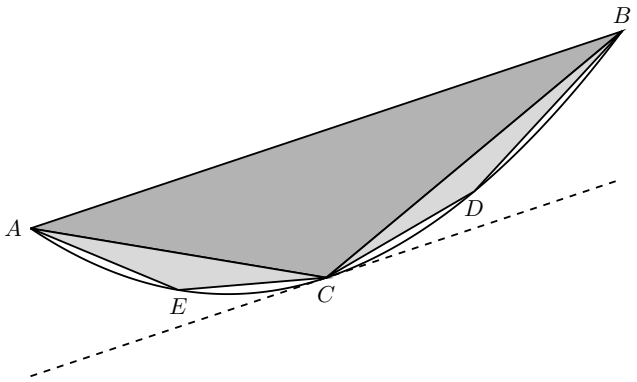
Slika 4.33: Površina jednog okreta Arhimedove spirale (lijeva slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)

točke.[42] Arhimed je dokazao karakterizaciju tangente u proizvoljnoj točci Arhimedove spirale, koja omogućuje konstrukciju iste te je nakon kružnice (EE) i konika (Apolonije) ovo bila prva krivulja za koju je bilo poznato kako konstruirati tangentu na nju.[43] Pokusom vjerojatno sličnim onome prikazanom na slici 4.33 lijevo, Arhimed je uočio da vrijedi: Isječak Arhimedove spirale između dva radij-vektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa $6a$. Posebno, površina jednog okreta Arhimedove spirale je trećina površine opisanog kruga. Dokaz je proveo metodom ekshaustije, dijeleći isječak spirale na isječke s jednakim središnjim kutovima (slika 4.33 desno). Primijetio je da tako dobiveni r-ovi čine aritmetički niz. Zatim je gledao tim isječcima upisane i opisane kružne isječke i dobio figuru manje i figuru veće površine. Naposlijetku se pozvao na Eudoksovu lemu, mi bismo rekli izračunao je limes, i tako dokazao tvrdnju [10, 53].

Među Arhimedovim rezultatima dokazanim metodom ekshaustije ističemo još njegovu kvadraturu segmenta parabole, koja je za razliku od kvadrature segmenta (odsječka) kruga provediva ravnalom i šestarom. Arhimed je dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom (trokut $\triangle ABC$ na slici 4.34) [18]. Uklanjanjem trokuta $\triangle ABC$ dobiju se dva nova odsječka u koje se analogno mogu upisati trokuti $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ i tako u beskonačnost. Arhimed je dokazao da je $T = P(\triangle ABC)$

[42] To je ekvivalentno modernoj jednadžbi u polarnim koordinatama: $r = a\varphi$. Polarne koordinate su uvedene su tek krajem 17. st. (I. Newton, Jacob Bernoulli).

[43] Za zadanu Arhimedovu spiralu s ishodištem O, neka je P točka na spirali i T sjecište tangente na spiralu u P s okomicom na OP koja prolazi kroz O. Dužina $\overline{OT}$ zove se suptangenta. Omjer njene duljine s i razmaka $r = |OP|$ je za svaku P jednak $r : a$.



Slika 4.34: Arhimedova kvadratura segmenta parabole

točno 4 puta veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka segmenta smanjuje točno 4 puta, što je naravno više od 2 puta. Eudoksova lema sad povlači da će ostatak površine segmenta nakon uklanjanja dovoljno mnogo trokuta na opisani način postati po volji mali, odnosno da će zbroj površina svih uklonjenih trokuta nakon dovoljno broja koraka po volji dobro aproksimirati površinu segmenta, dakle je površina segmenta zbroj svih beskonačno mnogo takvih površina. No, prema EEIX35[44] je $T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{16}T+\ldots+\frac{1}{4^n}T = T\cdot\frac{\frac{1}{4^{n+1}}-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{4}{3}T\cdot\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$. Opet po Eudoksovoj lemi, $\frac{1}{4^{n+1}}$ postaje proizvoljno mali s porastom n, dakle je površina segmenta parabole $\frac{4}{3}T$. Kako vidimo, Arhimed je ovdje u biti dokazao je ono što danas zapisujemo kao konvergentan geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

Od ostalih Arhimedovih rezultata istaknut ćemo još tri. Prvi je posebno poznat. Naime, Arhimed je u 3. propoziciji svog djela *O mjerenju kruga* iterativnom metodom[45] pokazao da je opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer istog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera. Drugim riječima, dokazao je ono što danas zapisujemo kao

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Arhimedova metoda, koja je sve do otkrića računa s redovima, tj. do 17. st., bila temelj svih metoda za procjene iznosa od π, koristila je kružnici opisane i upisane pravilne n-terokute i računao njihove opsege. Pritom, Arhimed je krenuo od $n = 6$ i udvostručavao broj stranica. To udvostručavanje je proveo četiri puta, tj. dobiveni rezultat proizlazi iz opsega kružnici opisanog i upisanog 96-erokuta, no veći na autora se slaže da je Arhimed bio svijestan da bi nastavkom svoje metode mogao dobiti i točniju procjenu. Pri svojem izračunu je koristio, bez argumenta, da je

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

[44] Ako se bilo koji broj brojeva nalazi u produljenoj proporciji, onda se razlika drugog i prvog broja prema prvom odnosi kao razlika zadnjeg i prvog prema zbroju svih osim zadnjeg. Suvremenije rečeno: Ako $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ čine geometrijski niz, onda je $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

[45] Ovo nije dokaz metodom ekshaustije!

Donju ogradu je koristio pri računanju opsega O_n opisanih, a gornju pri računanju opsega o_n upisanih pravilnih $n = 6 \cdot 2^k$-terokuta za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ jer očito za svaki n vrijedi $o_n < o < O_n$. Preciznije rečeno, Arhimed je zapravo računao omjere polumjera kružnice prema polovicama duljina stranica opisanih mnogokuta i omjere promjera kružnice prema duljinama stranica upisanih mnogokuta. Za opisane mnogokute Arhimed gleda pravokutne trokute koje čine središte O, jedna točka A na kružnici (u kojoj po jedna stranica svakog od opisanih mnogokuta dodiruje kružnicu) i susjedni joj vrh B_n pojedinog mnogokuta. Na početku imamo trokut OAB_0 za koji vrijedi $|OA| : |AB_0| = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153$ i $|OB_0| : |AB_0| = 2 : 1 = 306 : 153$.[46] Koristeći činjenicu da se $\angle AOB_n$ prepolavlja u svakom koraku, tj. $|OB_n| : |OA| = |B_nB_{n+1}| : |B_{n+1}A|$, te Pitagorin poučak zaključuje da je u svakom koraku

$$|OA| : |AB_{n+1}| = (|OA| + |OB_n|) : |AB_n|,$$

$$|OB_{n+1}|^2 : |AB_{n+1}|^2 = (|OA|^2 + |AB_{n+1}|^2) : |AB_{n+1}|^2.$$

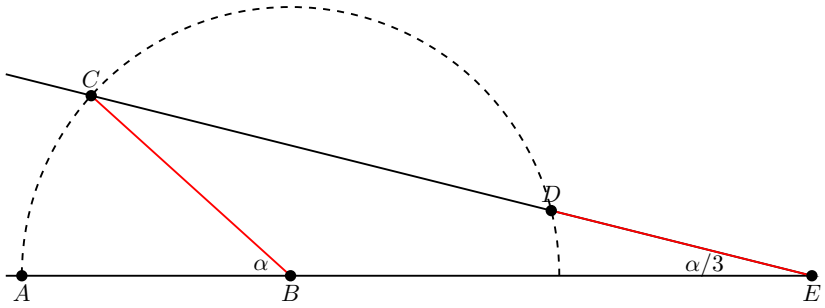
Modernije zapisano vidimo da je Arhimed zapravo rekurzivno računao članove dva niza (a_n) i (b_n) gdje je $a_{n+1} = a_n + b_n$ i $b_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 153^2}$ uz početni uvjet $a_0 = 265$, $b_0 = 306$. Arhimed je tako dobio $a_1 = 571$, $a_2 = 1162\,\frac{1}{8}$, $a_3 = 2334\,\frac{1}{4}$ i $a_4 = 4673\,\frac{1}{2}$. Preciznije, konačni omjer kojeg je dobio je $a_4 : 153 = |OA| : |AB_4|$, tj. omjer $2r$ i stranice opisanog 96-terokuta, kojemu je pak opseg sigurno veći od opsega kružnice. Stoga omjer opsega i promjera kruga (tj. π) ne može biti veći od $\frac{96 \cdot 153}{4673\,\frac{1}{2}} = 3\,\frac{1335}{9347}$ za što Arhimed jednostavno konstatira da je manje od $3\,\frac{1}{7}$. Razmatranjem upisanih mnogokuta, preciznije pravokutnih trokuta ABC_n, gdje je $\overline{AB}$ promjer kružnice C_n vrh upisanog pravilnog n-terokuta, uočivši da se u svakom koraku $\angle BAC_n$ prepolavlja Arhimed opet dvije prvima slične rekurzije, od kojih jedan niz (b_n) sadrži duljine stranica pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu te ih on u svakom koraku aproksimira gornjom ogradom (jer su sad opsezi n-terokuta manji od opsega kružnice) te dobiva konačni omjer promjera kružnice i stranice njoj upisanog pravilnog 96-terokuta kao $|AB| : |BC_4| = b_4 : 66 < 2017\,\frac{1}{4} : 66$ iz čega slijedi da omjer opsega kružnice prema njenom promjeru ne može biti manji od $96 \cdot 66 : 2017\,\frac{1}{4} = \frac{25344}{8069}$, za što Arhimed samo konstatira da je veće od $3\,\frac{10}{71}$ [13, 19, 53].

Zasigurno ste čuli i za **Arhimedova tijela**, tj. polupravilne poliedre. Njih je Arhimedu pripisao Papus. Papus je naveo da je Arhimed napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojao ih i primijetio da definiciju također zadovoljavaju i pravilne prizme i antiprizme.

Naposlijetku, geometrijski zanimljiva je i Arhimedova „mehanička" trisekcija kuta. Kao i Hipokratova, ova metoda je doduše egzaktna, ali zahtijeva ravnalo s jednom oznakom duljine na njemu. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ (slika 4.35). Produlji se dužina $\overline{AB}$ i nacrta polukružnica proizvoljnog polumjera oko B. Na ravnalu se označi njen polumjer kao $\overline{DE}$. Nađe se pozicija ravnala u kojoj E leži na pravcu AB, D leži na polukružnici, tako da pritom pravac (ravnalo) DE prolazi kroz C. Tada je $\angle AED = \alpha/3$.

Zadatak 11 *Dokažite točnost Arhimedove trisekcije kuta.*

[46] Uočimo da zapravo gleda kotangens i kosekans, tj. recipročni sinus, pripadnog središnjeg kuta.



Slika 4.35: Arhimedova trisekcija kuta

Helenističko razdoblje grčke matematike ...

... U klasičnom helenizmu starogrčka matematika je postigla svoj vrhunac. Glavni znanstveni centar helenizma bila je Aleksandrija. Stariji pristupi i rezultati kulminirali su oko 300. g. pr. Kr. u Euklidovim Elementima*, djelu za koje se uzima da je matematiku pretvorilo u egzaktnu znanost u kojoj se tvrdnje izvode deduktivno iz definicija i aksioma. Među Euklidovih po pet aksioma i postulata ističe se peti postulat o paralelama, za koji se već u Euklidovo doba i još dugo kroz povijest postavilo pitanje je li to možda ipak teorem dokaziv iz ostalih definicija, postulata i aksioma. U 13 knjiga (poglavlja) Elemenata, sadržaj kojih se uglavnom pripisuje ranijim autorima, nalazimo standardne „školske" propozicije i konstrukcije iz planimetrije i stereometrije, ali i rezultate iz teorije brojeva (primjerice Euklidov teorem o prostim brojevima i Euklidov algoritam) te razne propozicije geometrijske algebre, uključivo dokaza da se svaki mnogokut može kvadrirati ravnalom i šestarom. Uz Euklida, glavni matematičari klasičnog helenizma bili su Eratosten iz Kirene (poznat po svom situ, određivanju opsega Zemlje i mezolabiju), Apolonije iz Perge (autor prve potpune teorije konika) i Arhimed iz Sirakuze. Vrhunac starogrčke matematike predstavljaju rezultati Arhimeda iz Sirakuze u 3. st. pr. Kr. Posebno su poznati njegovi rezultati koje je naslućivao eksperimentalno, a zatim egzaktno dokazao metodom ekshaustije — teorem o krugu, određivanje volumena kugle, kvadratura parabole i Arhimedove spirale. Uz to je iterativnim postupkom dobio procjenu od (najviše)* $22/7$ *za omjer opsega i promjera kruga, opisao i u dokazima vezanim za određivanje težišta raznih figura koristio princip poluge, osmislio rani način imenovanja velikih brojeva, ...*

4.3.2 Postklasični helenizam

Matematički pojmovi u ovom poglavlju

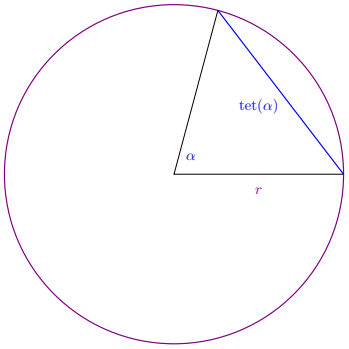
** trigonometrija * kutovi * sinus * tetive u kružnicama * sferna geometrija * razlomak * seksagezimalni brojevni sustav **

Poslije pada Sirakuze (212. pr. Kr.), Rimljani su nastavili s osvajanjem grčkih teritorija. Tako su do 146. pr. Kr. osvojili gotovo cijelo grčko kopno i pri tom mnogo toga uništili. Ostatak antike, od otprilike 150.–50. pr. Kr. pa do pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. A. D. naziva se **postklasičnim helenizmom**. Godine 31. pr. Kr. Rimljani su zauzeli Aleksandriju i pritom je u požaru uništen velik dio biblioteke u *mouseion*-u. Tijekom postklasičnog helenizma znanstveni rad je u odnosu na prethodna razdoblja bitno reduciran, među ostalim i jer više praktično orijentirani Rimljani nisu baš cijenili znanost. Novi matematički rezultati u ovom periodu bili su uglavnom rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara. Jedina značajna iznimka je matematička astronomija, za potrebe koje se u ovom razdoblju razvila trigonometrija i sferna geometrija.

Trigonometrija kao geometrijska poddisciplina u kojoj se kutovi proučavaju kroz za njih vezane omjere duljina (iz čega su se s vremenom razvile suvremene trigonometrijske funkcije) svoje korijene vuče još iz babilonskog doba (primjerice, tablica pitagorejskih trojki na tablici Plimpton 322 može se interpretirati kao rana trigonometrijska tablica), a i klasičnog helenizma, kad su primjerice pri promatranju sjena štapova uočeni određeni karakteristični omjeri. No, u pravom smislu ona je zasnovana tek u 2. st. pr. Kr., kad su za potrebe astronomije prvi puta tabelirani kutovi s jednom vrstom za njih karakterističnih duljina unutar danog kruga. No, to nisu bile tablice sinusa ni kosinusa ni tangensa kutova u jediničnoj kruÂžnici, kako bi to mogao pomisliti suvremeni čitatelj. Ocem trigonometrija smatra se astronom i matematičar Hiparh iz Niceje (danas Iznik u Turskoj), no prije njegovog doprinosa potrebno je kao neposrednog prethodnika spomenuti jednog od znanstvenika iz klasičnog helenizma. **Aristarh sa Samosa** (ca. 310.–230. pr. Kr.) je bio matematičar i astronom. Prvi je, u danas izgubljenom djelu, predložio heliocentrički model svemira, što u *Pješćaniku* spominje Arhimed. U povijesti matematike ističe se usporedbom udaljenosti Zemlje do Sunca i do Mjeseca te usporedbom veličina Zemlje i Mjeseca. U svojim je (matematički korektnim, ali zbog krivih početnih pretpostavki i grešaka mjerenja u konačnici netočnim) izračunima koristio određene omjere duljina koji odgovaraju danas uobičajenim trigonometrijskim funkcijama određenih kutova [10, 53, 103].

No, sustavno razmatranje iznosa određenog omjera duljina za različite kutove prvi je proveo **Hiparh iz Niceje** (oko 190.–120. pr. Kr.). U povijesti astronomije poznat je po tome što je izračunao trajanje godine s točnošću do na 6 minuta, odredio kut između ekliptike i ekvatora, otkrio precesiju ekvinocija i izračunao koordinate mnogih zvijezda. U matematici je zapamćen kao autor prve trigonometrijske tablice, ali i po prvim rezultatima iz sferne geometrije i po prvoj analizi stereografske projekcije. Njegova su djela izgubljena te njihov sadržaj saznajemo iz sekundardnih izvora. Hiparhova prva trigonometrijska tablica bila je tablica središnjih kutova u fiksiranoj kružnici i pripadnih tetiva. **Tablice tetiva** ostat će karakteristika trigonometrije sve do kraja antike. Mi ćemo tetivu koja odgovara središnjem kutu α označavati s $\operatorname{tet}\alpha$. Pogledamo li sliku 4.36, vidimo da je veza starogrčke tetive s danas uobičajenim trigonometrijskim omjerima dana formulom

$$\operatorname{tet}\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

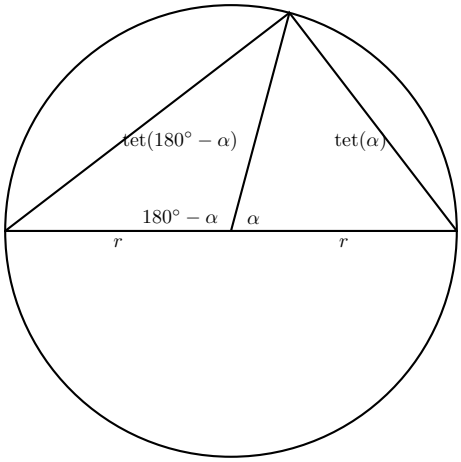


Slika 4.36: Tetive i središnji kutovi

tj. (do na polumjer kružnice) tetive su dvostruki sinusi polukuta. U tablicama navodile su se aproksimativne racionalne vrijednosti tetiva pa je ovdje važno spomenuti nešto o starogrčkom zapisu razlomaka. Oni se i dalje strogo matematički nisu smatrali brojevima, ali su naravno bili nužni u raznim praktičnim, ovdje astronomskim, proračunima. U Hiparhovo doba standardni brojevni sustav bio je alfabetski i on se koristio za zapisivanje svih prirodnih brojeva. Dok se u starije doba za zapis razlomaka koristio egipatski zapis te bi se primjerice $\frac{1}{5}$ pisala jednostavno kao ε'' (dakle, nazivnik s dva apostrofa), u ovom razdoblju pojavljuju se dva nova stila zapisa razlomaka. Jedan je koristio brojnik i nazivnik (Heron i Diofant su koristili takav zapis), s tim da se jednostavno pisao nazivnik *iznad* brojnika, npr. $\begin{smallmatrix}\kappa\beta\\ \zeta\end{smallmatrix}$ je naš $\frac{7}{22}$. U astronomiji se pak za zapisivanje razlomaka koristio alfabetski brojevni sustav u kombinaciji s babilonskim seksagezimalnim (pri čemu se seksagezimalno zapisivao samo razlomljeni dio broja). Primjerice, Hiparhovih $7°30'$ bilo je pisano kao $\overline{\zeta}\,\overline{\lambda}$. Pritom je postojao, kao i u Mezopotamiji od ca. 3. st. pr. Kr., poseban simbol za nedostajuću potenciju od 60, tj. znamenka koja odgovara današnjoj znamenki 0 kad se nalazi 'usred' broja. Hiparhova tablica tetiva sadržavala je kutove u koracima od po $7°30'$ u rasponu od 0 do 180°. Primjerice, za kut od 60° ($\overline{\xi}$) Hiparh je naveo iznos tetive $57°18'$ ($\overline{\nu\zeta}\ \overline{\iota\eta}$). Budući da se za središnji kut od 60° polumjer i tetiva podudaraju, vidimo da je polumjer kruga u kojem je Hiparh gledao središnje kutove i tetive bio $57 + \frac{18}{60} = 57.3$. Pomnija analiza tablice (jer naravno da svako zaokruživanje nosi grešku) pokazuje da je zapravo gledao krug opsega 360, što naravno odgovara jednostavnoj podjeli punog kuta na stupnjeve [10, 49, 53, 70, 103].

Do kraja helenizma u trigonometriji su se istakla još dva znamenita znanstvenika. Prvi je bio **Menelaj Aleksandrijski** (ca. 70.–130. A.D.)., koji je također izradio tablicu tetiva (u šest knjiga), no ona nije sačuvana. Najpoznatije Menelajevo djelo je *Sphaerica*, sačuvana u arapskom prijevodu, u kojem se bavi sfernom geometrijom i sfernom trigonometrijom. *Sphaerica* je najstarije djelo u kojem je definiran **sferni trokut**: To je trokut koji je omeđen lukovima triju velikih kružnica na danoj sferi. U ovoj se knjizi nalazi i znameniti Menelajev teorem za ravninske i sferne trokute [10, 103].[47] Konačnu sintezu trigonometrijskog znanja antičkog doba postigao je znameniti **Klaudije Ptolemej** (ca. 85.–165.), najutjecajniji antički astronom i geograf. Djelovao je u Aleksandriji, a bavio se i

[47] Zadan je trokut ABC i pravac koji siječe pravce AB, BC, CA redom u točkama D, E, F. Tada je $|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = |BD| \cdot |CE| \cdot |AF|$ ako je trokut ravninski, odnosno $\sin\widehat{AD} \cdot \sin\widehat{BE} \cdot \sin\widehat{CF} = \sin\widehat{BD} \cdot \sin\widehat{CE} \cdot \sin\widehat{AF}$ ako je trokut sferni. Pritom se kod sfernih trukuta duljine njihovih stranica poistovjećuju s mjerama odgovarajućih središnjih kutova.



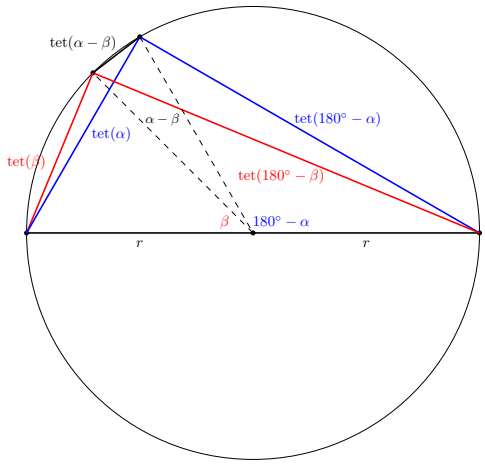
Slika 4.37: $(\operatorname{tet}\alpha)^2 + (\operatorname{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$.

matematikom, astrologijom, glazbom i filozofijom. Jedino Ptolemejevo čisto matematičko djelo sadržavalo je pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (tako navodi Proklo). Najznačajnije Ptolemejevo djelo je *Matematike sintaksis* („Matematička kolekcija"), kasnije nazvano *Megale sintaksis* („Velika kolekcija"), koje nije sačuvano u originalu, nego samo u arapskom prijevodu te je poznatije pod imenom tog prijevoda: *Almagest* („Najveći"). U tom je djelu Ptolemej dao matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela. Zbog izuzetno dobrog poklapanja s dostupnim eksperimentalnim podacima ovo je djelo sve do renesanse bilo osnova zapadne astronomije. U njemu nalazimo mnoge doprinose sfernoj geometriji i trigonometriji. Ptolemejeva tablica tetiva vrijedna je malo veće pažnje, jer njezina konstrukcija sadrži mnoge važne trigonometrijske reultate.

Kao i Hiparh, Ptolemej kreće od kružnice podijeljene na 360 dijelova ('stupnjeva'), no Ptolemej također dijeli i njezin promjer i to na 120 dijelova (uočimo dakle da su mu jedinice duljine za opseg i promjer različite, jer je zasigurno znao da opseg kružnice nije 3 puta njezin promjer, štoviše Ptolemej je omjer opsega i promjera procijenio s $3\frac{17}{120}$, dakle s greškom reda veličine samo 10^{-5}). Stoga ćemo za mjerenje duljine luka na kružnici jedinicu označiti s $^\circ$, dok ćemo za jedinicu za mjerenje duljine ravnih crta pisati (u literaturi uobičajenu) oznaku ^{p} za $\frac{1}{120}$ duljine promjera. Primjerice, $\operatorname{tet} 60^\circ = 60^p$ (kutu od 60° odgovara tetiva duljina polumjera, dakle pola promjera, kružnice). Nakon što je dokazao neke geometrijske teoreme, Ptolemej ih je iskoristio za jednostavno izračunavanje nekih tetiva. Koristeći jedan svoj te Pitagorin teorem prvo je dobio da je duljina stranice pravilnog deseterokuta jednaka $37^p 4' 55''$ (mi bismo rekli: $\left(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}\right) \cdot \frac{1}{120} = \frac{26699}{86400} \approx 0{,}3$ promjera) pa je to tetiva koja odgovara kutu 36°. Tetive za središnje kutove 60°, 90° i 120° se lagano izračunaju, a koristeći Pitagorin poučak i tvrdnju iz zadatka 4.38, koju je dokazao, Ptolemej je izračunao tetivu za 72° [49].

Zadatak 12 *Izračunajte, egzaktno, iznose* $\operatorname{tet} 60^\circ$, $\operatorname{tet} 90^\circ$ *i* $\operatorname{tet} 120^\circ$. *Iznose zapišite i aproksimativno koristeći jedinicu* $^{\mathrm{p}}$ *i minute i sekunde.*

Zadatak 13 *Dokažite da je u pravokutnom trokutu kojemu je jedna kateta polumjer, a druga je stranica pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu, hipotenuza jednaka stranici pravilnog peterokuta upisanog u istu kružnicu.*



Slika 4.38: Adicijski teorem za tetive

Iz navedenih pet tetiva izračunao je i tetivu od 144° koristeći svoju zanimljivu kombinaciju Pitagorinog i Talesovog poučka u kontekstu računa tetiva (slika 4.37):

$$(\operatorname{tet}\alpha)^2 + (\operatorname{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2.$$

Dalje je dokazao jednu lemu, koju danas poznajemo pod imenom **Ptolemejev teorem**:[48]

Teorem 9 (Ptolemejev teorem) *U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.*

Kao korolar te leme dokazao je (koristeći dijagram poput onog na slici 4.38) „tetivnu" varijantu adicijskog teorema za sinus, koju možemo zapisati ovako:

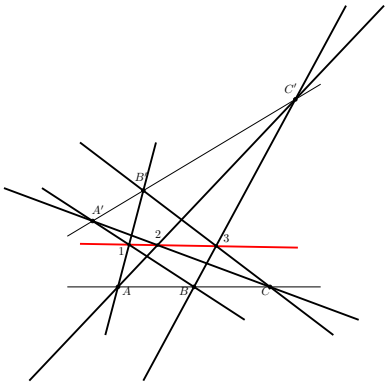
$$\operatorname{tet}(\alpha - \beta) \cdot d = \operatorname{tet}\alpha \cdot \operatorname{tet}(180^\circ - \beta) - \operatorname{tet}\beta \cdot \operatorname{tet}(180^\circ - \alpha).$$

Koristeći navedene i još neke rezultate (vidi npr. [49]) Ptolemej je izračunao tablicu tetiva u rasponu središnjih kutova (tj. lukova) od $30'$ do 180°, u koracima od po pola stupnja (točnost je, kad se preračuna u decimalni sustav, na 5 do 6 decimala).

Osim spomenutih matematičara koji su doprinijeli nastanku trigonometrije, u postklasičnom helenizmu nužno je spomenuti još tri: Herona, Diofanta i Papusa. **Heron iz Aleksandrije** (vj. 1. st. A.D.) bio je matematičar, fizičar, izumitelj i inženjer. Za razliku od drugih starogrčkih matematičara bio je orijentiran na praktičnu matematiku. Napisao je tri matematička djela: *Metrica* (o mjerenju, sadrži — naravno ne simbolički zapisanu — **Heronovu formulu za površinu trokuta**, zasigurno poznatu bar koje stoljeće ranije, i **Heronovu metodu za korjenovanje** na primjeru $\sqrt{720}$, pri čemu je očito da je znao da se povećanjem broja iteracija povećava točnost), *Geometrica* (o površinama) i *Stereometrica* (o volumenima). Tijekom vremena su tim djelima dodavani mnogi sadržaji pa nije sigurno koji dijelovi stvarno potječu od Herona. Poznat je i **Heronov problem najkraćeg puta**, koji je jedan od najstarijih poznatih problema optimizacije: Za zadane točke A i B s iste strane nekog pravca traži se točka C na tom pravcu za koju je $|AC| + |CB|$ najmanja moguća [10, 53, 103].

Zadatak 14 *Heron je spomenuti problem riješio koristeći osnu simetriju. Kako?*

[48] Umnoške duljina Ptolemej je tipično starogrčki naveo kao površine odgovarajućih pravokutnika.



Slika 4.39: Papusov teorem

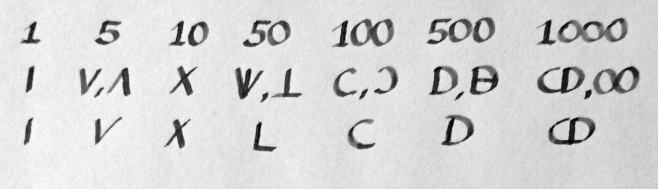
Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st. A. D.) najznačajniji je matematičar postklasičnog razdoblja i posljednji veliki europski matematičar prije Fibonaccija. Jedna od rijetkih pouzdanih informacija o njegovom životu je ta da je autor matematičkog djela *Aritmetika*. Čini se da je živio 84 godine — na to upućuje zadatak kojeg oko 500. g. u *Grčkoj antologiji* daje Metrodor:

> *Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jadno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.*

Po Diofantu danas nose ime **diofantske jednadžbe**.[49] Tipičan primjer diofantske jednadžbe je traženje pitagorejskih trojki. Iako u antičkoj Grčkoj još ne možemo pričati o jednadžbama kao takvima, Diofantovi problemi vezani za teoriju brojeva lako se mogu opisati kao jednadžbe. Diofantova *Aritmetika* sastoji se od 150 algebarskih zadataka (u kontekstu teorije brojeva, tj. teorijske aritmetike) u 13 „knjiga", bez prateće opće teorije. Šest od tih 13 knjiga je sačuvano na grčkom i četiri na arapskom jeziku (a tri su izgubljene). Mnogi zadaci u *Aritmetici* svode se na jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima, a Diofant razmatra samo rješenja koja se mogu zapisati kao pozitivni razlomci. Neki od Diofantovih zadataka još ni danas nisu riješeni, a kopije i prijevodi *Aritmetike* imale su velik utjecaj na mnoge kasnije matematičare [10, 103]. Diofant je osmislio i vlastitu algebarsku notaciju (vidi [28]), no ona nije imala većeg utjecaja.

Posljednji veliki antički grčki matematičar bio je **Papus iz Aleksandrije** (ca. 290.–350.). Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija*, koje je jedan od važniji izvora današnjih znanja o antičkoj matematici. To je vrsta enciklopedije starogrčke matematike, a sadrži i Papusove vlastite rezultate, od kojih je najpoznatiji **Papusov teorem**: Dana su dva pravca i na njima po tri točke: A, B, C odnosno A', B', C'. Neka je točka 1 sjecište AB' i $A'B$, točka 2 sjecište AC' i $A'C$ te točka 3 sjecište BC' i $B'C$. Tada su točke 1, 2 i 3 kolinearne (slika 4.39). Papus je uveo i pojam fokusa i direktrise konike. Iskazao je i dokazao teorem kojeg je kasnije, u 18. st., za definiciju konika iskoristio R. J. Bošković: Neka je dan pravac AB i točka C u ravnini. Neka je iz točke D u istoj ravnini povučen pravac CD i okomica DE na AB i neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je D na

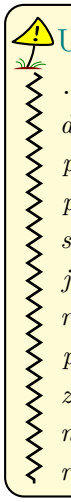
[49] U posljednjih se dvjestotinjak godina naziv *diofantske jednadžbe* uvriježio za algebarske jednadžbe s više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima kojima se traže *cjelobrojna* rješenja.



Slika 4.40: Rimske brojke u doba republike (srednji red) i carstva (donji red)

konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1, na hiperboli ako je veći od 1 odnosno na elipsi ako je manji od 1. Drugim riječima: Konika je geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti do čvrste točke (fokusa) i čvrstog pravca (direktrise) konstantan.

Za kraj pregleda antičke matematike recimo par riječi o matematici u Rimskom Carstvu. Rimljani nisu cijenili matematiku, samo su koristili njezine praktične rezultate u građevini, mjeriteljstvu, računanju kamata i udjela u nasljedstvima. Samostalnih rimskih matematičkih doprinosa nije bilo, a mnogi grčki tekstovi preneseni su, odnosno prevedeni na latinski iskrivljeno i bez razumijevanja. U školama se učilo računanje na prste, u glavi i pomoću **(rimskog) abakusa**. Najpoznatija matematička „ostavština“starih Rimljana su **rimske brojke**, no današnja verzija je tek malo starija od zapadne verzije indoarapskih brojki (u antičko doba 1000 se nije pisao kao M, nego kako se vidi na slici 4.40). Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5, slično kao atički grčki brojevni sustav. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: IV = IIII. Rimljani su kod podjele jedinica mase i novca koristili duodecimalne razlomke. Jedan *as*[50] se dijelio na 12 unci (*uncia*). Znak za uncu bila je točka, a za $\frac{1}{2}$ slovo S (*semis*). Ostali razlomci između 1/12 i 1 zapisivali su se aditivno korištenjem navedenih, a svaki je imao i svoj poseban naziv, npr. 2/3 je *bes*, zapisan kao S·. Kao i kod Grka ranije, korišteni su i egipatski razlomci.



U postklasičnom helenizmu . . .

. . . glavna novost je utemeljenje trigonimetrije, u obliku izračunavanja tablica tetiva (de facto dvostrukih sinusa polukuta) za središnje kutova. Trigonometriju je utemeljio Hiparh iz Niceje, ali posebno ju je razvio Klaudije Ptolemej, čiji mnogi rezultati odgovaraju modernim trigonometrijskim pravilima poput adicijskih formula. Također, Hiparh i Ptolemej te Menelaj Aleksandrijski postavili su osnove sferne geometrije. Diofant je bitno doprinijeo teoriji brojeva i postavio temelje diofantskih jednadžbi, a Heron je kao jedini praktično orijentiran starogrčki matematičar dobio niz važnih rezultata uključujući Heronovu metodu korjenovanja, Heronovu formulu i rješenje Heronovog problema optimizacije. Zadnji veliki antički matematičar, Papus Aleksandrijski, važan je izvor znanja o starijim razdobljima, a pokazao je i da su konike karakterizirane omjerom udaljenosti njihovih točaka od fokusa i direktrise. U usporedbi s klasičnim helenizmom, ovo je ipak — uslijed rimskog utjecaja — znanstveno manje aktivno razdbolje.

[50] Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.

Poglavlje 5

Matematika u Kini i Indiji u stara vremena

5.1 Starokineska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

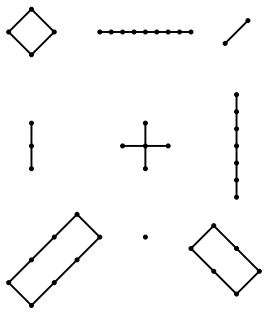
** broj i brojka * pozitivni i negativni brojevi * dekadski pozicijski sustav * magični kvadrat * permutacije i varijacije * Pitagorin poučak * π * omjeri i razmjeri * površine i volumeni * linearne jednadžbe i njihovi sustavi * Gaußova metoda eliminacija * numerička matematika * drugi i treći korijeni * Hornerov algoritam * teorija brojeva * kongruencije * kineski teorem o ostacima * diofantske jednadžbe*

Podsjetimo se malo opće povijesti Kine. Najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce pojavile su se u razdoblju 3000.–1500. pr. Kr. Iza ca. 2000. g. pr. Kr. tu se razvilo kinesko pismo. Već rano Kinezi su imali razvijenu astronomiju. Najstariji pouzdaniji podaci o kineskoj općoj i znanstvenoj povijesti sačuvani su iz doba dinastije Džou (Zhou),[1] 11.–5. st. pr. Kr. U to doba zabilježen Halleyev komet, izrađivani su kalendari, a vjeru i filozofiju oblikovali su Konfucije (konfucijanizam) i Lao Ce (taoizam). Znameniti Kineski zid sagraÄ‘en je u doba prvog kineskog cara Čin Ši Huangdija potkraj 3. st. pr. Kr. Iz ovog ranog razdoblja nema sačuvanih matematičkih tekstova, ali iz raznih povijesnih izvora saznajemo da su se najkasnije oko 1200. g. pr. Kr. brojevi su se počeli zapisivati koristeći (nepozicijski) dekadski brojevni sustav [103].

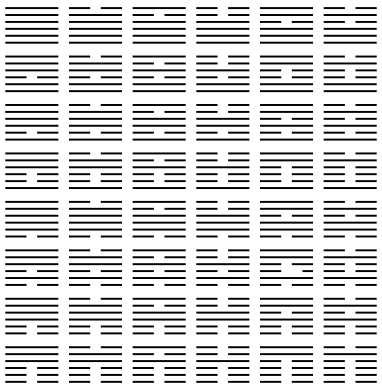
Među kineskim matematičkim specifičnostima za ovu ranu povijest Kine spomenuti treba dvije. Jedna su **magični kvadrati**, čija najstarija pojava je upravo u staroj Kini. Do 7. st. pr. Kr. postao je opće poznat tzv. *lo šu* magični kvadrat (slika 5.1), no njegova prva pojava datira se oko 2200. g. pr. Kr., vezano za poznatu legendu o kornjači. Zbroj svakog retka, stupca i obiju dijagonala u *lo šu* kvadratu je 15, što je broj dana u svakom od 24 ciklusa starokineske solarne godine. Danas znamo i da je to (do na simetrije) jedini normalni[2] magični kvadrat dimenzije 3×3. Veći magični kvadrati se u Kini spominju tek u 13. st., prije čega su već bili poznati u Indiji i u Arapa. Također, prva pojava **permutacija** (zapravo, varijacija s ponavljanjem) u povijesti potječe iz ovog ranog razdoblja kineske povijesti. Radi se o *I Čing*-u (*Knjizi promjena*), vj. iz 7. st. pr. Kr., u kojem se (u svrhu

[1] Kineske nazive transkribirali smo na hrvatsku latinicu koristeći pomoćno kinesko latinično pismo pinyin.

[2] $n \times n$-magični kvadrat s prirodnim brojevima od 1 do n^2.



Slika 5.1: *Lo šu* magični kvadrat

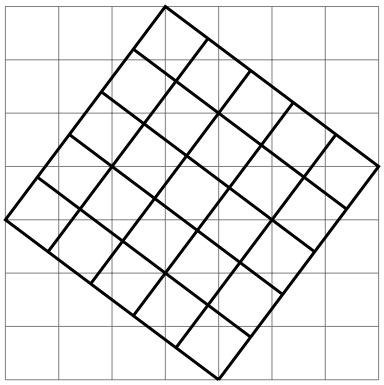


Slika 5.2: *I Čing* heksagrami

proricanja) dva simbola, jang (—) i jin (– –), prvo slažu u $2^3 = 8$ trigrama pa zatim ti trigrami u $8^2 = 64$ heksagrama (slika 5.2), tj. gledaju se sve varijacije šestog razreda od 2 elementa. Ipak, nema naznaka da su u stara vremena Kinezi sustavno razmatrali permutacije i varijacije [10, 29].

Stariji oblici znamenki dekadskog pozicijskog sustava (bez nule, dakle bez apsolutne pozicije) od 4. st. pr. Kr. ustupili su mjesto novoj varijanti takvog brojevnog sustava. Kineske brojke u to doba poprimaju oblik štapičastih brojki, koje su posljedica tipičnog starokineskog pomagala za računanje, štapića. Štapičaste brojke su se koristile sve do 16. st., a kako bi bilo jasno na koju potenciju od 10 se znamenka odnosi (tj. postiglo nešto blisko apsolutnoj poziciji), orijentacija znamenki bila je vertikalna za neparne potencije, a horizontalna za parne potencije od 10 (uključivo nulte, tj. jedinice) Primjerice, $\equiv$ ||$-$ je kineskim štapićastim brojkama zapisan broj kojeg danas zapisujemo kao 321 (ili 32100 ili 3210000 ili ...). Od 2. st. pr. Kr. u Kini se, po prvi put u ljudskoj povijesti, pojavilo razlikovanje **pozitivnih brojeva** (*dženg*), koji su prikazivani crvenim štapićima, i **negativnih brojeva** (*fu*), prikazivanih crnim štapićima. No, simbol za znamenku nula (krug) uveden je tek u 13. st. Napomenimo ovdje da je poznato starokinesko računsko pomagalo, **kineski abakus** (suanpan), uveden bitno kasnije od štapića (vjerojatno u 2. st. pr. Kr.), a u široj uporabi je tek od 16. st. [10, 88].

U doba dinastije Han (206. pr. Kr.–220. A.D.) došlo je do procvata matematike i počela se pridavati važnost matematičkom obrazovanju. Iz tog doba potječu najstariji sačuvani kineski matematički tekstovi. Također, u to doba Kinezi su ostvarili mnoge impresivne napretke u znanosti i tehnologiji: izumili su proizvodnju papira, otkrili su Sunčeve pjege, ...Do 1. st. A. D. ostvareni su i kontakti s Indijom te je u Kinu prodro i budizam. U



Slika 5.3: Ilustracija Pitagorinog poučka u „Aritmetici Džouovog gnomona"

3. st. carstvo se raspalo, te je došlo do zamiranja znanosti i tehnike. Najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst je *Džoubi suanđing* (*Aritmetika Džouovog gnomona*), koji se datira između 100 pr. Kr. i 100. A.D. Posebno je poznata grafika 5.3 iz njega, koja se lako poopćava na dokaz Pitagorinog poučka (u Kineza: pravilo *gou gu*, doslovno „kraća kateta, dulja kateta"). No, dokazi svakako u to doba još nisu bili dio matematike u Kini. Zanimljiviji i važniji, vjerojatno i najpoznatiji, starokineski matematički tekst je *Điudžuang šuanšu* (*Devet poglavlja umijeća računanja*) [10, 14, 88, 103].

Điudžuang šuanšu je kompilacija starijih rukopisa, nastala najvjerojatnije u prvoj polovici 2. st. A. D. Sadrži 246 zadataka raspoređenih u 9 poglavlja i bilo je vrlo utjecajno djelo, koje su svojim komentarima doradili mnogi kasniji kineski matematičari i koje je kasnije, skupa s *Aritmetikom Džouovog gnomona*, postalo jedan od tzv. deset klasika kineske matematike, tj. službenog popisa obvezne matematičke literature za obrazovanje u 7. st. Poglavlja u *Devet poglavlja umijeća računanja* imaju sljedeće teme [14, 88]:

1. „Mjerenje polja": Izračunavanje povrĹ˘ina, uključivo računa s razlomcima. Tu se povrĹ˘ina kruga računa pravilima koja su ekvivalentna aproksimaciji π s 3 [13].

2. „Proso i riža": Preračunavanja količina za razmjenu (trojno pravilo).

3. „Raspodjela po proporciji": Proporcionalnosti vezane za raspodjelu dobara i novca.

4. „Koja širina?": Izračunavanje nepoznatih duljina, širina i visina geometrijskih likova i tijela kojima je poznata površina odnosno volumen. Tu je uključeno računanje kvadratnih i kubnih korijena.

5. „Rasprave o radu": Određivanje raznih volumena u konstrukciji građevina i drugih struktura, u svrhu utvrđivanja radnog učinka.

6. „Pošteni nameti": Proporcionalnosti u izračunima vezanim (ne samo) za plaće i poreze.

7. „Višak i manjak": Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom (rješavanje metodom *regula falsi*, tj. temeljem dva pokušaja).

8. „Pravokutne tablice": Rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

9. „Pravokutni trokuti": Rješavanje praktičnih geometrijskih problema koristeći svojstva pravokutnih trokuta, uključivo Pitagorinog poučka.

Među tim sadržajima ističemo dva, u kojima se pojavljuju specifični kineski doprinosi matematici koji u isto vrijeme još nisu bili poznati drugdje, a u oba slučaja se radi o prvim bitnim doprinosima povijesti **numeričke matematike** nakon babilonske metode računanja korijena: iterativne metode korjenovanja i rješavanje sustava linearnih sustava metodom *fang čeng* koja je gotovo identična modernoj, matričnoj Gaußovoj metodi eliminacija. Opišimo ovdje ovo potonje, na konkretnom primjeru, dok ćemo starokinesko korjenovanje opisati nešto kasnije, na str. 69. Napominjemo da su računi u *Devet poglavlja* opisani koristeći štapičaste brojke i „mehanički" (kako pomicati štapiće u pojedinom koraku), no postupak je ekvivalentan ovom kojeg ćemo koristeći moderne brojke opisati na primjeru jednog zadatka iz. 8. knjige *Devet poglavlja* [14, 88].

Primjer 18 *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 39 dou.[3] *Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 34 dou. *Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos* 26 dou. *Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

Postupak je sljedeći. Prvo se ispiše tablica:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Uočimo da je ovo točno transponirana proširena matrica sustava linearnih jednadžbi koji odgovara uvjetima zadatka. Slijedi niz od tri koraka računa (*u prvom se od trostrukog drugog stupca oduzme dvostruki treći i rezultat zapisuje u drugi stupac, u drugom se trostruki prvi stupac oduzme od trećeg i rezultat zapisuje u prvi, a u trećem se od peterostrukog prvog stupca oduzme četverostruki drugi i rezultat zapiše*) *koji redom rezultiraju tablicama:*

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

.

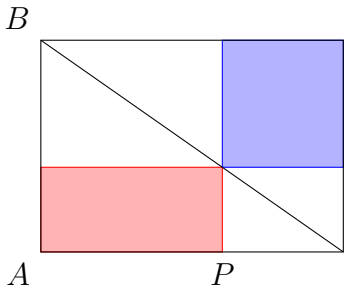
Sad se očita rješenje: Prvo vidimo da je prinos lošeg Ĺlita $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ dou. *Stoga je prinos srednjeg žita* $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou. *Naposlijetku, prinos dobrog žita je* $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou.

Kako je vidljivo iz primjera, postupak je jednak modernoj matričnoj **Gaußovoj metodi eliminacija**, do na to da je u odnosu na suvremeni stil zamijenjena uloga stupaca i redaka (i da se izbjegava račun s razlomcima) [10, 14].

U doba dinastije Han živio je i multidisciplinarni znanstvenik **Džang Heng** (78.–139.), koji je podučavao da je Zemlja kuglastog oblika i konstruirao prvi seizmograf. On je modificirao tada (empirijski) poznato pravilo u kojem se omjer površine kvadrata i površine upisanog mu kruga uzimao kao 4 : 3. Džang Heng je zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao 8 : 5.

Zadatak 15 *Izračunajte kojim aproksimacijama broja* π *odgovaraju ova dva pravila.*

[3] Dou je kineska mjera volumena, u to doba iznosila je otprilike današnjih 2 L.



Slika 5.4: Liu Huijeva metoda određivanja visine nedostupnih objekata.

Za tu Džang Hengovu aproksimaciju saznajemo iz komentara *Devet poglavlja*, koje je napisao prvi značajniji poimence poznati kineski matematičar **Liu Hui** (3. st.). On je opisao postupak sličan Arhimedovom iterativnom postupku, za kojeg zasigurno nije znao, te je uočio da se takvim postupkom može po volji dobro aproksimirati konstanta koju danas zovemo π. Liu Hui je za praktične račune zagovarao aproksimaciju $\frac{157}{50} = 3{,}14$. Napomenimo ovdje da je već u *Devet poglavlja* bio poznat točan odnos površine i opsega kruga (površina kruga je četvrtina umnoška opsega i promjera). U svojim komentarima *Devet poglavlja* Liu Hui je objasnio i opravdao postupke koji se u njima nalaze [13, 19, 88]. Dio Liu Huijevih komentara kasnije je odvojen u zasebni *Matematički priručnik o jednom otoku u moru*, gdje se bavi određivanjem udaljenosti i veličina nedostupnih objekata.

Primjer 19 *U* Matematičkom priručniku o jednom otoku u moru *nalazimo ovaj zadatak: Dvaštapa visine* 3 *džang*[4] *zabijeni su u zemlju i razmaknuti* $1000\,\text{bu}$. *Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji* $123\,\text{bu}$ *iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji* $127\,\text{bu}$ *iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?*

Kao rješenje je navedeno: Neka je brojnik jednak visini štapa pomnoženoj s razmakom štapova, neka je nazivnik razlika odmaka od štapova. Doda li se kvocijentu visina štapa dobije se visina otoka. Za udaljenost bližeg štapa do otoka nazivnik je isti, ali brojnik je razmak štapova pomnožen s odmakom od prvog, a kvocijentu se ne pribraja ništa.

Iako ovdje nije objašnjeno, iz ostalih zadataka se vidi da je Liu Hui ovakve zadatke rješavao izjednačavanjem površina pravokutnika s obiju strana dijagonale u većem pravokutniku. Pogledajmo skicu 5.4. Na njoj su površine plavog i crvenog pravokutnika jednake. Ako je $h = |AB|$ *visina otoka i* $d = |AP|$ *razmak od otoka do jednog od štapova, onda ako izjednačimo navedene površine za prvi štap dobijemo* $3\ \text{džang} \times d = 123\,\text{bu} \cdot (h - 3\ \text{džang})$, *a ako isto učinimo za drugi štap dobijemo* $3\ \text{džang} \times (1000\,\text{bu} + d) = 127\,\text{bu} \cdot (h - 3\ \text{džang})$. *Oduzmemo li te jednakosti dobivamo navedeno pravilo za visinu otoka* (*ispadnu* $753\ \text{džang} = 1255\,\text{bu}$).

Vratimo se još malo *Aritmetici Džouovog gnomona* i *Devet poglavlja*. U prvom već nalazimo postupak za **računanje drugih korijena**, a taj je u *Devet poglavlja* poopćen na računanje trećih korijena. Te postupke je komentirao i geometrijski objasnio Liu Hui. Ovdje ćemo opisati samo starokineski iterativni postupak za određivanje cjelobrojnog dijela drugog korijena zadanog broja [10, 14, 88]. Za razliku od babilonske (Heronove) metode, ovdje se znamenke određuju redom, od prve nadalje.

[4] 1 džang = 10 či, odnosno u to doba 1 džang je bio otprilike 2,3 m. Uz to je korištena i jedinica bu: 1 bu = 6 či.

Primjer 20 *Izačunajmo* $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor$. *Očito je to troznamenkasti broj* (abc), *tj.* $55225 = (100a + 10b + c)^2$. *Stoga je*

$$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\, c,$$

iz čega isprobavanjem vidimo da je $a = 2$. *Stoga je*

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)\, c,$$

odakle opet isprobavanjem vidimo da je $b = 3$. *Preostaje*

$$2325 = (460 + c)\, c,$$

pa je $c = 5$, *odnosno* $\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = \sqrt{55225} = 235$.

Kao što smo rekli, nakon 3. st. n. e., došlo je do zastoja u razvoju kineske znanosti. Do novog procvata kineske matematike došlo je u 7. st., u doba dinastije Tang (618.–907.). U to je doba u Kini dominirao budizam, a nešto kasnije, u razdoblju vlasti sjeverne pa južne dinastije Sung (960.–1278.) konfucijanizam je postao obavezan. U to je doba izumljen tisak s pomičnim slovima i uvedeni su državni ispiti za službenike. Nakon što su u 13. st. Kinu osvojili Mongoli došlo je do značajnijih kontakata sa zapadom[5] te daljnji razvoj kineske matematike nećemo pratiti [10, 103]. U razdoblju 7.–13. stoljeÄ‡a Kinezi su značajno unaprijedili teoriju brojeva i numeričku matematiku. U tom su razdoblju stare metode korjenovanja, tj. rješavanja jednadžbi oblika $x^2 = A$ i $x^3 = B$, prvo poopćene na iterativne metode rješavanja općih kubnih jednadžbi, a onda i jednadžbi višeg stupnja. Vrhunac tog razvoja postigao je znameniti kineski matematičar **Ćin Điušao** (1202.–1261.), koji je u svom glavnom djelu*Šušu džiudžang* (*Devet knjiga o matematici*, 1247.) opisao rješavanje polinomijalnih jednadžbi proizvoljnog stupnja metodom koju naziva *tjen juan*, a koja je u biti **Hornerov algoritam**. Ćin Điušao je u svojih *Devet knjiga o matematici* opisao i opć slučaj **kineskog teorema o ostacima**, no kineski interes za teoriju brojeva bitno je stariji [10, 103].

Najstariju poznatu pojavu kineskog teorema o ostacima nalazimo kod matematičara **Sun Dzija** (3., 4. ili 5. st.). U svom glavnom djelu *Sundzi suandžing* (*Sun Dzijev matematički priručnik*) nalazimo sljedeći zadatak: „Tu je nepoznati broj stvari. Ako se prebroje po tri, ostatak je 2. Ako se prebroje po pet, ostatak je 3. Ako se prebroje po sedam, ostatak je 2. NaÄ‘i broj stvari." Rješenje koje navodi Sun Dzi je: „Odgovor: 23. Metoda: Ako brojimo po tri i imamo ostatak 2, zapišemo 140. Ako brojimo po pet i ostatak je 3, zapišemo 63. Ako brojimo po sedam i ostatak je 2, zapišemo 30.[6] Zbrojimo i dobijemo 233[7] pa oduzmemo 210 da dobijemo odgovor". Sun Dzi daje i još jedan primjer s kongruencijama modulo 3, 5 i 7, ali s ostacima 1 u sve tri, u iz kojeg postaje jasno da je u zadnjem koraku oduzet najveći mogući višekratnik od 105, odnosno da traži najmanje rješenje modulo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ [10].

Vezano za teoriju brojeva spomenimo još i da se u jednom aritmetičkom priruÄŤniku iz 5. st. pojavljuje tip zadatka koji je bio popularan u raznim kulturama i vremenima, a koji je poznat pod imenom **zadatak** 100 **ptica**. Zadatak glasi: „Ako jedan pijevac košta 5

[5]Marko Polo je 1275. stigao u Peking.

[6]UoÄŤimo da je to toÄŤno kako i danas radimo: Ako je dan sustav kongruencija $x \equiv a_i (\mod n_i)$, $i = 1, \ldots, n$, gdje su n_i-ovi relativno prosti, prvo se za svaku kongruenciju računa a_i pomnožen sa svim n_j-ovim osim samog n_i.

[7]Dakle, računamo $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j \neq i} n_i$.

novčića, jedna kokoš 3, a tri pilića zajeno 1, koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za 100 novčića ako treba kupiti ukupno 100 ptica?". Vidimo da se takvi zadaci iz moderne perspektive gledano sustavi diofantskih jednadžbi. Navedena su tri rje senja: Prvo su 4 pijevca za 20 novčića, 18 kokoši za 54 i 78 pilića za 26 novčića. Drugo su 8 pijevaca za 40, 11 kokoši za 33 i 81 pilić za 27 novčića. Treće je 12 pijevaca za 60, 4 kokoši za 12 te 84 pilića za 28 novčića. Kao poopćenje je navedeno da se treba pribrojiti 4 broju pijevaca, oduzeti 7 od broja kokoši i dodati 3 broju pilića da se dobiju ostali odgovori [10, 64].



Matematika u staroj Kini...

... počela se razvijati već u doba starog Egipta i Mezopotamije, ali iz tih ranih vremena nema sačuvanih matematičkih tekstova. Poznato je da se u to rano doba mogu susresti 3×3*-magični kvadrati i najstariji poznati primjer varijacija s ponavljanjem te da je od ca. 1200. pr. Kr. korišten dekadski pozicijski sustav bez nule. Od 4. st. pr. Kr. brojke postaju štapičaste, a od 2. st. pr. Kr. pojavljuje se razlikovanje pozitivnih i negativnih brojeva. Najstariji sačuvani matematički tekst, „Aritmetika Džouovog gnomona", nastala oko prijelaza era, sadrži pravilo gou gu (Pitagorin poučak) i numeričko računanje drugih korijena. Najznačajniji starokineski matematički tekst je „Devet poglavlja umijeća računanja", vjerojatno iz* 2*. st., u kom možemo naći i de facto Gaußovu metodu eliminacija za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i numeričko računan je drugih i trećih korijena. U to doba je starija empirijska pravila za računanje površina i opsega krugova odgovarali modernoj aproksimaciji* 3 *za* π *Džang Heng popravio na pravilo koje odgovara* $\pi \approx \sqrt{10}$*. U* 3*. st. je Liu Hui u komentarima doradio „Devet poglavlja" i druge starije rezultate, uključivo originalne metode izračunavanja veličina nedostupnih objekata. U razdoblju* 7.–13*. st. su starije metode korjenovanja poopćene prvo na numeričko rješavanje kubnih jednadžbi, a kasnije i jednadžbi proizvoljnih stupnjeva de facto Hornerovim algoritmom. Karakterističan je i kineski interes za teoriju brojeva, te najkasnije u* 5*. st. nalazimo prve pojave kineskog teorema o ostacima i zadatka sto ptica.*

5.2 Staroindijska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

** broj i brojka * dekadski pozicijski sustav * geometrija * π * nula * aritmetika * negativni brojevi * trigonometrija * sinus i kosinus * interpolacija * numerička matematika * Heronova metoda * Newtonova metoda * diofantske jednadžbe * Pellova jednadžba * kombinatorika*

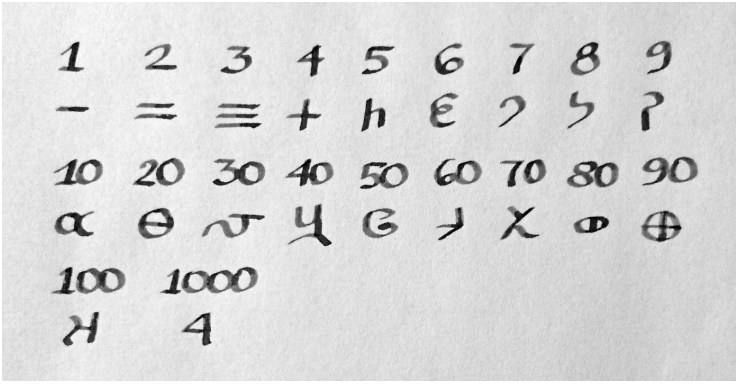
Podsjetimo se glavnih momenata rane indijske povijesti. U 3. tisućljeću pr. Kr. razvile su se prve gradske civilizacije oko rijeke Ind. Iza 1500. pr. Kr. na to se podruÄŤje naseljavaju indoarijski doseljenici, koji su s vremenom uspostavili plemenska kraljevstva. Tada nastupa i tzv. razdoblje veda, koje ovisno o datiranju poÄŤinje negdje izmeÄ‘u 1500. i 1200. pr. Kr., a zavrĹˇava izmeÄ‘u 800. i 500. pr. Kr. Najstariji sačuvani indijski matematički tekstovi potječu upravo iz razdoblja veda. U to doba, dakle sredinom prvog tisućljeća pr. Kr., pojavljuju se tri najznačajnije indijske religije, hinduizam (vede su vjerski tekstovi koji čine njegov temelj, pisane na sanskrtu, jeziku brahmana) te budizam i džainizam. Prodorom Aleksandra Makedonskog do Inda (327.–325. pr. Kr.) dolazi do prvog značajnijeg kontakta sa zapadnim svijetom, te se u sljedećim stoljećima može uočiti helenistički utjecaj na indijsku kulturu i civilizaciju. U to doba je razvijen i brahmanski brojevni sustav, dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10^k$ s $n = 1, \ldots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000 (slika 5.5). Vrhunac stare indijske civilizacije predstavlja doba vladavine dinastije Gupta (320.–544. A. D.); carstvo Grupta je na vrhuncu pokrivalo veći dio sjevera indijskog potkontinenta. Tijekom 5.–12. st. vladale su razne dinastije u malim državama, ali je u to doba postignut vrhunac indijske matematike. U skladu s navedenim, staroindijska matematika razdvaja se na dva glavna razdoblja, prvo iz doba veda, a drugo od 5. st. nadalje. U oba razdoblja karakteristike indijske matematike su, slično kineskoj te egipatskoj i babilonskoj matematici, prvenstveno praktična orijentacija, te uglavnom iskustveni rezultati bez dokaza [103].

Prvo spomenuto razdoblje indijske matematike poznato je kao **doba sulbasutri**, otprilike 8.–5. st. pr. Kr. Sulbasutre, u prijevodu „Pravila konopa“, su dodatci vedskim tekstovima, a opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara. Većina sulbasutri nose imena svojih autora. S matematičke strane, sulvbasutre sadrže rezultate iz elementarne geometrije (računanje površina i volumena, Pitagorin poučak i dr.). Primjerice, u Baudhāyana-sulvasutri (ca. 800. pr. Kr.) nalazimo tekst:

> „Konop rastegnut preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata“.

Sva pravila u sulbasutrama su dana bez dokaza. Neke konstrukcije su egzaktne, a neke aproksimativne, no nigdje se ne ističe razlika izmeÄ‘u njih, odnosno možemo reći da su za stare Indijce racionalni i iracionalni brojevi bili ravnopravni. U sulbasutrama nalazimo i različite procjene površine kruga (najčešće se kao stranica kvadrata iste površine kao krug uzima $\frac{13}{15}$ promjera, što odgovara ne baš dobroj aproksimaciji $\pi \approx 3,\ 00444$). Indijci su imali interes i za teoriju brojeva, a već u sulbasutrama nalazimo pitagorejske trojke $(5, 12, 13)$, $(12, 16, 20)$, $(8, 15, 17)$, $(15, 20, 25)$, $(12, 35, 37)$, $(15, 36, 39)$, $\left(2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}\right)$, $\left(7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2}\right)$. [10, 103].

Značajnije je doba vrhunca razvoja staroindijske matematike, koje započinje tijekom vladavine dinastije Gupta. U ovom razdoblju Indijci su dali mnoge značajne doprinose matematici, a u to doba razvio i najvažniji staroindijski doprinos matematici, **dekadski**



Slika 5.5: Brahmanske brojke poÄŤetkom nove ere.

pozicijski sustav s nulom. On se razvio postepeno iz spomenutih brahmanskih brojki, no ovdje treba napomenuti da su početkom ovog razdoblja bili korišteni i alfasilabički brojevni sustavi, u kojima slogovi (točnije, suglasnici s dijakritičkim znakovima) predstavljaju znamenke. Nula kao znamenka pojavljuje se najkasnije u 9. st., što potvrđuje natpis na jednom hramu u Gwalioru južno od Delhija, datiran 876. Nulu su Indijci nazvali *sunya* (praznina). U arapskom prijevodu to je postalo *sifr*, što je pak u srednjem vijeku u latinskom prijevodu postalo *zephirum* ili *cifra*. Za staroindijsku matematiku karakteristični si razvoji računskih postupaka (*ganita* — znanost o računanju). Tako su Indijci tijekom 1. tisućljeća A.D. razvili efikasne algoritme za računanje u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom. Čini se da je najstariji spis koji ih opisuje rukopis Bakhshali, koji se dugo datirao vrlo nesigurno između 300. i 1200., no prema datiranju ugljikom provedenom 2017., smatra se da rukupis potječe iz 3. ili 4. st. A. D., dakle čini se da je već tada — prije početka razdoblja vrhunca indijske matematike — bio razvijen dekadski pozicijski sustav s nulom. Detaljan opis pravila računanja s prirodnim brojevima i razlomcima može naći kod **Mahāvīre** (9. st.), autora prvog indijskog samo matematici posvećenog teksta [10, 70, 103].

Prvi poimence poznat indijski matematičar bio je **Aryabhata I. (Aryabhata stariji)** (ca. 476.–550.). Njegovo glavno (i jedino sačuvano) djelo je *Āryabhaṫīya*, astronomsko djelo pisano (tipično za staroindijske matematičke tekstove) u stihovima. *Āryabhaṫīya* sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate (aritmetičke, algebarske te trigonometrijske), bez dokaza. Iz istog doba, možda stotinjak godina stariji, je također astronomski tekst *Surya Siddhanta*. Ova dva djela su najstariji poznati tekstovi koji sadrže tablice sinusa (polutetiva, na sanskrtu *jy(v)a*),[8] a ne starogrčkih tetiva. Može se reći da moderna trigonometrija potječe iz Indije u 1. tisuÄ‡ljeÄ‡u A.D., iako ju nikad nisu sustavno razvijali. Za razliku od Ptolemeja, Indijci su ne samo uočili da je praktičnije tabeliranje polutetiva od tetiva, nego su koristili i samo jednu mjeru duljine za promjer i opseg: Kružnicu su podijelili na 21600 dijelova („minuta“) i duljina takvog jednog dijela korištena je za iskazivanje duljina i kružnih lukova i (polu)tetiva. Tako Aryabhata I. piše:

> „Dodaj 4 k 100, pomnoži s 8 i svemu dodaj 62000. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom 20000.“

[8] Zapravo je *jy(v)a* [džj(v)a] izraz za tetivu, ali se tijekom prvog tisućljeća naše ere ustalio kao naziv za polutetivu.

Zadatak 16 *Koe polumjeru kružnice i kojoj aproksimaciji broja π odgovara ovaj Aryabhatin postupak?*

Aryabhatin postupak i veličina korištene kružnice postali su standard u većini indijskih trigonometerijskih tablica. Tablica polutetiva u *Surya Siddhanta* je pak konstruirana koristeći pravilo koje danas zapisujemo

$$r\sin(n\phi) = r\sin((n-1)\phi) + r\sin\phi - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k\pi)}{\sin\phi}$$

($\phi = 3°45'$, $n = 1, \ldots, 24$), dok je Aryabhata samo naveo razlike između po dviju uzastopnih tetiva, $r\sin(n\phi) - r\sin((n-1)\phi)$. Tijekom sljedećih stoljeća otkrivena su i druga pravila ekvivalentna mnogim poznatim trigonometrijskim formulama, a pojavljuju se i kosinus (*kotijya*, $r\cos\alpha$) i *sinus versus* ($r\,(1-\cos\alpha)$). U 10. st. se sinusi i kosinusi gledaju u sva četiri kvadranta. Ipak, indijska **trigonometrija** nije postala sustavna disciplina, nego se radilo o rješavanju pojedinačnih problema u astronomske svrhe. Prije nego se osvrnemo na ostale indijske doprinose, spomenimo kratko etimologiju današnjeg izraza sinus: Arapi su sanskrtski izraz *jya* (džja) transliterirali u *džiba*. No, u arapskom pismu bilježe se samo suglasnici pa je pri prijevodu jednog arapskog djela Robert iz Chestera 1154. tu riječ interpretirao kao *džaib*, značenja prsa, izrez na haljini, izdignuće. Stoga je to preveo latinskom riječju *sinus* (zaobljenost, uvala, prsa) [10, 49, 103].

Indijci nisu samo uveli nulu kao znamenku, nego i kao broj. **Nula** kao broj pojavljuje se najkasnije u 7. st., kako saznajemo iz spisa jednog od najznačajnijih staroindijskih matematičara **Brahmagupte**, ca. 598.–670.). Brahmagupta nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Kod njega se može naći i opis pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i negativnim brojevima te nulom.[9] Kao i nula, negativni brojevi su u Indiji vjerojatno bili poznati nekoliko stoljeća ranije (no vjerojatno kasnije nego u Kini), no prvi put se njihova svojstva u računskim operacijama analiziraju kod Brahmagupte. Brahmagupta je u povijesti matematike zapamćen i po otkriću Brahmaguptinog teorema (u tetivnom četverokutu s okomitim dijagonalama visine iz sjecišta dijagonala na pojedine stranice prepolavljaju njima nasuprotne) i Brahmaguptine formule (poopćenje Heronove formule na tetivne četverokute: $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$). Kod njega susrećemo i jednu od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a). Dok su ranije indijske metode bile *de facto* linearna interpolacija, Brahmagupta je naime opisao pravilo koje odgovara modernoj Stirlingovoj interpolacijskoj formuli. Također su Indijci, kao i Kinezi, osmislili iterativne postupke za računanje drugih i trećih korijena. Većina ih je bila slična opisanoj starokineskoj metodi temeljenoj na binomnoj formuli: ako je $N = x^2$ (odnosno $N = x^3$) i imamo prvu procjenu a za x, onda je $x = a + b$ i $N - a^2 = 2ab + b^2$ (odnosno $N - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$), pa se to može slično kao i u starokineskoj metodi iskoristiti za određivanje b. No, poznata je i jedna specifična staroindijska metoda za računanje drugog korijena, koja je *de facto* Newtonova metoda primijenjena na aproksimativno rješavanje jednadžbe $x^2 = N$. Tu metodu nalazimo u već spomenutom rukopisu Bakhshali. U biti, radi se o korigiranoj babilonsko-Heronovoj metodi, no nije poznato kako su stari Indijci došli do nje. U rukopisu nalazimo njezino pravilo izraženo riječima:

[9] Iznimka u ispravnosti pravila kod Brahmagupte je dijeljenje s nulom: kod Brahmagupte je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $\frac{m}{0}$.

> „U slučaju nekvadratnog broja, oduzmi najbliži kvadratni broj, podijeli ostatak s dvostrukim tim najbližim kvadratom; pola kvadrata od toga se podijeli sa zbrojem približnog korijena i razlomka; to se oduzme i dati će ispravljeni korijen".

Opišimo tu metodu na moderan način. Neka je N nekvadratni broj kojeg želimo korjenovati i neka je x_i trenutna aproksimacija za $\sqrt{N}$, pri čemu je $x_i^2 < N$. Označimo li $b_i = N - x_i$, sljedeća (bolja) aproksimacija je

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Kako vidimo da se radi o korigiranoj Heronovoj metodi? Da nema oduzetog člana, pravilo bi bilo

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i^2 + b_i}{x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 + N}{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right).$$

Napomenimo da iako bi suvremeni matematičar uzimao točnu vrijednost x_i (ili bar vrijednost s puno više decimala od tražene točnosti), u duhu rukopisa Bakhshali je uzimati po jednu decimalu više nego u prethodnom koraku. No, ako bismo uvijek uzimali točnu zadnju aproksimaciju, ova metoda vrlo brzo konvergira [10, 99].

Primjer 21 *Izračunajmo aproksimaciju za $\sqrt{2}$ metodom iz rukopisa Bakhshali uz početnu aproksimaciju $x_0 = 1$ ($1^2 < 2$), na točnost od bar dvije decimale. Računamo:*

- $x_0 = 1$, $b_0 = 2 - 1 = 1$;
- $x_1 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$, *dakle uzimamo* $x_1 = 1{,}9$. *Problem je sad da je* $x_1^2 > N = 2$, *dok je pretpostavka metode da je trenutna aproksimacija uvijek* manja *od točne vrijednosti. Stoga se u takvom slučaju zadnja znamenka odabrane nove aproksimacije smanjuje za 1 sve dok ne dobijemo aproksimaciju čiji kvadrat je manji od N. U našem slučaju stoga $x_1 = 1{,}9$ zamjenjujemo s $x_1 = 1{,}4$ (točno na jednu decimalu) pa je $b_1 = 2 - 1{,}4^2 = 0{,}04$;*
- $x_2 = 1{,}4 + \frac{0{,}04}{2{,}8} - \frac{\left(\frac{0{,}04}{2{,}8}\right)^2}{2\left(1{,}4+\frac{0{,}04}{2{,}8}\right)} = 1{,}41421356\ldots$. *Iako bi sad izvorni algoritam uzeo samo* $x_2 = 1{,}41$ *(točno na dvije decimale), uočimo da egzaktni x_2 kojeg smo dobili ima grešku tek na devetoj decimali.*

U klasično doba Indijci su razmatrali razne diofantske jednadžbe, posebice jednadžbu koju danas nazivamo Pellovom. **Pellova jednadžba** $nx^2 + 1 = y^2$ ime nosi po engleskom matematičaru Johnu Pellu, koji ju je opisao u 17. st., no s njom se bavio već Brahmagupta, koji je otkrio Brahmaguptin identitet

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac \mp nbd)^2 + n(ad \pm bc)^2$$

i koristio ga za zaključivanje o rješenjima Pellovih jednadžbi.

Brahmaguptine metode za rješavanje Pellove jednadžbe je dalje razvio najveći matematičar klasičnog indijskog razdoblja, **Bhāskara II.** (1114.–1185.). On je otkrio jedan algoritam za računanje rješenja Pellove jednadžbe (tzv. „ciklička metoda") te je u svom

djelu *Siddhānta-śiromaṇi* tako dobio rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$. Napisao je dva čisto matematička djela: *Līlāvatī* (smatra se da ga je napisao da utješi kćer oko proročanstva da se nikad neće udati) i *Bijaganita*. Iz njih saznajemo da je Bhaskara II. primjerice znao da jednadžba $x^2 = 9$ ima dva rješenja, detaljno je opisao račun u dekadskom pozicijskom sistemu (kod njega dijeljenje s nulom kao rezultat daje beskonačno),, a poznavao je i adicijski teorem za sinus. Iz *Līlāvatī* se vidi i da su mu bila poznata pravila za računanje kombinacija i permutacija. Tu nalazimo zadatke poput „Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 vrata?" i „Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 atributa u njegovih 10 ruku?", iz čijih rješenja se vidi da je razumio da je broj permutacija od n elemenata jednak $n!$, odnosno varijacija s ponavljanjem dva elementa (uređenih n-torki dvočlanog skupa) 2^n. Općenito, stari Indijci su se najkasnije u 6. st. pr. Kr. bavili i prebrajanjem različitih rasporeda. Tada je Sushruta u jednom tekstu nabrojio moguće okuse koji nastaju iz 6 osnovnih (slatko, kiselo, slano, ljuto, gorko, trpko), a tekst *Brhatsamhita* iz 6. st. A.D. opisuje kako dobiti mirise miješanjem 4 od 16 sastojaka u različitim omjerima, te se navodi 1820 mogućnosti odabira 4 od 16 sastojaka, Ĺˇto zasigurno nije dobiveno direktnim prebrojavanjem. Stoga moĹľemo reÄ‡i da u staroindijskoj matematici nalazimo temelje **kombinatorike**.

Matematika u staroj Indiji...

... kao i kod drugih starih civilizacija ne sadrži dokaze. Prvo razdoblje indijske matematike je doba sulvasutri, sredinom prvog tisućljeća pr. Kr. U sulvasutrama, dodacima vedama, nalazimo razne geometrijske konstrukcije, bez razlikovanja egzaktnih i aproksimativnih. Tijekom prijelaza era postepeno se počinje razvijati dekadski pozicijski sustav s nulom, koji je razvijen najkasnije do 9. st., vjerojantije već prije 4. st. Razdoblje vrhunca indijske matematike je period 5.–12. st., u kojem su indijski matematičari uveli račun polutetiva, dakle sinusa i dalje razvili trigonometrijske tehnike, ali isključivo u svrhu astronomije. Uvedena je i nula kao broj, a uz razvoj tehnika i pravila računanja, doprinose su dali i temeljima kombinatorike, iterativnim metodama za korjenovanje, metodama interpolacije i metodama rješavanja Pellove jednadžbe. Najznačajniji matematičari tog razdoblja su Aryabhata stariji (5./6. st.), Brahmagupta (7. st.) i Bhaskara II. (12. st.).

Poglavlje 6

Matematika u srednjevjekovnom arapskom svijetu

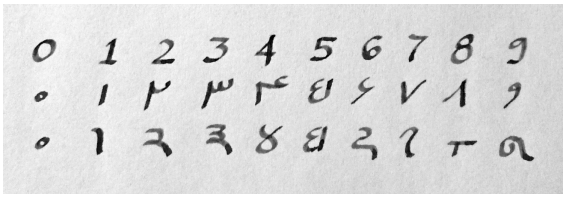


Matematički pojmovi u ovom poglavlju

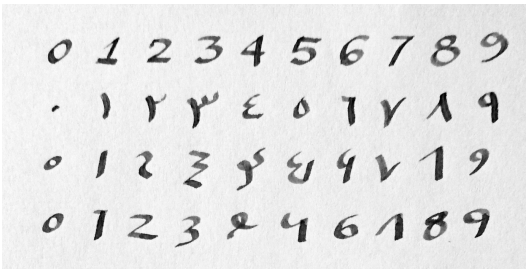
** broj i brojka * dekadski pozicijski sustav * decimalni razlomci * linearne i kvadratne jednadžbe * algebra * polinomi * algoritam * matematička indukcija * teorija brojeva * diofantske jednadžbe * Wilsonov teorem * prijateljski brojevi * trigonometrijski omjeri * Pitagorin poučak * Newtonova metoda tangente * iterativne metode*

Iz opće kulture dobro je poznato da je u 7. stoljeću prorok Muhamed utemeljio islam. Islamski kalendar je lunarni kalendar koji započinje s Hidžrom, Muhamedovim odlaskom iz Meke u Medinu 622. godine. Nakon Muhamedove smrti 632., njegovi nasljednici (kalifi) započeli su osvajanja. Do kraja 7. st. osvojili su područja Mezopotamije, Perzije i Egipta, a početkom 8. st. i velik dio Iberskog poluotoka i mnoga druga područja. Nakon kračih razdoblja Rašidunskog te Omejidskog kalifata, razdoblje Abasidskog kalifata (750.–1258.) ističe se znanstvenim doprinosima, a većinu vremena prijestolnica mu je bila Bagdad. Znanost s područja Abasidskog kalifata (čak i još neko vrijeme nakon pada Bagdada pod vlast Mongola) obično se naziva arapskom jer je službeni jezik bio arapski, no ne smije se zaboraviti da su znanstvenici ovog „arapskog“ razdoblja bili različitih nacionalnosti i vjera. Matematičari Abasidskog kalifata uspjeli su objediniti grčku deduktivnu matematičku tradiciju s praktičnije orijentiranom indijskom matematikom. Uz to su Arapi su zaslužni za transfer indijskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom u zapadni svijet te za transfer grčke znanstvene tradicije u Europu (podsjećamo, Rimljani nisu imali interesa za znanost te je glavni dio saznanja o antičkoj grčkoj znanosti u srednjevjekovnu Europu došao ne kroz ostavštinu Rimljana, već kroz kontakt s Arapima).

Kalifi Abasidskog kalifata su slali svoje izaslanike da na osvojenim područjima sustavno skupe znanstvena i filozofska djela, a ta su djela isto tako sustavno (i kvalitetno, od strane znanstvenika) prevođena na arapski jezik. Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski jezik bio je znameniti kalif **Harun al-Rašid**, koji je vladao 768.–809. S njime je započelo tzv. zlatno doba islama. U Bagdadu je njegov sin, kalif **al-Ma'mun** (vladao 813.–833.) pretvorio **Kuću mudrosti** (*Bait al-Ḥikma*) u znanstveni centar koji je poput ranije *mouseiona* uključivao akademiju i knjižnicu. Kuća mudrosti je ostala glavni znanstveni centar arapskog svijeta sve do pada Bagdada pri provali Mongola (1258.). I nakon Haruna al-Rašida i al'Mamuna kalifi su nastavili poticati prevođenje znanstvenih djela, a samo prevođenje se smatralo dijelom istraživanja



Slika 6.1: Usporedba ranih arapskih znamenki (drugi red) i nagari-znamenki (treći red).



Slika 6.2: Suvremene znamenke dekadskog pozicijskog sustava te njihova istočnoarapska inačica (u drugom redu), zapadnoarapske *ġobār*-znamenke iz 10. st. te europske znamenke iz 13. st.

i doprinosa znanstvenom napretku. Tako su do 10. st. na arapski jezik prevedeni *Elementi* i još neka Euklidova djela, zatim Arhimedovi *O sferi i valjku* i *O mjerenju kruga*, gotovo sva Apolonijeva djela, Diofantova *Aritmetika*, Menelajeva *Sphaerica*, Ptolemejev *Almagest*, ... Na temelju tih prijevoda su počevši od 9. st. arapski znanstvenici počeli stvarati vlastite, nove, matematičke doprinose. Prije nego više kažemo o njima, osvrnimo se prvo na to zašto suvremene brojke koje svakodnevno koristimo često zovemo arapskim brojkama.

Sve do 10. st. u kalifatu su se paralelno koristila tri tipa aritmetike. Prvi je bio račun na prste, prvenstveno korišten u trgovini i računovodstvu, za koji su se brojevi zapisivali riječima ili pak koristeći arapske alfabetske brojke (abdžad). Za astronomiju se u starogrčkoj tradiciji koristio seksagesimalni brojevni sustav u kombinaciji s abdžadom. No, najkasnije u 8. st. Arapi su došli u dodir s indijskim dekadskim pozicijski sustavom s nulom, koji se nakon Al-Hvārizmīja (vidi niže) proširio arapskim svijetom i do 10. st. postao dominantan. No, simboli znamenki su se mijenjali s vremenom, a i u raznim krajevima kalifata se koristilo donekle različite oblike znamenki. Usporedbu jedne rane verzije arapskih znamenaka iz 11. st. i Nagari-znamenaka sa zapisa iz Gwaliora (9. st.) možete vidjeti na slici 6.1. Ispočetka su dekadski brojevni sustav Arapi koristili na prašnjavim pločama koje su omogućavale isto što i danas ploča i kreda, a u 10. st. je **Al-Uklidisi** (ca. 920.–980.) pokazao kako dekadske brojke i račun s njima prilagoditi za pero i papir. On je i autor najstarijeg poznatog zapisa o koriŭ decimalnih razlomaka. S vremenom su se standardizirala dva skupa dekadskih arapskih znamenki: istočna i zapadna inačica. Istočna se inačica (2. red na slici 6.2) koristi i danas u bliskoistočnim arapskim zemljama pod nazivom indijske brojke. Jedna zapadna inačica, *ġobār* (pješćane brojke) iz 10. st. prikazana je u 3. redu slike **??**, a u zadnjem redu na toj slici su znamenke kakve su korištene u zapadnoj Europi u 13. st., gdje su brojke postale poznate kao arapske jer su preuzete (počevši od kraja 10. st.) od Arapa [70, 89, 103].

Prvi veliki matematičar arapskog svijeta bio je **Al-Hvārizmī** (ca. 780.–850.). Djelovao je u Kući mudrosti u doba kalifa al-Ma'muna, a ne bez razloga zovu ga „ocem algebre".

Za sobom je ostavio više značajnih djela iz astronomije i geografije te dva djela iz matematike: *Kitāb al-džam va'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* („Aritmetika"), o računanju u indijskom dekadskom pozicijskom sustavu, te *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr va'l-mukābalah* („Algebra"), kojim je utemeljio algebru. Oba djela su napisana oko 825. godine.

Al-Hvārizmījeva „Aritmetika" je prvi arapski opis indijskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom. Arapski original je izgubljen, a najstarija sačuvana arapska djela na istu temu su stotinjak godina mlađa. No, Al-Hvārizmījeva „Aritmetika" je od 12. st. nadalje u zapadnoj Europi prevođena na latinski. Nijedan direktni prijevod nije sačuvan, no poznata su četiri teksta iz 12. i 13. st. koji su barem dijelom prijevodi originala: *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris*. Ti su tekstovi kasnije često prepisivani, nadopunjavani i komentirani te objavljivani pod sličnim nazivima. Tako je u zapadnoj Europi naziv za praktično računanje u dekadskom pozicijskom sustavu u razdoblju 13.–15. st. najčešće bio *algorism*, latinizirana verzija Al-Hvārizmījevog imena, koja je s vremenom postala moderna riječ **algoritam** [10, 33].

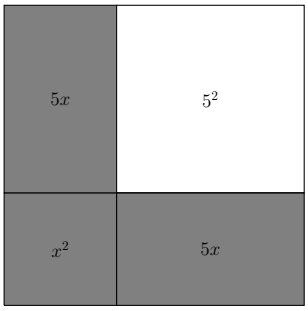
No, Al-Hvārizmī je još poznatiji i važniji po tome što s njegovim djelom *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah* započinje razvoj algebre. To je djelo bilo toliko utjecajno da je iz dijela njegova naziva (*al-džabr*) cijela matematička disciplina dobila ime **algebra**. Al-Hvārizmī svoju „Algebru" započinje predgovorom, u kom navodi da ju je napisao da bi se stanovništvo znalo nositi sa svakodnevnim matematičkim problemima vezanim za nasljeđivanje, trgovinu, podjele imovine ... Zatim opisuje prirodne brojeve i indoarapski dekadski pozicijski sustav. Slijedi opis, prvi u povijesti, jednadžbi kao takvih. Al-Hvārizmī jednadžbe i njihova rješenja opisuje isključivo riječima, bez ikakve algebarske notacije. Za Al-Hvārizmīja, jednadžbe su sastavljene od konstanti („jednostavnih brojeva", *dirham*), stvari (*šaj*,[1] nepoznanica) te bogatog (*mal*, kvadrat nepoznanice). Za razliku od Grka, jedinica je kod Al-Hvārizmīja broj.

Dok bismo mi danas jednadžbe kakve je opisao Al-Hvārizmī dijelili na linearne i kvadratne, to kod Al-Hvārizmīja nije bio slučaj. On je jednadžbe podijelio na šest „sređenih" tipova koje bismo danas zapisali ovako: $x^2 = b\,x$, $x^2 = c$, $b\,x = c$, $x^2 + b\,x = c$, $x^2 + c = b\,x$, $x^2 = b\,x + c$. Razlog ovakve klasifikacije bio je taj da Al-Hvārizmī još nije razmatrao rješenja jednadžbi koja ne bi bila pozitivna, jer ih je interpretirao geometrijski kao duljine, po čemu je jasno vidljiv starogrčki utjecaj na Al-Hvārizmīja. Također, Al-Hvārizmī zahtijeva i da koeficijenti u jednadžbama u njihovom „sređenom" obliku moraju biti pozitivni. Uočimo i da je za sređivanje kvadratnih jednadžbi zahtijevao njihovo normiranje. Za prva tri „jednostavna" tipa jednadžbi samo je dao kratke primjere iz kojih je očito da je od čitatelja očekivao da sam shvati postupak. Zanimljivija su preostala tri tipa jednadžbi. Za njih rješavanje također opisuje na primjerima, ali vrlo detaljnim. Postupci rješavanja su dani čisto računski, no opravdao ih je (opet je vidljiv grčki utjecaj) geometrijski.

Primjer 22 *Kao prototip jednadžbe tipa* $x^2 + b\,x = c$ *Al-Hvārizmī navodi „Mal i deset šaja čine* 39 *dirhama", tj.* $x^2 + 10x = 39$. *Postupak za rješavanje je sljedeći:*

1. *Uzmi pola broja šaja i dobiješ* 5 *(dakle, računa* $\frac{b}{2}$*).*
2. *To kvadriraš i dobiješ* 25 *(dakle, računa* $\frac{b^2}{4}$*).*
3. *Pribroji to broju dirhama i dobiješ* $39 + 25 = 64$ *(dakle, računa* $c + \frac{b^2}{4}$*).*

[1] U srednjevjekovnim latinskim prijevodima to će postati *res*, alternativno *radix* (korijen).



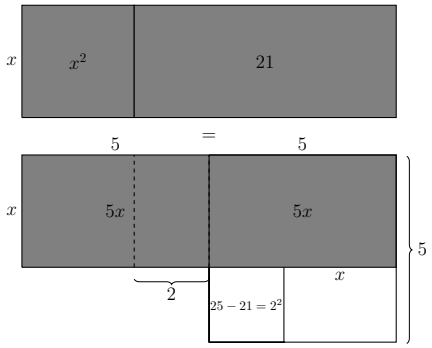
Slika 6.3: Al-Hvārizmījevo opravdanje postupka rješavanja jednadžbe $x^2 + 10x = 39$.

4. *Korjenuješ dobiveno, dobiješ* 8 *(dakle, računa* $\sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$*).*
5. *Od toga oduzmi pola broja šaja i dobiješ* $8 - 5 = 3$*. To je šaj (dakle, rješenje je* $\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$*).*

Primjer 23 *Kao prototip jednadžbe tipa* $x^2 + c = b\,x$*, Al-Hvārizmī daje „Mal i* 21 *dirham čine* 10 *šaja", tj.* $x^2 + 21 = 10x$*. Postupak rješavanja opisan je na sličan način kao u prethodnom primjeru, ekvivalentno modernoj formuli* $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$*. No, ovdje na kraju naglašava mogućnost da se umjesto oduzimanja od pola broja korijena,* $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ *može i pribrojiti polovici broja korijena (*$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$*) te zaključuje: „Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj korijena. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja korijena sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih kvadratu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je korijen jednak polovici broja korijena."*

Iz prethodnog primjera vidimo jednu važnu stvar: Al-Hvārizmī je prva osoba u povijesti koja je uočila da kvadratne jednadžbe mogu imati dva rješenja. No, to je uočio samo za jednadžbe tipa $x^2 + c = b\,x$, jer kod ostalih tipova kvadratnih jednadžbi nikad nemamo dva pozitivna rješenja. Naposlijetku je na sličan način opisao i rješavanje jednadžbi tipa $x^2 = b\,x + c$ koristeći primjer $x^2 = 3x + 4$. Slijedi geometrijsko opravdanje sva tri postupka. Za $x^2 + 10x = 39$ se poziva na EEII4 (vidi sliku 6.3), za $x^2 + 21 = 10x$ se poziva na EEII5 (vidi sliku 6.4), a i posljednji tip slično opravdava, rastavljajući kvadrat površine x^2 na prikladne dijelove (izostavljamo pripadnu sliku). Nakon opravdanja svojih postupaka, Al-Hvārizmī je sažeo postupke, njihove sličnosti i razlike, a istaknuo je i važnost da se u prvom koraku normira koeficijent uz kvadrat nepoznanice (on to naziva svođenjem na „jedan kvadrat") da bi opisani postupci bili korektni.

U nastavku svoje „Algebre", Al-Hvārizmī je opisao množenje binoma s binomima i monomima te množenje i dijeljenje algebarskih izraza koji sadrže korijene. Slijedi 18 primjera kojima ilustrira da se sve kvadratne i linearne jednadžbe mogu svesti na jedan od opisanih šest tipova. To se provodi osnovnim dvjema tehnikama: *al-džabr* (nadopunjavanje, mi bismo rekli: prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti) i *al-mukabala* (izjednačavanje, mi bismo rekli: oduzimanje pozitivnog člana jedne strane jednadžbe od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani). Ilustrirajmo te tehnike koristeći modernu notaciju, ali izvorni Al-Hvārizmījev primjer.



Slika 6.4: Al-Hvārizmījevo opravdanje postupka rješavanja jednadžbe $x^2 + 21 = 10x$.

Primjer 24 *Dana je jednadžba* $(10 - x)^2 + x^2 = 58$. *Prvo se kvadrira binom:* $100 + x^2 - 20x + x^2 = 58$, *tj. jednadžba poprima oblik* $2x^2 - 20x + 100 = 58$. *Operacija al-džabr daje* $100 + 2x^2 = 58 + 20x$. *To se svodi na „jedan kvadrat" dijeljenjem s* 2*:* $50 + x^2 = 29 + 10x$. *Naposlijetku, al-mukabala svodi jednadžbu na standardizirani sređeni oblik* $21 + x^2 = 10x$.

Knjiga završava primjerima „za utvrđivanje gradiva" (neki uključuju izraze s razlomljenim članovima i nepoznanicom u nazivniku) te dodatkom u kojem obrađuje razne primjene matematike (nasljeđivanje, građevina, ...) [10, 26, 57, 61].

Prvi značajniji nastavljač Al-Hvārizmījeva djela bio je **Abū Kāmil Šujā** (ca. 850.–930.). O njegovom se životu ne zna ništa osim približnih godina rođenja i smrti te da je vjerojatno potjecao iz Egipta. Bavio se algebrom, teorijom brojeva i geometrijom. Njegova „Knjiga o algebri" postala je jedna od osnova za Fibonaccijeva djela te je stoga Abū Kāmil bitan za širenje algebre u Europi. Abū Kāmil je znao računati i s potencijama nepoznanica većim od kvadrata. Iako i on algebru izlaže riječima, iz njegovih formulacija poput „mal mal šaj" za petu potenciju nepoznanice vidljivo je da je počeo razumijevati identitet $x^m\, x^n = x^{m+n}$. Smatra ga se i jednim od prethodnika matematičke indukcije jer je u svojoj knjizi o algebri „dokazao" identitet kojeg bismo danas zapisali formulom

$$(2n + 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 3 \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Pritom on kreće od slučaja $n = 1$, njega koristi da dokaže slučaj $n = 2$, njega dalje koristi da dokaže slučaj $n = 3$ i tako do $n = 10$. Tu doduše staje, ali jasno kaže da se može tako dalje nastaviti. Bio je prvi arapski matematičar koji je znao rješavati neke diofantske jednadžbe, a u njegovoj „Knjizi ptica", koja se bavi linearnim diofantskim sustavima jednadžbi, nalazimo i varijantu zadatka 100 ptica [10, 26, 60].

Abū Kāmil Šujini suvremenici bila su dva znamenita znanstvenika rođena u Harranu (blizu današnje Şanliurfe u Turskoj), gdje je još od 717. djelovalo prvo sveučilište na svijetu. Prvi od njih je **Ṯābit ibn Kurra** (836.–901.). On je djelovao u Kući mudrosti i osim matematikom se bavio i medicinom, filozofijom i astronomijom. Dao je novi dokaz Pitagorinog poučka te dokazao njegovu generalizaciju, opisao je magične kvadrate, a najpoznatiji je po svojim rezultatima iz teorije brojeva. Iz fascinacije savršenim brojevima proizašao je njegovi interes za **prijateljske brojeve**. Prvi put se spominju, konkretno najmanji takav par 220 i 284, kod postklasičnog helenističkog filozofa Jambliha (3./4. st. A.D.), koji ih pripisuje pitagorejcima (vjerojatnije je ipak da su se prvi put razmatrali tek u doba helenizma). Tābit njihovo otkriće pripisuje Pitagori, spominje da su se njima bavili Euklid i Nikomah iz Geraze, te dokazuje znameniti Tābitov teorem o prijateljskim brojevima:

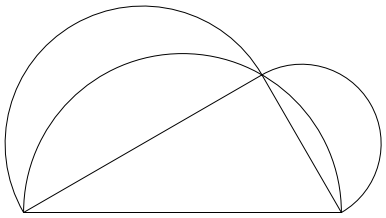
Teorem 10 *Ako su za neki prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\,p\,q$ i $2^n\,r$ prijateljski.*

Za $n = 2$ se dobije antički par 220 i 284, a za $n = 4$ je vjerojatno (budući da dokaz daje baš na primjeru $n = 4$)Ṯābit dobio par 17296 i 18416, kojeg je u 17. st. iznova otkrio de Fermat. Osim ta dva para do danas je poznat samo još jedan slučaj koji se dobije iz Tābitovog teorema i to za $n = 7$. Taj par je otkrio Descartes. Prvu generalniju metodu za nalaženje prijateljskih brojeva otkrio je u 18. st. Euler. Do danas je poznato 1 229 541 583 parova prijateljskih brojeva, a ne zna se ima li ih beskonačno mnogo. Brojevi oblika $3 \cdot 2^n - 1 = (1011\ldots1)_2$ danas se zovu Tābitovim brojevima [26, 16, 15]. Drugi znameniti arapski znanstvenik rođen u Harranu bio je **al-Batānī**, poznat i pod latiniziranim imenog **Albategnius** (ca. 850.–929.). Al-Batānī je jedan od najvećih bliskoistočnih astronoma ne samo tog doba, zvan „arapskim Ptolemejom". Njegovo glavno djelo, *Kitāb al-zīj* („Knjiga o astronomskim tablicama", oko 900.),[2] je početkom 12. st. prevedeno na latinski i bitno je utjecao na renesansne europske astronome uključivo Brahea, Keplera,, Galilea i Kopernika, a sadrži i mnoge matematičke rezultate. Al-Batānī pritom bitno unaprijedio trigonometriju. Izveo je razna trigonometrijska pravila („formule") za pravokutne trokute, primjerice[3] $b\sin\alpha = a\sin(90° - \alpha)$, $b\sin\alpha = a\sin(90° - \alpha)$. Vlastitim metodama tabelirao vrijednosti svih šest standardnih trigonometrijskih omjera: sinus, kosinus, tangens (kojeg je prvi tabelirao još Al-Hvarizmi), te njihove recipročne vrijednosti kosekans, sekans i kotangens [10].

U 10. st. je djelovao perzijski astronom i matematičar **Abū al-Wafā Būzdžānī** (940.–998.). Komentirao je djela svojih arapskih i grčkih prethodnika, novom metodom je izradio vrlo precizne trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kružnici polumjera 1), a za povijest matematike zanimljiv je i po dvije knjige. Prva je „Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima", pisana koristeći princip računananja na prste jer je taj još uvijek bio u uporabi u trgovini u Arapa, a koja je, čini se, jedino arapsko srednjevjekovno matematičko djelo u kojem se pojavljuju negativni brojevi. Druga je „Knjiga o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku", u kojoj nalazimo opise raznih geometrijskih konstrukcija: okomica, parabola, pravilnih mnogokuta (do 10 stranica) opisanih i upisanih kružnicama ili drugim mnogokutima, približne trisekcije kutova, konstrukcije s fiksiranim šestarom, rastave raznih likova na manje, ...Poznat je i njegov izračun udaljenosti Bagdada do Meke, koristeći sfernu geometriju i trigonometriju [10]. Abū al-Vafā Būzdžānījev suvremenik, koji je kao i on djelovao u Bagdadu, bio je znameniti perzijski matematičar i inžinjer **Al-Karadžī** (953.–ca. 1029.). Prema većini izvora on je prva osoba koja je algebru potpuno oslobodila geometrije. Al-Karadžī je u svom djelu *Al-Fakhri fi'l-džabr wa'l-mukabala* definirao monome (osim x^0, ali uključivo negativnih eksponenata, preciznije, x^n za eksponente $n = \pm1, \ldots, \pm6$) i jasno izrekao pravilo kako ih množiti ($x^m x^n = x^{m+n}$, osim za eksponente 0), zatim je razmatrao „složene veličine" (polinome) i opisao kako ih zbrajati, oduzimati i množiti (te dijeliti s monomom). U nekim argumentima je koristio rani oblik matematičke indukcije, slično kao ranije Abū Kāmil, s tim da kod al-Karadžīja susrećemo i indukciju

[2]Od Al-Batānījevih astronomskih rezultata ističemo da je katalogizirao 489 zvijezda, izračunao trajanje godina na 365 dana 5 h 46 min 24 s (što odstupa samo 2 min 22 s od točne vrijednosti), precesiju ekvinocija i nagib ekliptike.

[3]Arapski matematičari i astronomi su od Indijaca preuzeli ideju polutetiva, tj. sinusa.



Slika 6.5: Alhazenova generalizacija prvog tipa Hipokratovih mjeseca.

unatrag (od $n = 10$ do $n = 1$), kojom je dokazao identitet

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Opisao je i binomni teorem i njegovu vezu s Pascalovim trokutom (do eksponenta 5).[4] Bavio se i diofantskim jednadžbama te geometrijom [10, 26, 79].

Al-Hajṭam (poznat i pod latiniziranim imenom **Alhazen**, oko 965.–1040.) je jedan od najznamenitijih znanstvenika zlatnog doba islama. Dao je bitne doprinose matematici, optici, astronomiji, anatomiji, medicini, oftalmologiji, fizici, inženjerstvu općenito, filozofiji, psihologiji i dr. U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao Ptolomaeus Secundus (drugi Ptolemej), a danas se smatra ocem moderne optike. Proveo je mnoge optičke eksperimente i prvi pokazao da vid u oku nastaje uslijed loma zraka svijetla, da je Mjesečevo svjetlo posljedica refleksije, ... U matematici je znamenit **Alhazenov problem geometrijske optike**:

> Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu k traže se točke T na k takve da se u njima zraka svjetla koja izlazi iz A lomi točno prema B.

Alhazen je riješio taj problem koristeći Apolonijevu teoriju konika, no to je rješenje vrlo komplicirano. U 17. st. je Huygens našao jednostavnije rješenje. Poznata je i Al-Hajṭamova generalizacija prvog Hipokratovog mjeseca: Ako bilo kojem pravokutnom trokutu opišemo kružnicu te nacrtamo kružnice kojima su promjeri katete tog trokuta, onda je zbroj površina tako nastalih dvaju mjeseca jednak površini polaznog pravokutnog trokuta (slika 6.5).

Zadatak 17 *Dokažite točnost Alhazenove generalizacije prvog Hipokratovog mjeseca.*

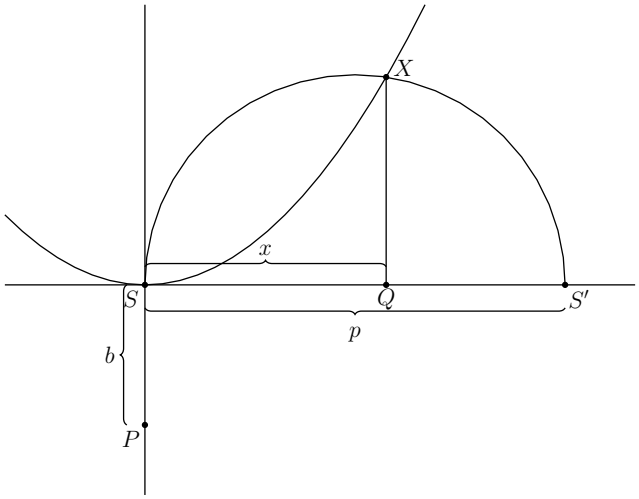
Al-Hajṭam je također pokušao svođenjem na kontradikciju dokazati i Euklidov postulat o paralelama, što je jedan od prvih pokušaja tom metodom i još ćemo ga spominjati (vidi str. 146). Bavio se i savršenim brojevima i navodno da je prije Eulera on bio prvi koji je dokazao teorem o parnim savršenim brojevima. Objasnio je i koristio **Wilsonov teorem** (broj $p > 1$ je prost ako i samo ako je $1 + (p-1)!$ djeljivo s p), kojeg je otkrio još indijski matematičar Bhaskara I. u 7. st., a ime je dobio po engleskom matematičaru Johnu Wilsonu (1741.–1793.) koji ga je iskazao. Prvi poznati dokaz tog teorema dao je Joseph-Louis Lagrange 1773. [10].

Pregled arapskih doprinosa matematici ne može biti potpun bez da se spomene **Omar Hajjam** (Umar Al-Hajjam, 1048.–1131.), perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik

[4] U isto doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

koji je djelovao u doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata. Bavio se Euklidovim petim postulatom. Pritom je uočio grešku prethodnika (da su kao pretpostavku, tj. postulat, uzimali nešto što nije lakše dokazati od izvornog postulata) i umjesto pokušaja dokaza iz ostalih postulata i aksioma, krenuo je od pretpostavke da je Euklid svoje *Elemente* postavio nepotpuno i temeljeno na Aristotelovim pretpostavkama o pravcima i kutovima. Pokušao je EEI29 (prvu propoziciju u *Elementima* za dokaz koje treba postulat o paralelama) zamijeniti s nekoliko pretpostavki i propozicija kojima bi se izbjeglo korištenje postulata o paralelama, no pritom je kao pretpostavku („postulat") uzeo ekvivalentno svojstvo da su paralelni pravci posvuda jednako udaljeni. Hajjam je koristio metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena i poznavao je Pascalov trokut binomnih koeficijenata (kojeg je, kako smo rekli, prije njega opisao al-Karadžī). Ipak, u matematici je najveći trag Hajjam je ostavio svojim djelom *Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-džabr wa'l-mukabala*, poznato kratko kao „Algebra". U njemu je proširio Al-Hwārizmījevu klasifikaciju i na **kubne jednadžbe**. Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom, što je dokazano tek u 19. st. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja, ali je uspio naći samo jedan primjer s dva rješenja. Kao i Al-Hwārizmī, koristeći operacije al-džabr i al-mukabala svodio je sve kubne jednadžbe na kanonske forme u kojima su svi koeficijenti pozitivni (te vodeći koeficijent normiran, a zanemaruje one koje ne mogu imati pozitivnih rješenja). Zapisati ćemo ih modernom simbolikom, ali poštujući princip homogenosti: nepoznanicu x i veličine a, b, c interpretiramo kao duljine, a svi članovi jednadžbe interpretiraju se kao volumeni. Omar Hajjam je dobio 19 tipova jednadžbi. Njih 5 ($x^3 = b^2\,x$, $x^3 = a\,x^2$, $x^3 + a\,x^2 = b^2\,x$, $x^3 = a\,x^2 + b^2\,x$ i $x^3 + b^2\,x = a\,x^2$) se supstitucijom mogu svesti na linearne odnosno kvadratne. Stoga se obično navodi samo 14 Hajjamovih tipova kubnih jednadžbi, od kojih je prvi rješiv korjenovanjem (egzaktno ili numerički), a ostale je Hajjam rješavao presjecima konika (uz svaki tip navodimo kojih):

1. $x^3 = c^3$;
2. $x^3 + b^2\,x = c^3$ (rješenje presjekom parabole i polukružnice, vidi primjer 25);
3. $x^3 + c^3 = b^2\,x$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
4. $x^3 = b^2 x + c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
5. $x^3 + a\,x^2 = c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
6. $x^3 + c^3 = a\,x^2$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
7. $x^3 = a\,x^2 + c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
8. $x^3 + a\,x^2 + b^2\,x = c^3$ (rješenje presjekom hiperbole i polukružnice);
9. $x^3 + a\,x^2 + c^3 = b^2\,x$ (rješenje presjekom hiperbole i polukružnice);
10. $x^3 + b^2\,x + c^3 = a\,x^2$ (rješenje presjekom hiperbole i kružnice);
11. $x^3 = a\,x^2 + b^2\,x + c^3$ (rješenje presjekom dvije hiperbole);
12. $x^3 + a\,x^2 = b^2\,x + c^3$ (rješenje presjekom dvije hiperbole);
13. $x^3 + b^2\,x = ax^2 + c^3$ (rješenje presjekom hiperbole i kružnice);



Slika 6.6: Khayyamovo rješenje kubne jednadžbe tipa $x^3 + b^2\,x = c^3$.

14. $x^3 + c^3 = a\,x^2 + b^2\,x$ (rješenje presjekom dvije hiperbole).

Mi ćemo dati samo jedan primjer njegovog pristupa [10, 26, 86].

Primjer 25 *Riješimo jednadžbu tipa $x^3 + b^2\,x = c^3$ na Khayyamov način. Neka je $p = \frac{c^3}{b^2}$, tj. jednadžbu promatramo u obliku $x^3 + b^2\,x = p\,b^2$. Uzmimo polukružnicu promjera $p = |SS'|$ i parabolu s tjemenom S (slika 6.6). Pritom je os parabole okomita na promjer polukružnice, a razmak fokusa i ravnalice jednak je $\frac{b}{2}$. Neka je X sjecište kružnice i parabole, Q projekcija X na promjer $\overline{SS'}$ te P točka na osi parabole sa svojstvom $|SP| = b$. Budući da X leži na paraboli, vrijedi $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, tj. $|SQ| : |XQ| = b : |SQ|$. No, X je i na polukružnici pa je $\triangle SS'X$ pravokutan. Slijedi da je $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$, pa vrijedi $|SQ| : |XQ| = |XQ| : |QS'|$. Stoga je*

$$b : |SQ| = \frac{|SQ|^2}{b} : (p - |SQ|),$$

dakle je $x = |SQ|$ rješenje jednadžbe $x^3 + b^2\,x = p\,b^2$.

Dok je u 12. st. većina znanosti islamskog svijeta počela biti koncentrirana u zapadnom dijelu kalifata (Maroko, Iberski poluotok), u 13. st. mongolska osvajanja su s dokrajčila stoljetnu tradiciju Bagdada i Abasidski kalifat, ali je njihova posljedica i novi znanstveni i kulturni centar Samarkand (u današnjem Uzbekistanu). **Nasīr ad-Dīn al-Tūsī** (1201.–1274.) je živio u sjevernom Iranu u doba mongolskih osvajanja. Nakon što je Hulegu-Han osvojio tvrđavu Alamut (u kojoj se dotad al-Tusi nalazio), al-Tūsī je ostao u njegovoj službi kao znanstveni savjetnik. Osnovao je opservatorij u Azerbejdžanu (Maragha), a sudjelovao je i u osvajanju Bagdada. Napisao je važna djela o logici, etici, filozofiji, matematici i astronomiji te mnoge komentare grčkih tekstova. Kao i neki drugi arapski matematičari prije njega, koristio je metode za približno računanje 2. i 3. korijena slične indijskim i kineskim. U komentaru Ptolemejeva *Almagesta* (1247.) uveo je razne nove trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa. Najvažniji doprinos mu je odvajanje **trigonometrije** kao zasebne matematičke grane, tj. al-Tūsī je prvi znanstvenik koji ju nije gledao isključivo u službi astronomije. U svom *Traktatu o četverokutu* je dao

prvi potpun prikaz ravninske i sferne trigonometrije (1260.) [10, 26]. Poznati su i at-Tusijeve kruĹĽnice, mehanizam kojeg je predloĹĽio kao objaĹˇnjenje uoÄŤenih odstupanja od Ptolemejevog izvornog modela deferenata i epicikala.

Al-Kāšī (oko 1380.–1429.) je bio posljednji značajni matematičar srednjevjekovnog arapskog svijeta. Nakon siromašne mladosti dospio je u Samarkand, gdje je već postojao opservatorij kojeg je osnovao Timurov unuk **Ulug-beg** (1394.–1449.). Doba Ulug-bega je poznato kao znanstveni vrhunac mongolskog doba. Tu je al-Kāšī postao predstojnik opservatorija i glavni tamošnji astronom i matematičar. Glavno djelo mu je *Ključ aritmetike* (1427.), koje sadrži binomnu formulu, računanje n-tih korijena, numeričko rješavanje jednadžbi iterativnim postupcima, konstrukcije kupola, ... Ovdje nalazimo i opis indijskog brojevnog sustava i računanjem u njemu (čak i s iracionalnostima), a tu je i metoda ekvivalentna Newtonovovoj metodi tangente i teorija **decimalnih razlomaka** i računa s njima (u zapadnu Europu će decimalne razlomke uvesti tek Stevin 135 godina kasnije, no ideja istih može se naći i kod nekih ranijih arapskih matematičara). U *Raspravi o tetivi i sinusu* (moguće da ju je nakon al-Kašijeve smrti dovršio drugi autor) opisao je originalni iterativni numerički postupak za izračunavanje trigonometrijskih tablica. Tako je (znamenku po znamenku iz kubne jednadžbe) odredio $\sin 1^\circ$ na 9 seksagezimalnih, tj. 18 decimalnih mjesta. Dvije zanimljivosti za kraj: U Francuskoj se poučak o kosinusima i dan danas naziva al-Kāšījevim teoremom, a 2π je al-Kāšī (*Raspravi o opsegu*, 1424.) izračunao na 9 seksagezimalnih mjesta odnosno 16 decimala (tek 200 godina kasnije će van Ceulen dobiti bolju točnost) [10, 19, 26].



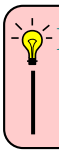
Arapska matematika ...

... predstavlja sintezu egzaktnosti starogrčke tradicije i praktičnog staroindijskog pristupa. Kalifi Abasidskog kalifata poticali su znanost, a glavni znanstveni centar bila je Kuća mudrosti u Bagdadu. Srednjevjekovna Europa je za starogrčke znanstvene rezultate saznala prvenstveno temeljem arapskih prijevoda, a kroz kontakt s Arapima je upoznala i indijski dekadski pozicijski sustav. U Arapa (al-Uklidisi, al-Kāšī) se također pojavljuju i decimalni razlomci. Prvi veliki matematičar arapskog svijeta bio je Al-Hvārizmī, ÄŤija dva matematička djela su nastala oko 825. godine. Jedno se bavi aritmetikom koristeći indijski dekadski pozicijski sustav s nulom, a prijevodi tog djela u srednjevjekovnoj Europi doveli su do izraza algoritam (latinizirano ime Al-Hvārizmī). U Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah*, Al-Hvārizmī po prvi put proučava jednadžbe kao takve. Dao je postupke za rješavanje linearnih i kvadratnih jednadžbi, koje svodi na jedan od* 6 *tipova s pozitivnim koeficijentima. Postupci za rješavanje su računski, ali su dokazi ispravnosti postupaka geometrijski. Sam izraz* al-džabr*, koji označava postupak prebacivanja negativnih članova s jedne na drugu stranu jednakosti, dao je naziv matematičkoj grani algebri. Među nastavljačima Al-Hvārizmījevog djela ističu se Abū Kāmil Šujā, čija knjiga o algebri je utjecala na Fibonaccija, Al-Karadžī, koji je oko 1000. g. algebru potpuno oslobodio od geometrije, te Omar Hajjam, koji je Al-Hvārizmījevu klasifikaciju proširio na* 19 *tipova kubnih jednadžbi, od kojih je* 14 *rješavao presjecima konika. Teoriji brojeva doprinijeli su Abū Kāmil Šujā i Al-Karadži (diofantske jednadžbe), Ṯābit ibn Kurra (prijateljski brojevi) te Al-Hajṭam (objasnio i koristio Wilsonov teorem). Arapi su razvili trigonometriju, polazeÄ‡i od indijskih polutetiva: Al-Batānī je oko* 900. *g. tabelirao šest standardnih trigonometrijskih omjera, Nasīr ad-Dīn al-Tūsī je u 13. st. odvojio trigonometriju od astronomije i uspostavio ju kao granu matematike, a al-Kāšī (isto 13. st.) je originalnim numeričkim postupkom izračunao trigonometrijske tablice visoke točnosti. Zanimljive geometrijske rezultate ostvarili su Ṯābit ibn Kurra (novi dokaz Pitagorinog poučka), Abū al-Vafā Būzdžānī (razne geometrijske konstrukcije, izračun udaljenosti Bagdada do Meke), Al-Hajṭam (Alhazenov problem*

geometrijske optike, generalizacija prvog Hipokratovog mjeseca); poznati pokušaji dokaza postulata od paralelama potječu od Al-Hajṭama i Omara Hajjama. U arapskih matematičara susrećemo i Pascalov trokut i binomni teorem (al-KaradĹľi, Omar Hajjam, al-Kāšī) i zaÄŤetke matematiÄŤke indukcije (Abū Kāmil Šujā, Al-Karadži).

Poglavlje 7

Srednjevjekovna europska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

** aritmetika * algebra * dekadski pozicijski brojevni sustav * Fibonaccijevi brojevi * negativni brojevi * razlomci * redovi * funkcija * graf funkcije **

U 4. st. u Europu su prodrli Huni i Germani, a 375. je podijeljeno Rimsko carstvo. Zapadno rimsko carstvo propalo je 476. i obično se ta godina uzima kao početak europskog srednjeg vijeka. Godine 529. bizantski car Justinijan I. je boreći se protiv pogana zatvorio atensku neoplatonsku Akademiju i time prekinuo tisućljetni razvoj grčke matematike. Rimski filozof i političar **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.) je, na temelju uvoda u teorijsku aritmetiku pitagorejskog stila koju je napisao postklasični helenistički filozof i matematičar Nikomah iz Geraze (1./2. st.), napisao *De institutione arithmetica*. Ta je knjiga usprkos niske matematičke razine bila najutjecajniji matematički tekst tijekom srednjeg vijeka, a korištena je u crkvenim školama sve do 17. st. Boethius je, također u pitagorejskoj tradiciji uveo, naziv ***quadrivium*** za „matematičke predmete" aritmetiku, geometriju, astronomiju i glazbu, koji su se tijekom srednjeg vijeka predavali u (višim) školama uz humanistički *trivium* (gramatika, retorika, dijalektika), čineći tako **septem artes liberales**, sedam slobodnih umijeća. Početkom srednjeg vijeka u Europi je došlo do potpunog zamiranja znanosti i obrazovanja, na što se odnosi izraz „mračni srednji vijek". Uzroci su mnogostruki, ali dio razloga bio je s jedne strane u rimskoj neznanstvenoj tradiciji, a s druge u nestabilnim političkim i društvenim uvjetima. Stoga je za srednjevjekovne učenjake računanje datuma Uskrsa spadalo u najzahtjevnije matematičke zadatke. Do doba Karla Velikog obrazovanje je bilo svedeno na apsolutni minimum: jedino plemstvo i redovnici su učili čitati i pisati (latinski), rijetko išta više od toga. Nešto računa je zasigurno bilo također potrebno znati, npr. radi izračuna poreza, no računanje u srednjem vijeku je bilo izuzetno naporno jer se koristio nepraktični rimski brojevni sustav, koji je sve do 13. st. bio u isključivoj ili bar dominatnoj upotrebi, te je i on jedan od razloga slabe razine znanosti tog doba [10, 62, 85, 98].

Situacija se malo popravila dolaskom na vlast Karla Velikog (747.–814., okrunjen 800. za prvog cara Svetog Rimskog Carstva). On je potaknuo prvu veliku europsku obrazovnu reformu, koja je uključivala osnivanje škola u svim samostanima i biskupijama, dostupnih odabranim dječacima. Uz vjeronauk i glazbu, u programe tih škola službeno su ušli i *trivium* te *computus*, računanje. Sve do 12. st. matematičko obrazovanje ostat će ipak na niskom nivou, a kao „udžbenici" (priručnici) korišteni su Boethiusova *De institutione*

arithmetica i razni latinski tekstovi o mjeriteljstvu. Prijatelj, savjetnik i učitelj sinova Karla Velikog bio je **Alkuin iz Yorka** (oko 735.–804.). On je razvio karolinške minuskule, temeljni alfabet za današnje latinično pismo, koji je omogućio lakše čitanje i pisanje, što je naravno utjecalo i na matematičko obrazovanje. Osnovao je niz crkvenih škola i pisao matematičke tekstove („udžbenike", u tipičnom srednjevjekovnom stilu 'pitanja i odgovori'). Pripisuje mu se najstarija latinska zbirka zabavnih matematičkih zadataka Propositiones ad acuendos iuvenes (*Prijedlozi za inspiriranje mladih*), s elementarnim aritmetičkim, logičkim i kombinatornim zadacima i rješenjima (uglavnom bez postupka). Navodimo tri primjera tih zadataka, od kojih je prvi varijanta zadatka sto ptica [10, 23, 26, 98, 103].

Primjer 26 ***Zadatak o svinjogojcu sa*** 100 ***libri***. *Jedan svinjogojac je rekao: „Želim kupiti* 100 *svinja za* 100 *libri. Prasac ko v sta deset libri, krmača košta pet libri, a dva praščića se mogu kupiti za jednu libru." Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?*

Primjer 27 ***Zadatak sa svinjama***. *Jedan čovjek posjeduje* 300 *svinja. Naredio je da se sve one zakolju u tri dana, ali tako da nikoji dan ne bude ubijen paran broj svinja. Zatim je tražio da se jednako postupi s još* 30 *svinja. Koji neparni brojevi svinja od* 300 *odnosno od* 30 *su ubijene na svaki od ta tri dana? (Zadatak ni za* 300 *ni za* 30 *svinja nema rješenja jer zbroj tri neparna broja ne može biti paran broj. Alkuin je uz to naveo i prijedlog da se ovaj zadatak zada neposlušnim učenicima ☺)*

Primjer 28 ***Zadatak o tri brata sa sestrama***. *Tri muškarca, svaki s po jednom sestrom, žele prijeći rijeku. Našli su samo mali čamac s kojim samo dvije osobe odjednom mogu prijeći rijeku. Kako su prešli rijeku, tako da nijedna od djevojaka ni u kojem trenu nije sama s muškarcem koji joj nije brat, ni u čamcu ni na obali?*

Kao i u Rimskom carstvu, računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa (srednjevjekovni europski abakus bio je varijanta rimskog abakusa). Kad je u 10. st. došlo do prvih intenzivnijih kontakata Europljana s arapskom tradicijom, prvenstveno na Iberskom poluotoku, postepeno su upoznavali indoarapske brojke te su se razdvojile dvije „škole" računanja: **abacisti**, koji su zagovarali isključivo korištenje rimskih brojki s abakusom kao pomagalom, te **algoristi**, koji su se zalagali za korištenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava. Naravno, naziv algoristi potječe od već spomenutih prijevoda Al-Hvārizmījevog teksta o aritmetici. Jedan od prvih koji je u Europi koristio indoarapske brojke bio je **Gerbert iz Aurillaca** (oko 946.–1003.). Studirao je u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke i upoznao se s arapskom matematikom. Pisao je tekstove o aritmetici i geometriji koji su iz današnje perspektive elementarni, ali su za tadašnje Europljane bili napredni, a ujedno su prvi srednjevjekovni europski tekstovi s originalnim doprinosima. Zbog svog znanja računanja je čak bio optuživan da je sklopio pakt s vragom, no ipak je 999. izabran za papu Silvestra II. Opisao je novu verziju abakusa, prilagođenu indoarapskim brojkama, koja je koristila *apices* (kamenčiće s oznakama znamenki 1 do 9) [81, 10, 23, 98, 103]. S dobom Gerberta iz Aurillaca započinje razdoblje poznato kao visoki srednji vijek (ca. 1000.–1300.). Iako se zadržala dominacija latinskog jezika i rimskih brojki te vrlo skromna razina obrazovanja, došlo je do jačeg razvoja kulture. Ovo je doba romanike i gotike, razdvajanja katoličke i pravoslavne crkve, križarskih ratova, te mnogih i raznolikih kontakata s arapskim svijetom, ponajviše na Iberskom poluotoku, ali i preko talijanskih trgovaca i križara. Istaknutu ulogu tu igra dio Iberskog poluotoka pod vlašću muslimanskih Maura, Al-Andalus (711.–1492.).

Od 929. do 1031. na tom je području bio samostalni kalifat Córdoba, a grad Córdoba je postao važan znanstveni centar s velikom knjižnicom. Pod maurskom vladavinom se u tradiciji arapskih kalifa poticalo prevođenje znanstvenih djela, što je doprinijelo oživljavanju grčke i otkriću arapske i indijske matematičke tradicije u zapadnoj Europi. U 11. i 12. st. se počinju prevoditi matematički (i drugi) tekstovi s arapskog (i hebrejskog) jezika na latinski, dok su prije toga od antičkih matematičkih djela u opticaju su bili samo neki dijelovi Euklidovih i Heronovih djela u rimskom prijevodu. Među prevodiocima tog doba ističu se Englezi **Robert iz Chestera** (12. st.) i **Adelard iz Batha** (1075.–1160.) te Talijan **Gerard iz Cremone** (ca. 1114.–1187.). Robert iz Chestera je na latinski preveo Al-Hvārizmījevu „Algebru“ (1145.), dok se Adelardu pripisuje prvi prijevod Al-Hvārizmījeve „Aritmetike“. Uz to, Adelard iz Batha preveo je s arapskog na latinski Euklidove „Elemente“ i taj će prijevod sve do 1533., kad je nađen izvorni tekst, biti temelj svih europskih izdanja EE. Gerard je pak na latinski preveo (ne samo) Ptolemejev *Almagest*. Kroz nastavak srednjeg vijeka ti i drugi prijevodi bit će prepisivani, ali i dorađivani i prerađivani, te su ti „prijevodi“ arapskih tekstova poprimili različite oblike [10, 23, 26, 100, 103]. U isto doba, u 11. i 12. st., Katolička crkva počela je sustavnije poticati obrazovanje i znanost. Tako su nastala prva sveučilišta[1] (Bologna 1088., Oxford 1096., ...). Za razliku od danas, nakon obrazovanja u latinskom jeziku, studenti koji su uopće nastavljali obrazovanje na sveučilištu, obično su se na isto upisivali u dobi od 14 ili 15 godina te bi prvo studirali *trivium* (gramatika, retorika, dijalektika) pa *quadrivium*. Time se postizao stupanj *baccalaureus*. Dalje se u to rano doba moglo studirati medicinu, pravo ili teologiju do stupnja magistra. Ovo je razdoblje crkvene i obrazovne povijesti poznato pod imenom skolastika, a izvorno se tim izrazom mislilo sustavno posredovanje znanja kroz predavanja i rasprave. U skolastici se cijenilo logičko zaključivanje (ponekad i do apsurda) temeljeno na aristotelovskoj logici, te je došlo do novog razvoja logike [21, **?**].

Može se reći da je postojao točno jedan veliki srednjevjekovni europski matematičar: **Leonardo iz Pise**, poznatiji kao **Fibonacci** (član/sin obitelji Bonacci, ca. 1170.–1250.). Već kao dječak putovao je s ocem, koji je bio carinik u trgovaÄŤkoj koloniji Pise, Bugia-i (današnja Béjaïa u Alžiru), a kasnije i u Egipat, Bizant, Siriju, Grčku i Siciliju. Tako je imao prilike upoznati matematičke spise Arapa, Indijaca, pitagorejaca, Euklida i dr. Budući da je trebao postati trgovac, puno je pažnje posvećeno tome da dobro nauči računati. U razdoblju 1200.–1225. boravio je u Pisi i bavio se matematikom. Napisao je pet matematičkih tekstova, od kojih je najznačajniji *Liber Abaci* („Knjiga o računanju“, dva izdanja: 1202. i 1228.). Uz razne verzije prijevoda Al-Hvārizmījeve „Aritmetike“ ova je knjiga najzaslužnija za širenje dekadskog pozicijskog sustava s indoarapskim brojkama u Europi.[2] U tom djelu, nakon što je prvo opisao rimske brojke i računanje s prstima, Leonardo opisuje korištenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava s nulom. Nakon opisa računa s prirodnim brojevima u tom sustavu, opisao je razlomke i računanje s njima; čini se da je upravo Leonardo prva osoba u povijesti koja je koristila razlomačku crtu. Slijede zadaci iz trgovačke računice i zabavne matematike, uključivo zadataka tipa zadatka sto ptica i znamenitog zadatka sa zečevima, čije rješenje su Fibonaccijevi brojevi.[3] Mnogi Fibonaccijevi zadaci su algebarski, odnosno svode se na jednadžbe i sustave jednadžbi.

[1] Zapravo, najstarije još uvijek aktivno sveučilište je Al-Karauin u Fesu u Maroku, izvorno džamija koju je 857. ili 859. osnovala Fatima al Fihri, u kojoj je uskoro nakon osnivanja započelo i obrazovanje.

[2] Ipak, otpor prema njima ostat će prisutan još neko vrijeme. Kao glavni razlog navodilo se lakša mogućnost krivotvorenja nego s rimskim brojkama. Posebno je poznata zabrana njihova korištenja u Firenci 1299.

[3] Ime im je tek u 19. stoljeću dao Édouard Lucas (1841.–1891.). Zanimljivo je da se pojavljuju u mnogim neočekivanim, čak i prirodnim, kontekstima, a povezani su i sa zlatnim rezom.

Pritom Leonardo nepoznanicu naziva *res* (stvar, prijevod arapske riječi šaj) ili pak *radix* (korijen). Kvadrat nepoznanice naziva *quadratus* ili *census*, a treća do šesta potencija nepoznanice su *cubus*, *census de censu*, *cubus censi* i *cubus cubi*. Za konstante koristi izraze *numerus*, *denarius*, *dragma*. Ne samo po odabiru izraza za nepoznanicu, u *Liber Abaci* jasno je vidljiv utjecaj Al-Hvarizmija i Abu Kamila na Fibonaccija. Među zadacima nalazimo i nekoliko zadataka o pronađenom novčaniku, od kojih ističemo jedan iz kojeg vidimo da je Leonardo razumio i negativne brojeve.

Primjer 29 *Četiri čovjeka su našli novčanik. Prvi skupa s novčanikom ima dvostruko koliko drugi i treći zajedno, drugi skupa s novčanikom ima trostruko koliko treći i četvrti, treći skupa s novčanikom ima četverostruko koliko četvrti i prvi. Slično, četvrti skupa s novčanikom ima peterostruko koliko prvi i drugi. Fibonacci uz ovaj zadatak komentira: „Ovaj zadatak nije rješiv osim ako dozvolimo da je prvi u dugu, a tad u najmanjim brojevima drugi ima* 4*, treći* 1*, četvrti* 4*, u novčaniku je* 11*, a dug prvoga je* 1*.“*

Fibonacci je napisao i *Practica Geometriae* (1220./21.), kompilaciju geometrijskih rezultata u kojoj razmatra kako euklidsku geometriju, tako i arapsku trigonometriju. Pritom potrebna algebarska pravila u arapskoj tradiciji izlaže bez pozivanja na geometriju. U *Liber quadratorum* (1225.), Leonardo se bavi kvadratnim diofantskim jednadžbama. Među ostalim ovdje nalazimo dokaz Diofant-Brahmagupta-Fibonaccijevog identiteta (umnožak zbrojeva po dva kvadratna broja je zbroj dva kvadratna broja). Otprilike iste godine u pismu carskom filozofu Teodoru, koji je djelovao na dvoru Svetog Rimskog cara Friedricha II., u kojem daje tri matematička zadatka. Fibonaccijev *Flos* (1225.) vezan je za zanimljiv povijesni događaj. Car Friedrich II. je 1225. godine je s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u (šesti) križarski rat da bi organizirao natjecanje, bolje reći izazov, iz matematike: Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma je Fibonacciju kao izazov zadao sljedeće zadatke, čija rješenja Fibonacci daje u *Flosu*:

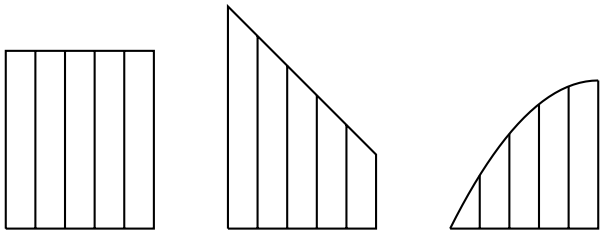
1. Naći razlomak x takav da su $x^2 \pm 5$ kvadrati razlomaka (Fibonacci je lako našao $x = \frac{41}{12}$).

2. Riješiti jednadžbu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Taj je zadatak Ivan iz Palerma preuzeo iz Hajjamove *Algebre*. Fibonacci je dokazao da navedena jednažba nema rješenja u cijelim ni razlomcima niti među euklidskim kvadratnim iracionalnostima, a zatim je naveo aproksimativno rješenje $(1; 22, 07, 42, 33, 04, 40)_{60}$ (točno na devet decimala), no nije poznato kako je ga je dobio.

3. Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo? (Fibonacci je postavio odgovarajući diofantski linearni sustav i odabrao rješenje u kojem je na početku u hrpi 47 novčanih jedinica.)

O Fibonaccijevom životu iza 1228. se gotovo ništa ne zna, osim da mu je Republika Pisa dodijelila stipendiju kao nagradu za savjetovanje u matematici vezano za računovodstvo i slična pitanja [10, 26, **?**, **?**, 103].

Uz Fibonaccija, najznačajniji europski srednjevjekovni matematičar bio je u kasnom srednjem vijeku **Nicole d'Oresme** (ca. 1330.–1382.). Bio je biskup francuskog grada



Slika 7.1: D'Oresmeov prikaz latituda u ovisnosti o longitudama.

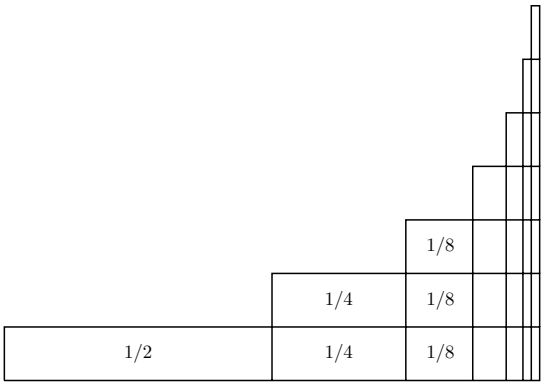
Lisieux-a i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V. Koliko je poznato, bio je prvi koji je dozvolio razlomke kao eksponente. Specijalno, poznavao je pravilo $x^a\, x^b = x^{a+b}$ i za razlomljene eksponente. No, najvažniji njegov doprinos je razvoj ideja koje će tristotinjak godina kasnije rezultirati razvojem analitičke geometrije i ideje grafa funkcije. Kod d'Oresmea nalazimo rano poimanje funkcije i njezina grafa. Za njega su sve mjerljive veličine, osim brojeva (koje doživljava na starogrčki način), kontinuirane te se mogu prikazivati duljinama, površinama i volumenima. U *Tractatus de Configuationibus Qualitatum et Motuum* (*Traktat o konfiguracijama kvaliteta i kretanja*, napisan 1350-ih godina) opisao je kako ilustrirati odnos protezanja (*extensio*) i iznosa (*intensio*) kvalitete. Kvalitete ono što bismo danas nazivali fizikalnim veličinama i one prema Oresemeu mogu imati različite intenzitete (iznose), a nalaze se u odnosu s protezanjem, primjerice vremenom). Intenzitete je nanosio vertikalno kao duljine (*latitudo*) nad vodoravnom crtom, na kojoj su protezanja prikazana isto kao duljine (*longitudo*). Tako dobivene dijagrame klasificirao je na uniformne, uniformno diformne i diformno diformne (lijevo, sredina i desno na slici 7.1). D'Oresme pritom nije zahtijevao okomitost latituda u odnosu na longitude, a spominje i mogućnost trodimenzionalne interpretacije. Koristeći svoje dijagrame, D'Oresme je dokazao i tzv. Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih godina:

> Svaka kvaliteta, ako je uniformno diformna, je iste kvantitete kao što bi bila kvaliteta istog ili jednakog subjekta koja je uniformna u skadu sa srednjom točkom tog subjekta.

Modernim jezikom rečeno, mertonski teorem kaže da ako se objekt kreće s konstantnom akceleracijom, prijeđeni put jednak je kao za gibanje konstatnom brzinom, ako je to ona u srednjem trenutku gibanja. D'Oresme je to pokazao usporedbom površine pravokutnika i trapeza (srednja i lijeva ilustracija na slici 7.1) te se vidi da je put znao interpretirati kao površinu. Ovo je vjerojatno prvi primjer u povijesti da se fizikalno svojstvo dokazalo čisto matematički. Intelektualci s *Merton College* bili su ujedno prvi koji su potakli raspravu o beskonačnim sumama, tj. redovima. Jedan od njih, Richard Suiseth, dokazao je, riječima i dosta kompliciranо (oko 1350.) konvergenciju reda s općim članom $\frac{n}{2^n}$. Oresme je taj dokaz pojednostavio i dao novi, grafički dokaz. Prvo je rastavom jediničnog kvadrata na pruge širine $\frac{1}{2^n}$ dokazao da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Zatim je prerasporedio članove Suisethovog reda i koristeći dijagram poput onog na slici 7.2 zaključio da je Suisethov red konvergentan sa sumom 2. D'Oresme je poznat i po prvom dokazu divergencije nekog reda, u svom djelu *Questiones Super Geometriam Euclidis*



Slika 7.2: Ilustracija D'Oresmeovog dokaza da je $\sum_n \frac{n}{2^n} = 2$.

(*Pitanja o Euklidovoj geometriji*). Bio je to harmonijski red, za koji je pokazao da je

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

iz čega je očita divergencija harmonijskog reda [11, 20, 97, 49, 103].

Srednjevjekovna europska matematika ...

... uglavnom je bila niskog nivoa. Nakon početnog potpunog zamiranja intelektalne djelatnosti nakon pada Zapadnog Rimskog Carstva, oko 800. na inicijativu Karla Velikog dolazi do prve obrazovne reforme te malo matematike ulazi u škole. U toj reformi se osobito istakao Alkuin iz Yorka, kojem se pripisuje i najstarija zbirka zabavnih matematičkih zadataka na latinskom jeziku. Od 10. st. nadalje Europljani se postepeno, preko kontakta s arapskim naslјeđem (osobito na Iberskom poluotoku) te se prijevodima arapskih tekstova ponovno upoznaju sa starogrčkim rezultatima, ali i otkrivaju rezultate arapske matematike. Tako je jedan od prvih koji je u Europi koristio indoarapske brojke bio Gerbert iz Aurillaca, kasniji papa Silvestar II. Ipak, još će dugo europski intelektualci ostati podijeljeni na abaciste, koji su zagovarali rimski brojevni sustav, i algoriste, koji su zagovarali indoarapski dekadski pozicijski sustav s nulom. Indoarapske brojke se u Europi počinju prihvaćati tek nakon najvećeg srednjevjekovnog europskog matematičara Leonarda iz Pise, poznatijeg pod nadimkom Fibonacci. Njegovo djelo Liber Abaci *(1202./28.) je detaljno opisalo korištenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava, a sadrži i mnoge za tadašnju Europu napredne algebarske zadatke, uključivo jednog iz kojeg se vidi da je Fibonacci razumio negativne brojeve. Uz to, Fibonacci je napisao i geometrijsko djelo* Practica Geometriae*, djelo o kvadratnim diofantskim jednadžbama* Liber Quadratorum*, te pismo carskom filozofu Teodoru na dvoru cara Friedricha II. i* Flos *koje oboje sadrže zanimljive zadatke. Posebno je zanimljiv zadatak i* Flosa*, u kojem Fibonacci s visokom točnosti (nepoznatom metodom) dobiva rješenje jedne Hajjamove kubne jednadžbe, nakon što je prvo dokazao da ta jednadžba nema rješenja ni u cijelim brojevima ni u razlomcima ni u Euklidovim kvadratnim iracionalnostima. Nakon Fibonaccija, u 14. st., ističe se Nicole D'Oresme, kod kojeg nalazimo ranu verziju poimanja funkcije (kvalitete čiji intenzitet ovisi o njenom protezanju) i grafa funkcije (intenziteti naneseni vertikalno kao latitude, a protezanja horizontalno kao longitude). Svoje dijagrame je iskoristio za dokaz Mertonskog teorema, a znanstvenici s oxfordskog Merton college su i prvi koji su razmatrali beskonačne sume. D'Oresme je ujedno prvi koji je dokazao divergenciju nekog reda (harmonijskog), a dokazao je i konvergenciju geometrijskog reda s kvocijentom i početnim članom $\frac{1}{2}$ te reda s općim članom $\frac{n}{2^n}$.*

Poglavlje 8

Matematika u doba renesanse



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

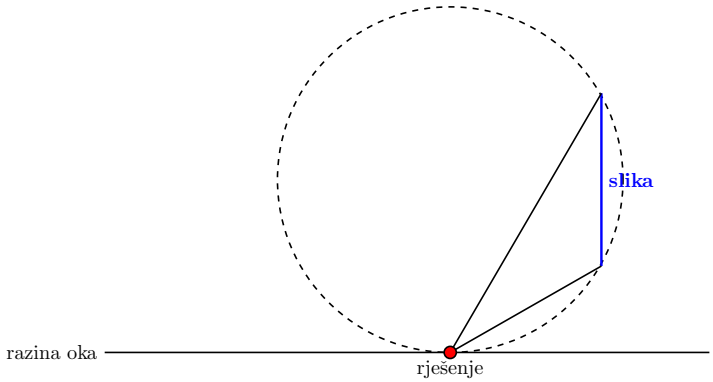
** trigonometrija * algebarski simboli * perspektiva * polinomijalne jednadžbe * rješenja jednadžbi u radikalima * negativni brojevi * iracionalni brojevi * realni brojevi * kompleksni brojevi * beskonačan skup * bijekcija * vjerojatnost * račun pogreške * potenciranje * logaritmi * optimizacija * Platonova i Arhimedova tijela * vektori * osnovni teorem algebre * nultočka polinoma*

Razdoblje 15. i 16. stoljeća u Europi je poznato kao razdoblje renesanse, koje je donijelo ponovno „oživljavanje" antike, ali i mnoge napretke u umjetnosti, znanosti i tehnici. Jedan od važnih razloga porasta razine obrazovanja, a time i razvoja znanosti i tehnologije, bilo je otkriće tiska (J. Gutenberg 1440ih godina). Kao prvi renesansni matematičar obično se spominje **Johann Müller Regiomontanus** (1436.–1476.). Rođen je u njemačkom gradu Königsbergu i po njemu je nazvan Regiomontanus. Osim matematikom bavio se i astronomijom. Na temelju arapskog (anadluzijskog) izvora, teksta *Islah al-Madžisti* Džābira ibn Aflaḥa (Geber Hispalensis, ca. 1100.–1160.), kojeg nije naveo kao autora, postavio je temelje moderne trigonometrije. Regiomontanusov *De triangulis omnimodis* (napisano 1464., objavljeno posthumno 1533.) je jedan od prvih sistematskih prikaza ravninske i sferne trigonometrije u povijesti. Godine 1472. zabilježio je pojavu kometa, a njegovi iznimno točni zapisi omogućili su da se taj komet 210 godina kasnije identificira kao Halleyev. Kopiju Regiomontanusovih astronomskih tablica na svoje četvrto putovanje ponio je Kolumbo i koristio predviđanje pomrčine mjeseca da bi zaplašio neprijateljski nastrojeno pleme jamajkanskih Indijanaca. Regiomontanus je pisao i o reformi kalendara te ga je papa Siksto IV. godine 1475. pozvao u Rim upravo da bi reformirao kalendar. Papa ga je imenovao i za biskupa grada Regensburga, ali je Regiomontanus umro prije nego je preuzeo dužnost (prema nekim izvorima otrovali su ga sinovi konkurentskog znanstvenika, a prema drugima je umro od kuge). Godine 1471. postavio je svoj znameniti problem optimizacije. Taj **Regiomontanusov problem** glasi:

Zadatak 18 *Slika visi na zidu. Ako je poznata visina vrha i dna slike iznad razine oka promatrača, na kojoj udaljenosti treba biti promatrač da ju najbolje vidi, tj. da je kut pod kojim ju gleda najveći?*

Najstarije poznato rješenje ovog problema je geometrijsko: Povuče se horizontala na visini oka te kružnica kojoj je to tangenta, a koja prolazi kroz vrh i dno slike. Diralište je optimalna pozicija oka (slika 8.1) [10, 26, 67].

Početkom renesanse došlo je i do ubrzanog razvoja matematičke simbolike. Kao što je vidljivo iz prethodnih poglavlja, velika poteškoća u matematici starih naroda, pa čak



Slika 8.1: Geometrijsko rješenje Regiomontanusovog problema.

i Arapa i u europskom srednjem vijeku, bio je nedostatak sustavne notacije. Problemi, rješenja i dokazi izlagani su riječima, bez standardiziranog nazivlja i simbolike. Bila je to jedna od najvećih zapreka brzog daljeg razvoja matematike. Tijekom srednjeg vijeka postepeno su se uvele indoarapske brojke, te im se do renesanse ustalio i oblik. Fibonacci je uveo razlomačku crtu, a bio je i jedan od prvih koji su za nepoznanice koristili određene standardizirane riječi (*res* i *radix* za nepoznanicu; *census* za kvadrat nepoznanice; *cubus* za kub nepoznanice). Tu je tzv. *res-census*-terminologiju koristio i Regiomontanus [2, 10, 26, 28, 100].

Tijekom kasnog srednjeg vijeka za zbrajanje se često koristio latinski veznik *et* (povremeno i riječ *plus*). Kod d'Oresmea (ili nekog prepisivača njegovih djela) mogu se naći simboli koji podsjećaju na +, vjerojatno pokrate za *et*. Svakako se znak + pojavio tijekom 15. stoljeća, a tako i −, za kojeg točno porijeklo simbola nije poznato. No, tijekom 15. st. za zbrajanje i oduzimanje korišteni su i drugi simboli, osobito često P i M. Simboli + i − su se u tisku prvi put pojavili 1489., u knjizi o aritmetici za trgovce če}vskog Nijemca **Johannesa Widmanna** (ca. 1462.–1498.). On ih koristi kao oznake za trgovački višak i manjak, ali se smatra se da je Widmann te simbole, i to upravo kao oznake za operacije, vidio i preuzeo od nekog drugog autora.[1] Svakako su se tijekom 16. st. simboli + i − ustalili u upotrebi [2, 10, 28, 103].

Njznačajniji francuski matematičar u 15. st. bio je **Nicolas Chuquet** (ca. 1445.–1487.). Za život je zarađivao kao prepisivač, a bio je autor prve knjige o algebri na francuskom jeziku (*Triparty en la science des nombres*, 1484.), koja je u to doba imala slab utjecaj jer je štampana tek 1880. Kod Chuqueta prvi put susrećemo izraze milijun, bilijun i trilijun. Bio je prvi matematičar koji je koristio zapis eksponenta nepoznanice kao superskripta i pritom je prvi koristio 0 kao eksponent i negativne eksponente. Njegovih 12^3 je naš $12x^3$, njegov 12^0 je naš 12, a njegov $12^{1\overline{m}}$ je naš $12x^{-1}$). Tako je za ono što danas zapisujemo kao $\sqrt{4x^2+4x}+2x+1$ Chuquet pisao $R^2\underline{4^2\tilde{p}4^1}\tilde{p}2^1\tilde{p}1$. Naime, R i R^2 (od lat. *radix*), često s prekriženom „nogicom", su bile najčešće renesansne oznake drugog korijena, bila je R ili R^2. Današnji znak za drugi korijen, koji je vjerojatno pokrata od rukom pisanog slova r, se prvi put pojavio 1525. u prvoj njemačkoj knjizi o algebri *Die Coss* Nijemca **Christoffa Rudolffa** (1499.–1545.). Naziv knjige je njemačka varijanta talijanske riječi

[1] Ovisno o izvoru, prva osoba koja je znakove + i − koristila u algebarskim izrazima je bio ili Giel Vander Hoecke, u knjizi objavljenoj u Antwerpenu 1514., ili pak Heinrich Schreiber (Heinrich Grammateus) 1518.

cosa, koja pak sinonim latinskog *res*. Rudolffova knjiga je bila vrlo popularna te su se po njoj njemački renesansni algebraičari nazivali kosistima [2, 10, 26, 94, 103].

Na razvoj matematike u renesansi je utjecala i likovna umjetnost, koja je potakla razvoj matematičke teorije **perspektive**. Oko 1420. slikar i arhitekt **Filippo Brunelleschi** (1377.–1446.) izrekao je glavno pravilo linearne perspektive: Svi pravci danog smjera u nekoj ravnini (koja nije ravnina slike) „konvergiraju" k istoj izbježnoj točki. Brunelleschi je razvio i precizna pravila za određivanje veličine objekta na slici ovisno o njegovoj udaljenosti od slike, ali nikad nije zapisao njihovo objašnjenje. Prvi ih je objasnio tipično renesansni „univerzalni" čovjek, **Leone Alberti** (1404.–1472.), u svoja dva djela *De pictura* (na latinskom, 1435., više razine) i *Della pittura* (na talijanskom, 1436., popularnije pisano). Među renesansnim umjetnicima se svojim matematičkim doprinosima posebno ističe **Pierro della Francesca** (1412.–1492.). U svoje djelo De prospectiva pingendi (oko 1470.) o perspektivi je uključio i dijelove o aritmetici i algebri te dug dio o geometriji, uključivo originalnih doprinosa. U tom djelu daje i perspektivno pravilne slike nekih Platonovih i Arhimedovih tijela, a u *De quinque corporibus regularibus* detaljno opisuje 5 od 13 Arhimedovih tijela [10, 93, 103].

Na osnovi della Francescinih djela je fra **Luca Pacioli** (1445.–1517.) napisao svoj prikaz pravila perspektive u sklopu djela De divina proportione (*O božanskom omjeru*, 1509.). Sam naziv djela se odnosi na omjer kojeg danas zovemo omjerom zlatnog reza, kojeg su Pacioli i renesansni umjetnici smatrali „idealnim" omjerom. To je djelo napisao u Milanu, kamo je na poziv vojvode Ludovica Sforze oko 1496. došao podučavati matematiku na njegovu dvoru. Tamo je upoznao **Leonarda da Vincija** (1452.–1519.) i s njime se sprijateljio, te je upravo da Vinci ilustirao navedenu knjigu. Da Vinci je i sam imao mnogo interesa za geometriju i dao vlastite prikaze i objašnjenja perspektivnih pravila i konstrukcija, a bavio se i inverznim problemom perspektive (kako za danu sliku odrediti gdje se nalazi oko promatrača ako je prikaz perspektivno korektan). Sâm Pacioli je svoje znanje matematike usavršio u službi bogatog venecijanskog trgovca, a 1470-ih godina studirao je teologiju i postao franjevac. Mnogo je putovao i podučavao matematiku na raznim sveučilištima, među inim i u Zadru, koji je u to doba bio dio Mletačke republike. Bio je autor prvog značajnog algebarskog djela u renesansi: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, poznato jednostavno kao *Summa* (1494.). Radi se o izuzetno utjecajnom djelu, ne samo jer sadrži pregled matematike tog vremena, nego i jer je pisano na narodnom talijanskom jeziku i bilo je tiskano. Dio *Summe* je posvećen rješavanju onih jednadžbi 4. stupnja koje se mogu supstitucijom svesti na kvadratne. Pacioli je koristio *res-census*-terminologiju, a za $+$, $-$ i $\sqrt{}$ koristio je *p.*, *m.* i *R.* [10, 26, 65, 100, 93, 103].

Među renesansnim umjetnicima se, uz della Francescu, svojim matematičkim doprinosima ističe **Albrecht Dürer** (1471.–1528.). Bio je Nijemac mađarskog porijekla, unuk zlatara, treće od 18 djece u obitelji, a već s 13 godina se istaknuo kao slikar. Na putu u Italiju 1494. saznao je za Paciolijeva djela i važnost matematike u slikarstvu te po povratku u Nürnberg počeo proučavati matematička djela. Od oko 1500. nadalje se u Dürerovim djelima može otkriti matematički utjecaj. Znameniti su Dürerovi bakrorezi koji prikazuju vezu slike i originala po perspektivnim pravilima. Kako bi produbio znanje matematike, 1505.–1507. ponovno je putovao po Italiji te po povratku skupljao materijal za pisanje djela o primjeni matematike u umjetnosti, no to djelo nikad nije završio. Najpoznatija Dürerova „matematička" slika svakako je Melencolia I (1514.), u kojoj vidimo zanimljiv poliedar, ali i jedan od prvih magičnih kvadrata u Europi (u kojem su u donjem redu brojevi 15 i 14 postavljeni tako da se očita godina nastanka). Dürer je 1525. objavio svoje znamenito djelo *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*, koje sadrži

detaljan prikaz teorije sjena i perspektive i razne geometrijske rezultate, a bila je prva matematička knjiga na njemačkom jeziku koja donosi nove rezultate [10, 103].

Kao što smo vidjeli, linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom, a i neke kvadratne, ljudi su znali rješavati još od doba Egipta i Babilona. No, sustavno im je pristupio tek Al-Hvārizmī i tako oko 825. godine utemeljio algebru. Iako Al-Hvārizmī nije razmatrao negativna rješenja, njegovi postupci za rješavanje jednadžbi su ekvivalentni modernim formulama i možemo reći da supočevši od njega poznata rješenja linearnih i kvadratnih jednadžbi u radikalima.[2] Oko 250 godina nakon Al-Hvārizmīja Omar Hajjam je klasificirao kubne jednadžbe, no nije uspio dobiti njihova rješenja u radikalima. Tako je pitanje rješivosti kubnih jednadžbi u radikalima ostalo otvoreno te je zaintrigiralo talijanske matematičare početkom 16. stoljeća. Oni su uočili da je dovoljno naći rješenja u radikalima za samo tri od Hajjamovih tipova kubnih jednadžbi:

$$x^3 + b^2\, x = c^3,$$
$$x^3 = b^2\, x + c^3,$$
$$x^3 + c^3 = b^2\, x.$$

Naime, svaka kubna jednadžba može se jednostavnom supstitucijom svesti na tzv. reduciranu kubnu jednadžbu bez kvadratnog člana.

Primjer 30 *Jednadžba* $x^3 + 3x^2 = 12x + 18$ *nakon supstitucije* $x = y - 1$ *postaje* $y^3 = 15y + 4$.

Općenito, kubna jednadžba $x^3 + a\, x^2 + b\, x + c = 0$, ona se reducira supstitucijom $x = y - \frac{a}{3}$. Naravno, iz moderne perspektive gornja tri tipa jednadžbi su ekvivalentna (jednadžba tipa $x^3 + p\, x + q = 0$), no u renesansi se i dalje inzistiralo na pozitivnim rješenjima i pozitivniim koeficijentima jednadžbi u njihovom sređenom obliku, a također se pretpostavljao princip homogenosti. Stoga, iako iz moderne perspektive za dobivanje rješenja u radikalima jednadžbe $x^3 + a\, x^2 + b\, x + c = 0$ ju samo treba reducirati i onda naći rješnje u radikalima reducirane jednadžbe, u renesansi su se odvojeno tražila rješenja tih triju tipova. Prvi matematičar koji je znao riješiti jedan od njih bio je oko 1515. **Scipione del Ferro** (ca. 1463.–1526.), profesor matematike u Bologni. Del Ferro je svoje rezultate čuvao tajnim jer se u to doba u Italiji moglo dobro zaraditi rješavajući matematičke zadatke koje nije svatko znao riješiti. Pred smrt je svoju metodu priopćio svom studentu Antoniu Maria Fioru (del Fioreu), a del Ferrove je bilješke naslijedio zet mu Hanninal Nave. Ubrzo nakon del Ferrove smrti se pročulo da je riješen jedan tip reducirane kubne jednadžbe [10, 26, 65, 94, 100, 103].

U isto doba problem rješivosti kubne jednadžbe u radikalima zanimao je i samouokog matematičara iz Bresciae, **Niccolò Fontana Tartaglia** (ca. 1500.–1557.). Tartaglia mu je zapravo bio nadimak značenja „mucavac", a dobio ga je zbog govorne mane koja je bila posljedica ozljede u djetinjstvu. Kad su Francuzi 1512. osvojili njegovu rodnu Bresciu, jedan mu je vojnik mačem rasjekao čeljust. Majka mu je uspjela spasiti život, ali ostala mu je govorna mana i velik ožiljak kojeg je u odrasloj dobi skrivao bujnom bradom. Kad je imao 16 godina trebao je naučiti abecedu, no novaca je bilo samo do slova K. Tartaglia je ukrao udžbenik i sam naučio ne samo ostatak abecede, već i latinski i kasnije matematiku. Taj mu je talent donio mjesta predavača matematike prvo u Veroni, a u doba naše priče u Veneciji. Osim po doprinosu rješenju kubne jednadžbe, poznat je po uvidu da projektil

[2] Algebarska jednadžba je rješiva u radikalima ako se njezina rješenja mogu izračunati iz njenih koeficijenata koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja.

ima najveći domet ako se ispali pod kutom od 45°. Tartaglia je 1530-ih godina otkrio metodu za rješavanje kubne jednadžbe oblika $x^3 + a\,x^2 = c^3$ i svoje otkriće nije tajio. Fior, uvjeren da samo on zna riješiti tip $x^3 + b^2\,x = c^3$, izazvao je Tartagliu na javno natjecanje na kojem je svaki trebao zadati drugome po 30 zadataka (1535.). Tartaglia je očekivao taj tip i uspio osmisliti vlastitu, u biti ponovno del Ferrovu metodu i riješio sve Fiorove zadatke, ali Fior nije znao riješiti sve njegove te je izgubio, a Tartaglia stekao slavu [10, 26, 65, 40, 94, 100].

Primjer 31 *Primjer Fiorovog zadatka s tog natjecanja je „Nađi broj koji zbrojen sa svojim kubom daje* 6*“.*

Za Tartagliainu pobjedu saznao je milanski liječnik i matematičar živopisne biografije, **Girolamo Cardano** (1501.–1576.). Rođen je u Paviji kao izvanbračno dijete milanskog pravnika i mlade udovice. Studirao je medicinu i postao međunarodno poznat liječnik, čak je 1552. na zahtjev nadbiskupa Johna Hamiltona iz Edinburgha putovao u Škotsku da ga izliječi od astme. Paralelno sa svojom liječničkom praksom bavio se matematikom, ali i kockanjem i astrologijom. Osim o matematici, objavio je djela i o astrologiji, fizici, šahu, kockanju, utjesi, čudesnim lijekovima, otrovima, zraku, vodi, snovima, urinu, zubima, kugi, mudrosti, moralu i glazbi. Njegovo djelo o utjesi navodno je izvor za Hamletove komentare o snu i smrti. Stric mu je otrovan, a i samog Cardana i oca pokušavali su otrovati. Žena mu je umrla 1546. Imao je dva sina i jednu kćer. Starijem je sinu 1560. odrubljena glava jer je arsenom u kolaču otrovao ženu (koju je Cardano opisao kao bezvrijednu i besramnu, a koja se vlastitom mužu javno rugala da nije otac njihovo troje djece). Mlađi sin je kao i otac bio ovisnik o kocki i okrao je vlastitog oca, koji ga je istjerao iz Bologne, a navodno da mu je u napadu bijesa i odrezao uho. Kćer je umrla od sifilisa. Skandali oko Cardana su se tako gomilali te ga sveučilište pokušalo izbaciti, no Cardano je tih godina imao jaku zaštitu pape Grgura XIII. Ipak, godine 1570. uhapšen je kao heretik zbog objave horoskopa Isusa Krista, ali ga inkvizicija nije mučila. Po izlasku iz zatvora izgubio je posao i dobio zabranu objavljivanja radova. Kraj života je proveo u Rimu, uz malu mirovinu koju mu je osigurao papa. Prema legendi, izradio je horoskop po kojem je trebao umrijeti određenog dana te se ubio kako bi održao reputaciju točne izrade horoskopa. Glavna Cardanova matematička teksta su *Ars Magna* (1545.) te *Liber de Ludo Aleae* (napisano oko 1562., ali objavljeno tek 1663.) [3, 10, 50, 84, 103].

U doba Tartagliaine pobjede, Cardano se upravo spremao objaviti djelo *Practica arithmeticae*. Pozvao je Tartagliau u Milano da ga pokuša nagovoriti da mu oda svoju metodu rješavanja kubne jednadžbe. Napisao mu je da ju želi objaviti u svojoj knjizi, ali Tartaglia je odgovorio da će ju sam objaviti. Na to je Cardano molio da mu metodu oda „u povjerenju“, no i to je Tartaglia isprva odbio. Cardano mu je pak zatim napisao da je o njemu razgovarao s milanskim guvernerom, te je Tartaglia, želeći poboljšati svoju zaradu, pristao doći u Milano, bilo je to 1539. Cardano ga je ugostio, ali guvernera nije bilo u gradu. Nakon puno nagovaranja Tartaglia je pristao odati metodu, uz uvjet da se Cardano zakune da ju neće objaviti prije nego ju sam Tartaglia objavi. Ipak, Cardano je zakletvu prekršio objavom djela *Ars Magna* šest godina kasnije (1545.). Tu je naveo Tartagliau kao autora metode, a uz nju je objavio i svoje proširenje metode na sva tri slučaja reducirane kubne jednadžbe te rezultate svog studenta Ferrarija o rješenju jednadžbe četvrtog stupnja. U Cardanovu obranu može se reći da je Tartaglia dugo izbjegavao objaviti svoju metodu, a i da je njena modifikacija do općeg rješenja kubne jednadžbe vlastiti Cardanov rezultat. Uz to, Cardano je u međuvremenu saznao da je metodu zapravo ranije otkrio već del Ferro. Za Tartagliau ova je objava bila katastrofa, jer je njome izgubio prednost na natjecanjima,

koja su mu osiguravala određenu financijsku dobit, te je optužio Cardana za izdaju i izazvao ga na natjecanje. Na to natjecanje (1548.) Cardano je poslao svog studenta Ferrarija, koji je pobijedio Tartagliau, a Tartaglia je bio prisiljen otići s natjecanja. Tako je Tartaglia izgubio i prestiž i dohodak te je život završio kako ga je i započeo: siromašan [3, 10, 26, 40, 84, 103].

Cardanova, točnije **del Ferro-Tartaglia-Cardanova metoda** za rješavanje reduciranih kubnih jednadžbi se uz modernu simboliku može objediniti u jedinstvenu metodu. Ona se može zapisati i formulom, ali lakše ju je shvatiti i zapamtiti kao postupak: Neka je dana reducirana kubna jednadžba

$$x^3 + p\,x + q = 0.$$

Uvodimo supstituciju $x = u + v$, čime dobivamo

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p\,(u + v) + q = 0,$$

tj.

$$u^3 + v^3 + (3u\,v + p)(u + v) + q = 0.$$

Da bismo dobili x, ne trebaju nam svi, nego samo neki u i v koji to zadovoljavaju. Stoga dodajemo uvjet $3u\,v + p = 0$, te od jednadžbe preostaje $u^3 + v^3 + q = 0$. Uvjet je moguće zapisati i kao $27u^3v^3 = -p^3$, pa smo dobili sustav

$$u^3 + v^3 = -q,$$

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

koji se supstitucijom svodi na kvadratnu jednadžbu za u^3 (odnosno v^3). Napomenimo ovdje da je Cardano određivao samo jedno pozitivno rješenje, a svoje postupke je opravdao geometrijski, „svođenjem na potpun kub" [3, 10, 26, 65, 40, 94, 100, 103].

Zadatak 19 *U ovisnosti o diskriminanti kvadratne jednadžbe za u^3 dobivene gornjim postupkom odredite koliko različitih realnih rješenja ima jednadžba $x^3 + p\,x + q = 0$.*

Primjer 32 *U* Ars Magna*, Cardano je među ostalim primjerima dao rješenje jednadžbe*

$$x^3 = 15x + 4,$$

za koju je znao joj je jedno rješenje $x = 4$. U modernoj notaciji Cardanov postupak je sljedeći: $x = u + v$ kao gore daje sustav

$$u^3 + v^3 = 4, \quad u^3v^3 = 125.$$

On se supstitucijom svodi na kvadratnu jednadžbu

$$(u^3)^2 - 4u^3 + 125 = 0.$$

Nju možemo zapisati u obliku $(u^3 - 2)^2 + 121 = 0$ pa je

$$u^3 = 2 \pm \sqrt{-121}.$$

Iako nije smatrao da drugi korijen negativnog broja ima smisla, budući da je znao da polazna jednadžba ima rješenje $x = 4$, Cardano je $\sqrt{-121}$ prihvatio kao međukorak i zaključio da je $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$, $v^3 = 4 - u^3 = 2 - \sqrt{-121}$ i stoga

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Tako je ovo prva pojava kompleksnih brojeva u povijesti, a par desetljeća kasnije R. Bombelli je pokazao da je gornji broj stvarno jednak 4 [3, 10, 71].

Recimo i par riječi o Cardanovom studentu Ferrariju, autoru rješenja jednadžbi 4. stupnja u radikalima. **Lodovico Ferrari** (1522.–1565.) je nakon što mu je otac poginuo, živio kod strica, čiji sin je pobjegao od kuće i zaposlio se kao sluga kod Cardana, no ubrzo je shvatio da mu je kod kuće bilo bolje te je bez obavijesti napustio Cardana i vratio se kući. Kad je Cardano kontaktirao njegova oca, on je Cardanu umjesto sina poslao tad 14-godišnjeg Lodovica. Lodovico je znao čitati i pisati pa ga je Cardano zaposlio kao tajnika, a ubrzo je uočio i njegov matematički talent, te ga je podučio i matematici. Ferrari je brzo napredovao i metodu za kubnu jednadžbu dopunio do metode za rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja. Nakon natjecanja s Tartagliom, Ferrari je tražio bolje plaćen posao. Obogatio se u službi milanskog upravitelja, don Ferranda di Gonzage, ali ga je sklonost užicima koštala zdravlja. Otišao je živjeti sa sestrom, udovicom, u Bolognu, gdje je dobio i profesuru matematike na sveučilištu, no godinu kasnije je umro. Smatra se da ga je otrovala sestra, koja je odbila tugovati na pogrebu i dva tjedna nakon što je naslijedila njegovo bogatstvo ponovno se udala (no, kad je sve svoje vlasništvo prepisala mužu, on ju je odmah ostavio te je umrla u siromaštvu). Ferrarijevu doradu Cardanove metode do metode za rješavanje jednadžbi 4. stupnja u radikalima opisat ćemo na primjeru, u modernom stilu [3, 10, 26, 65, 94, 100, 103].

Primjer 33 *Riješimo*

$$x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36 = 0.$$

Ferrarijevom metodom. Prvo iz jednadžbe eliminiramo kubni član, supstitucijom $x = y - 1$ *(*$x = y$ *minus* $\frac{1}{4}$ *koeficijenta uz* x^3*). Tako reduciranu jednadžbu zapisujemo tako da lijevo ostanu članovi* 2. *i* 4. *stupnja, a ostali desno:*

$$y^4 - 23y^2 = -18y - 40.$$

Sad lijevu stranu svedemo na potpun kvadrat:

$$\left(y^2 - \frac{23}{2}\right)^2 = \frac{369}{4} - 18y.$$

Uvodimo dodatnu nepoznanicu t *pribrajanjem* $t^2 + 2t\left(y^2 - \frac{23}{2}\right)$ *(općenito* $t^2 + 2t\,(y^2 + A)$*, gdje je lijeva strana prethodne jednadžbe* $(y^2 + A)^2$*), tako da lijeva strana i dalje ostane potpun kvadrat:*

$$\left(y^2 - \frac{23}{2} + t\right)^2 = 2t\,y^2 - 18y + \left(t^2 - 23t + \frac{369}{4}\right).$$

Sad tražimo t *takav da i desna strana bude potpun kvadrat, tj. da je njena diskriminanta (s obzirom na* y*) jednaka* 0*. Za to je općenito potrebno riješiti kubnu jednadžbu, ali dovoljan je jedan takav* t *kojeg ponekad možemo odrediti i pogađanjem, npr. u načem slučaju* $t = \frac{1}{2}$ *poništava diskriminantu* $18^2 - 4 \cdot 2t \cdot \left(t^2 - 23t + \frac{369}{4}\right) = -8t^3 + 184t^2 - 738t + 324$*. Za taj* t *prethodna jednadžba poprima oblik*

$$\left(y^2 - 11\right)^2 = (y - 9)^2,$$

tj. $y^2 - 11 = \pm(y - 9)$*, dakle* $y_{1,2,3,4} = -5; -1; 2, 4$ *odnosno* $x_{1,2,3,4} = -6; -2; 1, 3$.

U primjeru 32 spomenuti **Rafael Bombelli** (1526.–1572.) je bio arhitekt iz Bologne. Smatrajući da su sukobi oko rezultata vezanih za rješenje algebarskih jednadžbi posljedica nedovoljno pažljiva izlaganja sadržaja, koje je uz to često bilo nepristupačno nematematičarima, Bombelli je odlučio napisati opći i lakše razumljiv prikaz tada poznate algebre. U planu je bilo pet dijelova (knjiga), no Bombelli je umro kratko nakon što su 1572. objavljene prve tri knjige njegove *Algebre*. Nezavršeni rukopis posljednje dvije knjige nađen je i objavljen 1929. Bombellijeva *Algebra* je potpun prikaz tada poznate algebre, uključujući pravila aritmetike s pozitivnim i negativnim brojevima, dokaz da je problem trisekcije kuta ekvivalentan rješavanju kubne jednadžbe, te prvu detaljnu diskusiju **kompleksnih brojeva**. Dakle, Bombelli je prva osoba koja je prihvatila kompleksne brojeve kao smislene.

Primjer 34 *Bombelli je prvi pokazao da je Cardanovo rješenje (primjer 32)* $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ *jednako* 4. *To je pokazao tako što je prvo uočio da ako taj izraz uopće ima smisla, onda mora vrijediti* $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$. *Uzmimo*

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}.$$

Kubiranjem dobivamo

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1},$$

odnosno

$$2 = a(a^2 - 3b^2), \quad 11 = b(3a^2 - b^2).$$

Bombelli je onda uočio da su ti uvjeti zadovoljeni za $a = 2$ *i* $b = 1$. *Stoga je* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Bombelli je i opisao pravila računanja s kompleksnim brojevima. Imaginarne brojeve je zapisivao kao kvadratne korijene negativnih brojeva te je dao pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus“ $(+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n)$. Bombelli je također dokazao da ireducibilni slučaj kubne jednadžbe (kad je njena diskriminanta negativna) ima tri realna rješenja. Kod Bombellija se može naći i geometrijska definicija realnih brojeva: Ako se odabere jedinična duljina, onda se brojevi mogu predstaviti kao duljine. Zanimljiva je i Bombellijeva algebarska notacija: Za zbrajanje i oduzimanje kao i mnogi suvremenici koristi $p.$ i $m.$ Jednakost je izražavao s *eguale à* (tal. jednako je). I korjenovanje je označavao tada popularnom oznakom R (s prekriženom 'nogicom', ako se ističe 2. ili 3. korijen, onda Rq odnosno Rc). Kao naše zagrade koristio je $\lfloor$ i $\rfloor$. Monome je zapisivao poput razlomaka, iznad $\smile$ je eksponent monoma, a ispod je koeficijent. Primjerice, naš $4 + \sqrt{24 - 20x^2}$ bi kod Bombellija izgledao ovako: $4p.R.\lfloor \overset{0}{\underset{24}{\smile}} m. \overset{2}{\underset{20}{\smile}} \rfloor$ [10, 26, **?**, 71, 94, 93, 100, 103].

U doba renesanse došlo je i do intenzivnog razvoja primjene matematike u fizici i astronomiji. Dok se u 15. st. astronomija još temeljila na Ptolemejevom *Almagestu*, Kopernik je u svom djelu *De Revolutionibus Orbium Coelestium* predložio heliocentrički model Sunčeva sustava. No, budući da je još u antičkoj tradiciji pretpostavio kružne putanje planeta, njegov model se nije tako dobro kao Ptolemejev slagao s podacima dobivenim mjerenjem, te je ideja isprva naišla na otpor. Prvi koji je argumentirao mogućnost kretanja planeta oko Sunca bio je **Galileo Galilei** (1564.–1642.). Za matematiku je Galileo važan

po tri doprinosa. Prvo, kod njega prvi puta eksplicitno susrećemo **beskonačne skupove** i njihova svojstva. Galileo je naime kroz korespondenciju (mi bismo rekli bijekciju)

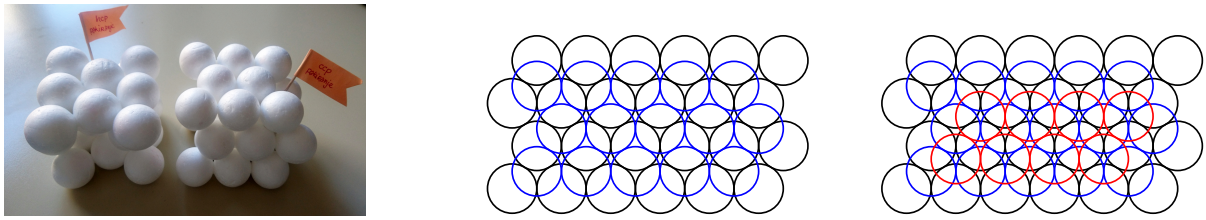
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots \end{array}$$

uočio da prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao njihovih kvadrata (iako na prvi pogled tih kvadrata ima manje), te ga tako možemo smatrati prethodnikom teorije skupova. Nadalje, pedesetak godina nakon što je Cardano napisao svoju *Liber de Ludo Aleae*, Galileo je također pokušavao racionalno objasniti neka vjerojatnosna pitanja. Možemo dakle reći da temelji moderne teorije **vjerojatnosti** sežu u sredinu 16. st., kad su Cardano i Galileo bili prvi koji su pitanjima slučajnosti pristupili racionalno (u starijim vremenima se rezultat slučajnog pokusa, primjerice bacanja kocke, isključivo smatrao rezultatom djelovanja neke izvanzemaljske sile: Boga, božanstva, vragova, duhova, ...). Namjena Cardanove knjižice bila je da pomogne profesionalnim kockarima. Iako i Cardano još uvijek sreću u igri shvaća kao uplitanje „prinčeva autoriteta", pokušao je racionalno opisati šanse za dobitak. Tako primjerice kaže da uloge treba stavljati u onom omjeru u kojem su brojevi povoljnih i nepovoljnih slučajeva, iskazano u terminima onog što danas zovemo koeficijentom za klađenje. Iako knjižica sadrži i mnoge greške, Cardano je prvi opisao zašto pri bacanju dvije kocke nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni. S druge strane, Galileo je prvi objasnio zašto pri bacanju triju kockica nisu svi zbrojevi jednako vjerojatni. Iako stoga utemeljenje teorije vjerojatnosti kronološki možemo pripisati Cardanu i Galileu, ono se ipak pripisuje tek de Fermatu i Pascalu (1654.), jer su Cardanovi i Galileovi rezultati objavljeni tek 1662. odnosno 1714. Treći važan Galileov doprinos matematici je što je postavio temelje **računa pogreške**. Naime, Galileo je bio svijestan da svako mjerenje nosi grešku, odnosno da nijedan rezultat mjerenja nije savršeno točan. U svom znamenitom djelu *Dialogo opra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (1632.) stoga tvrdi da ćemo dobiti pouzdanije podatke ako provedemo što više mjerenja, a da pritom vrijedi:

- Samo je jedna točna vrijednost mjerene fizikalne veličine.
- Mjerenja nose grešku uslijed nesavršenosti promatrača i mjernog instrumenta.
- Greške se raspoređuju simetrično s obzirom na 0 (jednako je vjerojatno izmjeriti rezultat koji za ε nadmašuje točnu vrijednost koliko i rezultat koji je za ε manji od nje).
- (Po apsolutnoj vrijednosti) manje greške su vjerojatnije od velikih.

Modernim načinom rečeno, Galileo je pretpostavio da je funkcija ovisnosti vjerojatnosti greške o njenom iznosu ε parna pozitivna funkcija koja je padajuća za pozitivne i rastuća za negativne greške. Ipak, Galileo nije dao prijedlog kako iz rezultata mjerenja (podataka) dobiti procjenu stvarne vrijednosti [2, 1, 10, 11, 50, 103, 104].

Među trima znamenitim renesansnim astronomima, najviše matematičkih doprinosa ostavio nam je Nijemac **Johannes Kepler** (1571.–1630.). Znamenit je Keplerov prvi model Sunčevog sustava objavljen u *Mysterium cosmographicum* (1596.), kojim je razmake među susjednim planetima Sunčeva sustava (tad ih je bilo poznato šest) pokušao objasniti koristeći Platonova tijela. Godine 1599. Kepler je postao asistent danskog astronoma **Tycho Brahea** (1546.–1601.), koji je tad bio „carski matematičar" u Pragu, tada glavnom

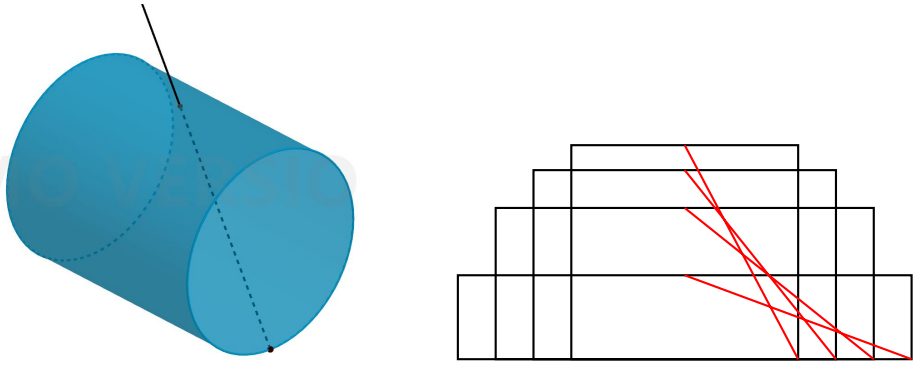


Slika 8.2: Keplerova hipoteza o najgušćem pakiranju kugli.

gradu Svetog rimskog carstva. Brahe je bio poznat po tome što je raspolagao za to doba najtočnijim mjernim podacima o kretanjima nebeskih tijela, a njegove podatke je nakon Braheove smrti naslijedio Kepler. Koristeći Braheove podatke, Kepler je (1609. odnosno 1619.) formulirao svoja tri znamenita zakona gibanja planeta.[3] Kepler se bavio i poliedrima. Prvi im je pristupio sustavno i ponovno je otkrio te opisao Arhimedova tijela. Otkrio je novu klasu poliedara (antiprizme), pri čemu je uočio da pravilne antiprizme također zadovoljavaju definiciju Arhimedovih tijela, te rompski dodekaedar i rompski triakontaedar. Kepler je prvi matematičar koji se bavio i zvjezdastim poliedrima te je otkrio dva od četiri pravilna zvjezdasta poliedra. Kepler je poznat i po **Keplerovoj hipotezi** koju je postavio 1611.: Jednake kugle najgušće se slažu ako se slažu na jedan od dva načina danas poznata pod nazivima kubično i heksagonsko gusto pakiranje (slika 8.2), što je potpuno dokazano tek nedavno (konačni dokaz je prihvaćen tek 2017.). Kepler je i jedan od važnih prethodnika otkrića infinitezimalnog računa. Dobro je iz opće kulture poznato da je renesansa ponovno otkrila antiku, a to vrijedi i za metodu ekshaustije. Kepler je u svom djelu *Nova stereometria doliorum vinariourum* (1615.) opisao određivanje volumena preko 90 rotacijskih tijela. Njegov račun je manje precizan od Arhimedovog, ali sličniji modernom: rotacijska je tijela dijelio u paralelne infinitezimalno tanke valjkaste slojeve. Posebno je poznat i jedan problem optimizacije kojeg je opisao Kepler, punukan problemom s kojim se susreo pri kupnji bačve vina za svoju drugu svadbu. Naime, trgovac je cijenu bačve doduše korektno uzimao kao razmjernu volumenu, no kao mjeru volumena uzimao je duljinu mokrog dijela štapa ako bi bačvu polegao na pod i kroz otvor na sredini na gornjem dijelu u bačvu ugurao štap sve dok na nasuprotnoj strani (dnu) ne dotakne rub poklopca, vidi sliku 8.3 (lijevo). Kepler je primijetio da je to loša mjera volumena jer duljina mokrog dijela štapa može biti za bačve različitih volumena (slika 8.3 desno). **Keplerov problem bačve** glasi: Ako bačvu vina aproksimativno smatramo valjkom, za koji odnos promjera i visine bačve ćemo uz opisani način mjerenja volumena za danu cijenu (tj. duljinu mokrog dijela štapa) dobiti bačvu najvećeg volumena? Kepler je rješenje $h : d = \sqrt{2}$ dobio uspoređivanjem vrijednosti V za različite omjere $h : d$ i pritom je uočio da vrijedi: Ako su mjere bačve bliske „optimumu", male promjene omjera dimenzija bačve rezultiraju u puno manjim promjenama volumena nego kod omjera koji su dalje od optimalnih. Drugim riječima, Kepler je uočio da se ekstremi (derivabilnih) funkcija pojavljuju u stacionarnim točkama [2, 10, 11, 9, 26, 103, 104].

Suvremenik Galilea i Keplera bio je i flamanski matematičar i fizičar **Simon Stevin** (1548.–1620.). Stevin je objavio nekoliko značajnih fizikalnih djela. Osobito je važno njegovo djelo *De Beghinselen der Weegconst* iz 1586. u kojem se bavi paralelogramom

[3]Planeti se oko Sunca kreću po elipsama, u čijem jednom žarištu je Sunce. Radij-vektori planeta (spojnice planeta sa Suncem) u jednakim vremenskim razmacima prelaze jednake površine. Kvadrat godine (vremena obilaska) planeta je razmjeran kubu velike osi pripadne orbite.



Slika 8.3: Keplerov problem bačve.

sila, što možemo smatrati početkom vektorskog računa, zatim pitanjima ravnoteže i tlakom. Stevin tim i još nekim djelima ostvario je prvi napredak na području statike i hidrostatike nakon Arhimeda. Za matematiku je osobito značajna njegova knjižica *De Thiende* (*Desetina*, 1585.), u kojoj daje prvo europsko izlaganje teorije decimalnih razlomaka (već smo rekli da ih je ranije u arapskom svijetu opisali Al-Uklidisi i Al-Kaši) i decimalnog mjernog sustava. Naš 27,847 kod Stevina izgleda ovako: 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③. No, trebat će još ca. 200 godina dok decimalni brojevi u Europi prijeđu u širu uporabu [2, 10, 26, 103].

Razvoju algebre, ali i matematičke simbolike bitno je doprinijeo znameniti francuski matematičar **François Viète**, poznat i pod latiniziranom verzijom svog prezimena Vieta (1540.–1603.). On je bio prvi utjecajni matematičar koji je predložio korištenje slova za označavanje nepoznanica i konstanti (koeficijenata), a i sam izraz „koeficijent" je uveo upravo on. Viète je koristio suglasnike za konstante, a samoglasnike za nepoznanice. Za zbrajanje i oduzimanje je koristio u njegovo doba već uobičajene simbole + i −, množenje je označavao riječju *in*, dijeljenje razlomačkom crtom, a jednakost latinskom riječju *aequibitur*. Tu svoju sustavnu notaciju predstavio je u djelu *In artem analyticem isagoge* (1591.) koje je postalo vrlo utjecajno te nakon njega algebra postaje grana matematike koja se bavi algebarskim jednadžbama, oslonjena na simboličke oznake. Viète je također prvi koji je dao primjere jednadžbi koje imaju onoliko rješenja koliki im je stupanj, te je time nagovijestio osnovni teorem algebre. Viète je u navedenom djelu opisao neke već prije poznate, kao i neke svoje nove metode za rješavanje jednadžbi do stupnja 4 te iskazao vezu između koeficijenata i rješenja jednadžbe (Vièteove formule):

$$x^2 + ax + b = 0 : x_1x_2 = b, x_1 + x_2 = -a.$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 : x_1x_2x_3 = -c, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

No, čak i Viéte je još uvijek zahtijevao princip homogenosti u jednadžbama. Viète je po struci bio pravnik i zastupnik u parlamentu, a matematikom se bavio u slobodno vrijeme. Španjolski kralj Filip II., poznati borac protiv reformacije, zagovornik inkvizicije i pokretač armade protiv Engleske, je 1590. postavio zahtjev za francuskim prijestoljem na osnovi rodbinskih veza. Francuski kralj Henrik IV., protestant, odbio je te zahtjeve te je došlo do rata. Francuzi su presreli jednu španjolsku šifriranu poruku te ju je kralj dao Vièteu da ju dešifrira. Viète je 15. ožujka 1590. kralju predao dešifriranu poruku, a poslije je dešifrirao i još neke druge poruke. Španjolci su da im je šifra 'razbijena' shvatili tek jedno dvije godine kasnije. Filip II. je tad tužio Francusku papi da se koristi crnom magijom, tražilo

se da se Viètеu sudi kao čarobnjaku i nekromantu u paktu s vragom. No, tadašnji papa (vj. Klement VIII.) u to nije povjerovao, a čini se da ga je cijela situacija zabavljala. Ipak, pokrenuta je istraga koja do danas nikad nije službeno zaključena. Uz Viètea je vezana još jedna matematičko-politička anegdota. Godine 1593. flamanski matematičar Adrian van Roomen postavio je zadatak s jednadžbom stupnja 45. Tadašnji nizozemski ambasador u Francuskoj je kralju Henriku IV. komentirao je da su francuski matematičari preslabi da ijedan od njih riješi Roomenov problem, ali je kralj taj zadatak dao Viètеu, koji ga je brzo riješio uočivši da je u pozadini te jednadžbe trigonometrijska relacija [10, 8, 26, 94, 93].

Najznačajniji engleski renesansni matematičar bio je **Thomas Harriot** (1560.–1621.), ujedno istraživač i astronom. Harriot je komunicirao s Keplerom te je doprinijeo i formulaciji Keplerove hipoteze, a uočio je i da se kubne jednadžbe kojima su poznata tri rješenja a, b i c mogu faktorizirati kao $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ te je tako prethodnik danas opće poznate činjenice da ako je x_0 nultočka polinoma, onda je taj polinom djeljiv s $x-x_0$. On je za današnje a, a^2, a^3, ... pisao a, aa, aaa, ..., a uveo je i moderne znakove nejednakosti $<$ i $>$.[4] [10, 26, 28, 59]. Suvremeni znak jednakosti $=$ također je britanskog porijekla. Uveo ga je 1557. velški liječnik i matematičar **Robert Recorde** (1510.–1558.). Recorde je bio na raznim funkcijama u doba kralja Edwarda VI.; umro je u zatvoru u koji je dospio zbog duga vezanog za politička nadmetanja, a moža i težih zločina. Ipak, upotreba znaka $=$ proširila se tek tijekom 17. st.[5] [28]. Uočimo da iako su se tijekom renesanse pojavili mnogi od modernih algebarskih simbola, to nije bio slučaj za simbole množenja i dijeljenja. U renesansi se množenje najčešće označavalo slovom M, riječju *in* ili jednostavno nadopisivanjem, a dijeljenje slovom D ili razlomačkom crtom [10, 26]

Potkraj renesanse uvedeni su i logaritmi, a važan korak prema njihovom otkriću učinio je njemački redovnik i jedan od ranih Lutherovih sljedbenika, **Michael Stifel** (1487.–1567.).[6] Stifel je neko vrijeme čak živio kod Luthera, koji mu je našao mjesto pastora. To je mjesto Stifel izgubio nakon krivog predskazivanja kraja svijeta za 18. listopada 1533., nakon kojeg je morao bježati iz gradića u kom je živio jer su u iščekivanju kraja svijeta mještani rasprodali svoje imanje te je po nastavku postojanja svijeta Stifel bio u opasnosti za život. U kasnijem razdoblju je stjecajem okolnosti više puta morao mijenjati mjesto službe, a u to doba se počeo i ozbiljnije baviti matematikom. Kod Stifela susrećemo spominjanje iracionalnosti kao brojeva, iako mu se razmatranje temelji na EEX. Stifel kaže da iracionalni broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna, te time nagovješćuje svojstvo gustoće skupa racionalnih brojeva u skupu realnih brojeva. Prihvaćao je samo pozitivne brojeve, a negativne smatrao besmislenim, fiktivnim (ali ih ipak proglašava manjima od nule, te kaže da se dobiju oduzimanjem brojeva od nule i da je nula između pozitivnih i negativnih brojeva). Najznačajnije Stifelovo djelo je *Arithmetica integra* (1544.). To je jedno od prvih europskih djela u kojem se opisuje Pascalov trokut, no posebno je značajno jer je postalo temelj otkrića logaritama [10, 26, 28].

Da bismo opisali kako je do tog otkrića došlo, moramo se vratiti stotinjak godina unatrag. Dobro je poznato da su tijekom rane i visoke renesanse Europljani razvili moreplovstvo i oplovili svijet. Tadašnja navigacija ovisila je o korištenju astronomskih instrumenata i izračuna pozicija i smjerova koristeći trigonometrijske tablice i formule. Pritom je nerijetko trebalo množiti i dijeliti višeznamenkaste brojeve, što je bio težak

[4] „Signum majoritatis ut $a > b$ significet a majorem quam b. Signum minoritatis ut $a < b$ significet a minorem quam b“ (*Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas*, 1631.).

[5] Tijekom 16. i 17. st. mnogi su autori za jednakost koristili ||, a neki [, |, *ae*, *oe*, ...

[6] Od njega potječe i jedna od popularnijih renesansnih notacija za dijeljenje. On je za suvremeno $24:8$ pisao $8)24$.

zadatak za moreplovce zbog nedostatka kalkulatora boljih od abakusa. Stoga se počela tražiti metoda kojom bi se množenje i dijeljenje brojeva svelo na zbrajanje i oduzimanje, po principu: Ako želim izračunati $x \cdot y$, odnosno $x : y$, onda želimo imati tablicu u kojoj bi se za x očitao neki broj X, a za y neki broj Y, pa se izračuna $X + Y$, odnosno $X - Y$, pa se taj zbroj odnosno razlika nađe u istoj tablici i iz nje onda očita traženi rezultat. Prva takva metoda u široj upotrebi bila je poznata pod nazivom *prosthaphaeresis*. Ona je izvedena iz ideje njemačkog matematičara i astronoma **Paula Witticha** (ca. 1546.–1586.), koji je oko 1580. više mjeseci boravio u u Uraniborgu, opservatoriju danskog astronoma Tycho Brahea na otoku Hvenu (danas pripada Švedskoj). Wittichova ideja je bila da se u havedenu svrhu iskoriste poznate formule tipa

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Primjer 35 *Ako* $0{,}99027 \cdot 0{,}17365$ *računamo koristeći metodu prosthaphaeresis, prvo iz trigonometrijskih tablica nađemo da je* $0{,}99027 = \sin 82^\circ = \sin\alpha$ *i* $0{,}17365 = \sin 10^\circ = \sin\beta$. *Sad izračunamo:* $\alpha - \beta = 72^\circ$, $\alpha + \beta = 92^\circ$. *Opet iz tablica očitamo* $\cos 72^\circ = 0{,}309017$, $\cos 92^\circ = -0{,}034899$. *Oduzmemo i podijelimo s* 2, *tj.* $0{,}99027 \cdot 0{,}17365 = \frac{1}{2}(0{,}309017 - (-0{,}034899)) = 0{,}17463$.

Očigledno ova metoda ima svojih ograničenja pa su matematičari nastavili tražiti bolju metodu za svođenje množenja i dijeljenja na zbrajanje i oduzimanje. Začeci te metode, tj. otkrića logaritama, mogu se naći još u 14. st., kad je d'Oresme poznavao pravilo $x^m\, x^n = x^{m+n}$ za pozitivne razlomke m i n, što je u 15. st. Chuquet proširio na slučajeve kad su kao eksponenti dozvoljeni i 0 i negativni (cijeli) brojevi. Stifel je razmatrao aritmetički niz prirodnih brojeva i geometrijski niz s početnim članom 1 i kvocijentom 2:[7]

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128\ldots \end{array}$$

Tako je uočio i u *Arithmetica integra* istaknuo:

> *Zbrajanje u aritmetičkom nizu odgovara množenju u geometrijskom nizu, a isto tako oduzimanje u prvom odgovara dijeljenju u drugom.*

Stifel je primijetio da se primjerice $8 \cdot 16$ može računati tako da zbrojimo $3 + 4 = 7$ i u drugom redu očitamo rezultat 128. No, ako bismo tako htjeli pomnožiti primjerice 7 s 20, zbog velikih razmaka u drugom redu (tj. brzog rasta geometrijskog niza s kvocijentom 2), teško bi bilo procijeniti koje brojeve bi trebalo uzeti u prvom redu. Uočimo ipak da je ovdje jasna temeljna ideja: Za x i y koje želimo pomnožiti ili podijeliti („brojevi geometrijskog niza" s kvocijentom q) želimo naći odgovarajuće eksponente („brojevi aritmetičkog niza"', tj. ono što danas zovemo $\log_q x$ i $\log_q y$, koje onda zbrojimo odnosno oduzmemo pa nađemo taj rezultat u aritmetičkom nizu i konačni rezultat očitamo iz geometrijskog niza [10, 26, 49, 32, 55, 76, 94].

Da bi se smanjili razmaci i time procjene međuvrijednosti učinile pouzdanijima, očito nam treba kvocijent q geometrijskog niza bliži 1. To je shvatio i iskoristio **John Napier**, Laird of Merchiston (1550.–1617.). Napier je bio škotski plemić i fanatični protestant koji je napisao tekst kojim je htio pokazati da je papa Antikrist, a zbog sklonosti nošenja

[7] Mi bismo danas rekli: U prvom redu su logaritmi po bazi 2 brojeva u drugom redu tablice.

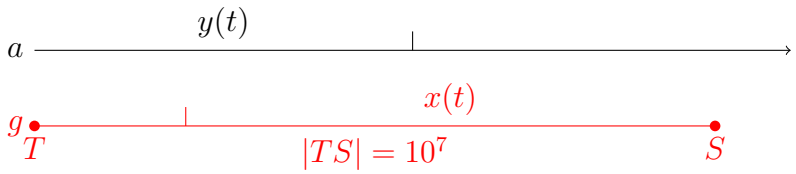
dugih halja i noćnih šetnji po dvorcu smatrali su ga nekromantom. Matematikom se bavio samo iz hobija. Osim po otkriću logaritama, koje ćemo sad ukratko opisati, poznat je i po tome što je raniju Fibonaccijevu rešetkastu metodu za množenje učinio praktičnijom (Napierove kosti), a uveo je i decimalnu točku (znajući za Stevinove decimalne razlomke). Napier je 20 godina života potrošio na konstrukciju prve tablice **logaritama** u povijesti. Objavio ju je 1614. (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*), a (posthumno) 1619. je pod nazivom *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* objavljena i pripadna teorija. Naziv logaritam izveo je iz grčkih riječi *logos* i *arithmos*. Da ponovimo, cilj konstrukcije bio je olakšati množenje i dijeljenje brojeva koje nalazimo u trigonometrijskim tablicama. Pritom se u Napierovo doba sinus još uvijek gledao kao duljina polutetive u kružnicama različitih polumjera, a ono što bismo mi zvali točnošću na više decimala se, uz naravno razne tehnike izračuna tablica, postizalo uzimanjem kruga većeg polumjera. Najtočnije tadašnje tablice su uzimale polumjer 10^7, dakle je u njima, primjerice, $\sin 30^\circ$ iznosio 5.000.000, a $\sin 90^\circ$ je bio $10.000.000 = 10^7$. Napier je iz Stifelove ideje prvo modificirao kvocijent geometrijskog niza na $q = 1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ koji je blizu 1 i za koji se lako računaju q^n.

Zadatak 20 *Dokažite da se prirodne potencije brojeva oblika* $1 - 10^{-m}$ *lako računaju, tj. da je svaka sljedeÄ‡a potencija jednaka prethodnoj od koje je oduzet isti takav broj s prikladno pomaknutim decimalnim zarezom.*

Počevši od $q = 1 - 10^{-7}$ Napier je u više koraka izračunao tablicu s 1380 brojeva (sinusa) u rasponu 4.998.609,4034 i 10.000.000 (sinusi kutova od 29,99° do 90°). No, (ne jedini) problem je s tom tablicom bio taj da se nije radilo o jednom geometrijskom nizu s jedinstvenim kvocijentom, već o umnošku dva geometrijska niza. Tu je Napier pokazao svoju genijalnost i „okrenuo stvar": Umjesto da traži cjelobrojne logaritme (eksponente u geometrijskom nizu) za decimalne sinuse, Napier je odlučio uzeti cjelobrojne sinuse i tražiti odgovarajuće eksponente (logaritme). U tu svrhu osmislio je sljedeće objašnjenje što bi to bio logaritam: Dvije čestice a i g gibaju se pravocrtno i kreću u istom trenutku. Čestica a se giba jednoliko, konstatnom brzinom 10^7, a čestica g ima početnu brzinu 10^7 i u svakom trenutku t joj je brzina v razmjerna trenutnoj udaljenosti x do cilja S (slika 8.4). Napier definira: Udaljenost y koju je do trenutka t prešla čestica a je logaritam od „sinusa" x (u istom trenutku). Mi ćemo pisati $y = \mathrm{NapLog}\, x$. Očigledno je ovako dobro definirana veza između y i x. Pritom je $\mathrm{NapLog} 10^7 = 0$ (u početnom trenutku a je na poziciji 0, a g još mora prijeći udaljenost 10^7), odnosno umjesto danas uobičajene nultočke 1, Napierov logaritam ima nultočku 10^7, dakle on nije logaritam u suvremenom smislu. Također je očigledno NapLog padajuća funkcija (što je g dalje od cilja, a je bliža polazištu).Napier, John Napier je dokazao da pozicije $y(n)$ (Napierovi logaritmi „sinusa" $x(n)$) čine aritmetički niz s početnim članom 0 i diferencijom 10^7 te da „sinusi" $x(n)$ čine geometrijski niz s početnim članom 10^7 i kvocijentom $1 - 10^{-7}$. Zatim je izveo određena svojstva svog logaritma te je, među ostalim koristeći po dijelovima linearnu[8] interpolaciju, izračunao tablicu logaritama za $\sin 0^\circ = 0 \leq x \leq 10.000.000 = \sin 90^\circ$ [10, 26, 49, 32, 55, 76, 82, 94].

Kakva je funkcija zapravo Napierov logaritam? Napier još nije na raspolaganju imao diferencijalni račun (ni funkcije), ali mi ih možemo iskoristiti za otkrivanje formule

[8]Ako imamo poznate vrijednosti y_1 i y_2 za dane x_1 odnosno x_2, za $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ se linearnom interpolacijom procjenjuje odgovarajući y kao da je između x_1 i x_2 ovisnost afina, tj. $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Po dijelovima linearna interpolacija znači da se između svake dvije susjedne vrijednosti x_i uzima druga, za njih odgovatajuća, afina funkcija.



Slika 8.4: Napierova definicija logaritma: U svakom trenutku t je $y(t)$ logaritam od $x(t)$.

Napierovog logaritma. Neka je v brzina čestice g u trenutku t, kad još treba prijeći put x, dakle kad je prešla put $10^7 - x$. Po definiciji brzine je $v = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}$. S druge strane, po Napierovoj pretpostavci o gibanju čestice g znamo da je u svakom trenutku $v = k\,x$ te da je $x_0 = 10^7$ i $v_0 = 10^7$. Dakle, imamo diferencijalnu jednadžbu $-\dot{x} = k\,x$, koju lako riješimo separacijom varijabli i dobijemo njeno opće rješenje $x = C\exp(-k\,t)$. Iz početnog uvjeta $x_0 = 10^7$ dobijemo $C = 10^7$, dakle $x = 10^7\exp(-k\,t)$. Deriviramo li to po t, dobit ćemo $v = -10^7 k\exp(-k\,t)$. Iz uvjeta $v_0 = 10^7$ sad slijedi $k = 1$, tj. $x(t) = 10^7\exp(-t)$. S druge strane, zbog jednolikog gibanja čestice a, je $\dot{y} = 10^7$ i $y_0 = 0$, odnosno $y(t) = 10^7 t$. Napierov logaritam od x je y, dakle $\mathrm{NapLog}(10^7\exp(-t)) = 10^7 t$. Iz $x = 10^7\exp(-t)$ vidimo da je $t = \ln\frac{10^7}{x}$, tj. dobili smo:

$$\mathrm{NapLog}\,x = 10^7\ln\frac{10^7}{x}.$$

Zadatak 21 *Koristeći modernu formulu za Napierov logaritam izvedite sljedeća njegova svojstva, koja je Napier dokazao iz činjenica da $x(n)$-ovi čine geometrijski, a $y(n)$-ovi aritmetički niz:*

$$\mathrm{NapLog}x = \mathrm{NapLog}(2x) + \mathrm{NapLog}\frac{10^7}{2},$$

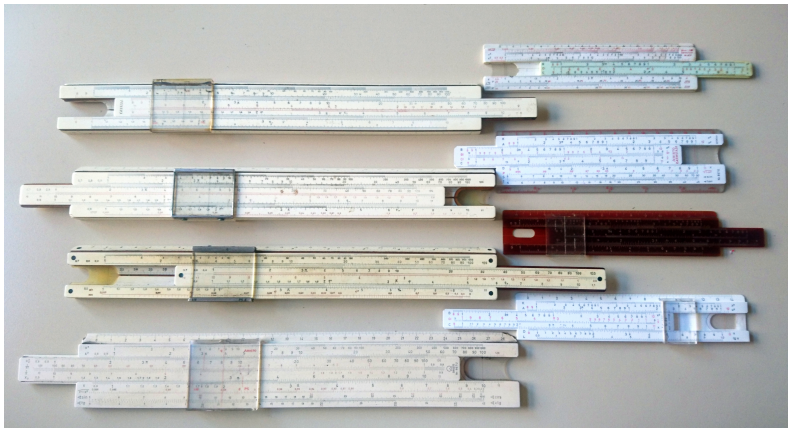
$$\mathrm{NapLog}\,(10^7\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{NapLog}\,(10^7 x),$$

$$\mathrm{NapLog}\,(10^7\,x_1x_2 = \mathrm{NapLog}\,(10^7 x_1) + \mathrm{NapLog}\,(10^7 x_2),$$

$$\mathrm{NapLog}\,(10^7\frac{x_1}{x_2}) = \mathrm{NapLog}\,(10^7 x_1) - \mathrm{NapLog}\,(10^7 x_2).$$

Za Napierovu konstrukciju tablice logaritama saznao je **Henry Briggs** (1561.–1631.), profesor geometrije u Oxfordu. Briggs je 1615. doputovao u Edinburgh i susreo se s Napierom. Tom prilikom se Napier složio s Briggsovim prijedlogom da bi puno zgodniji bili logaritmi kojima je nultočka 1, jer time dobivamo željena svojstva s obzirom na množenje i dijeljenje. Uz to su se složili i da bi bilo zgodno da 10 puta veći broj ima za 1 veći logaritam. Drugim riječima, suglasili su se da bi ono što danas zovemo **dekadskim logaritmom** i označavamo s log bio prikladniji logaritam od izvornog Napierovog. Briggs je nakon Napierove smrti nastavio rad na logaritmima i 1624. objavio svoju tablicu *Arithmetica Logarithmica* dekadskih logaritama, koji su zbog toga ponekad poznati i kao Briggsovi logaritmi [10, 26, 49, 32, 55, 76, 82, 94].

Tablice dekadskih logaritama su sve do prije nekih 40 godina bile važno računsko pomagalo, pa ćemo kratko opisati kako se koriste. Uporaba logaritamskih tablica temelji se na pojmovima mantisa i karakteristika, a koje je uveo Briggs. Naime, svaki broj x možemo zapisati notaciju koju danas nazivamo znanstvenom notacijom: $x = m\cdot 10^k$, gdje je $1 \le m < 10$ i k cijeli broj. Budući da je $\log(m\cdot 10^k) = k + \log m$, dovoljno je



Slika 8.5: Logaritmari iz kolekcije FMB.

znati samo logaritme mantisa. Tako npr. iz tablice dekadskih logaritama možemo očitati $\log 1{,}73 = 0{,}23805$, iz čega računamo primjerice $\log 0{,}173 = 0{,}23805 - 1 = -0{,}76195$ i $\log 173 = 2 + 0{,}23805 = 2{,}23805$

Neovisno o Napieru i u isto doba kao on svoju tablicu logaritama konstruirao i **Joost Bürgi** (1552.–1632.), najpoznatiji švicarski urar svog doba. Bürgi je od 1604. radio i na carskom dvoru u Pragu, gdje je tada carski matematičar bio Keplera. Vjerojatno je da ga je upravo Kepler nagovorio da objavi svoju konstrukciju logaritama, koja je pak vjerojatno, kao i Napierova, bila inspirirana Stifelovim razmatranjima. Svoj je rad Bürgi objavio 1620. pod nazivom *Progress Tabulen*. Za razliku od Napiera, on je kao kvocijent geometrijskog niza uzeo 1,0001. Za broj $N = 10^8 \cdot 1{,}0001^L$, Bürgi je broj L nazvao „crvenim brojem crnog broja" N. Suvremene oznake povlače da je Bürgijev logaritam zapravo $L = \frac{10}{\ln 1{,}0001} \cdot \ln \frac{N}{10^8}$ [10, 26, 49, 32, 55, 76, 82].

Ubrzo nakon prvih logaritamskih tablica je engleski matematičar Edmund Gunter (1581.–1626.) razvio pomagalo za množenje temeljeno na svojstvima logaritama (Gunterov štap, 1620.), prethodnik logaritmara (slika 8.5). Prvi pravi **logaritmar** konstruirao je engleski matematičar i anglikanski svećenik **William Oughtred** (1574.–1660.), prvo 1630. kružni, a onda 1632. kombinacijom dva Gunterova štapa pravi. Logaritmari će sve do 1970-ih godina ostati glavno računsko pomagalo u znanosti i tehnici. Uz otkriće logaritmara, Oughtred je poznat i po tome što je u svom djelu *Clavis mathematicae* (1631.) uveo simbol $\times$ za množenje [10, 11, 26, 28].

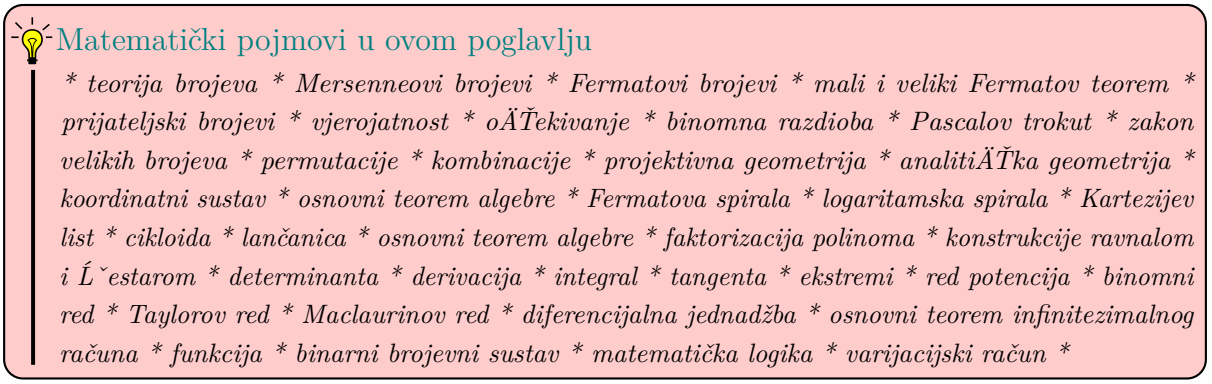
Matematika u doba renesanse ...

... počinje sličiti na modernu, kroz fuzioniranje arapskih i grčkih utjecaja i razvoj simbolike. Među ostalim, tijekom renesanse su uvedeni i ustalili se simboli $+$, $-$, $\sqrt{\cdot}$, $<$ i $>$ dok je za nepoznanicu i njezin kvadrat česta bila res-census terminologija, ali i razne varijante prethodnika modernog zapisa (primjerice, Chuquetov 4^2 odgovara modernom $4x^2$). Također, simbol $=$ prvi put se pojavio u 16. st., no raširio se u uporabi tek nakon renesanse. Renesansna matematika značajno se razvila i kroz interakciju s likovnom umjetnosti te fizikom i astronomijom. U likovnoj umjetnosti pojavljuju se matematički zakoni linearne perspektive, koje su detaljno opisali L. Alberti, P. della Francesca i A. Düerer. L. Pacioli ih je opisao u knjizi „De divina proportione", koju je ilustrirao da Vinci i prema kojoj je ono što danas zovemo omjerom zlatnog reza u renesansi nazvano „božanskim omjerom";

Paciolijeva „Summa“ (1484.) pak predstavlja temelj razvoja algebre u talijanskoj renesansi. U fizici je S. Stevin razmatrao paralelogram sila i tako postao prethodnik vektorskog računa, a ujedno je u Europu uveo decimalne razlomke. U astronomiji su Galileo i Kepler uočili pojavu parabola odnosno elipsi, te je „srušen“ antička pretpostavka da su jedine moguće putanje kružnice i pravci. Galileo je također prvi uočio da beskonačan skup ima jednako mnogo elemenata kao neki njegov pravi podskup i postavio temelje računa pogreške, koji se svode na parnost funkcije vjerojatnosti greške u ovisnosti o njezinom iznosu te konvergenciju vjerojatnosti greške prema 0 kad se iznos greške povećava. Galileo te G. Cardano su prvi racionalno pristupili vjerojatnosti i objasnili zašto sume iznosa na dvije odnosno tri kockice nisu jednako vjerojatno. No, G. Cardano je poznatiji po doprinosu rješenju kubnih jednadžbi u radikalima, koje je objavio u svom djelu „Ars magna“ 1545. On je na sva tri tipa reduciranih kubnih jednadžbi doradio raniju metodu, koju su neovisno otkrili S. del Ferro i N. Fontana zvan Tartaglia, za jedan od tih tipova (dok se već ranije znalo da se linearnom supstitucijom svaka kubna jednadžba može reducirati na oblik bez kvadratnog člana). Del Ferro-Tartaglia-Cardanovu metodu za jednadžbe 4. stupnja doradio je Cardanov student L. Ferrari, te je tako nakon sredine 16. st. postalo poznato da se sve algebarske jednadžbe do stupnja 4 mogu riješiti u radikalima. Algebru je u granu koja se bavi polinomijalnim jednadžbama oslonjeno na simboliku potkraj 16. st. transformirao F. Viète. Kod Cardana također po prvi put susrećemo druge korijene negativnih brojeva, što je u svojoj „Algebri” (1572.) prihvatio R. Bombellii i tako prvi put u povijesti opisao pravila za račun s kompleksnim brojevima. Uz to, Bombelli realne brojeve poistovjećuje s duljinama na pravcu i tako nagovještava modernu definiciju. Gustoću racionalnih brojeva u realnim brojevima pak uočava M. Stifel, koji je prvi uočio da zbrajanju u aritmetičkom nizu prirodnih brojeva odgovara množenje u geometrijskom nizu (s kvocijentom 2) i tako postavio temelje otkrića logaritama. Naime, zbog potreba navigacije krajem renesanse se tražio način da se množenje i dijeljenje (prvenstveno sinusa raznih kutova) svedu na zbrajanje i oduzimanje. Temeljem Stifelove ideje J. Napier je 1614. objavio prvu tablicu logaritama, kojima je dao i to ime. Napierova konstrukcija se temelji na ideji paralelnog promatranja pozicija dviju čestica od kojih se jedna kreće jednoliko, a druga tako da joj je u svakom trenutku udaljenost do cilja proporcionalna trenutnoj brzini. Tako je dobio da su pozicije prve (Napierovi) logaritmi pozicija druge u istim trenucima. Napierov logaritam ipak nije logaritam u modernom smislu riječi, posebno jer mu je nultočka bila 10^7. Napierovu konstrukciju je uvođenjem logaritma koji ima nultočku 1 i svojstvo da množenje broja s 10 uvećava logaritam za 1 (dakle, uvođenjem dekadskog logaritma) popravio H. Briggs. Naposlijetku treba istaknuti i da je J. Kepler prvi opisao neke nove vrste poliedara, postavio tek nedavno dokazanu hipotezu o najgušćem pakiranju sukladnih kugli i riješio problem optimizacije vezan za bačvu vina metodom koja nagovještava ulogu stacionarnih točaka u određivanju ekstrema funkcija.

Poglavlje 9

Matematika u doba apsolutizma



Nakon renesanse, matematika se nastavlja ubrzano razvijati, uz sve veću specijalizaciju na pojedine grane. U ovom se poglavlju bavimo matematikom razvijenom tijekom 17. stoljeća i početkom 18. stoljeća u Europi, što u općem povijesnom smislu uglavnom odgovara razdoblju poznatom kao doba apsolutizma.

9.1 Teorija brojeva u 17. stoljeću

Neposredno nakon renesanse dolazi do oživljavanja interesa europskih, osobito francuskih, matematičara za teoriju brojeva. Za to je posebno zaslužan francuski matematičar i pjesnik **Claude Gaspard Bachet de Méziriac** (1587.–1638.). Poznat je po svojoj knjizi zadataka iz zabavne matematike, koja je postala temelj budućih sličnih zbirki i sadrži i jednu metodu konstrukcije magičnih kvadrata neparnog reda. Njegovo novo izdanje latinskog prijevoda Diofantove *Aritmetike* s komentarima (1621.) posebno je zasluĹľno za obnovu interesa za teoriju brojeva. To je izdanje postalo poznato jer je u jednoj kopiji istog, na margini, Fermat (otprilike 1630.) zapisao iskaz **velikog Fermatovog teorema**:

> Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom. Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak, da ga zapišem.

Veliki Fermatov teorem je dokazan tek 1994. (Andrew Wiles), a danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve eksponenata 3 i 4 [10, 26, 104].

Jedna od ključnih osoba u francuskoj, a time i europskoj, matematici prve polovice 17. st. bio je redovnik. teolog, matematičar i teoretičar glazbe **Marin Mersenne** (1588.–1648.). Značajan je posebno zbog korespondencije sa svim važnim znanstvenicima svog

doba, čime je omogućena razmjena ideja u doba u koje još nisu postojali znanstveni časopisi niti brzi načini komunikacije. Nakon njegove smrti nađena je korespondencija s čak 78 znanstvenika (Fermat, Huygens, Pell, Galileo, Torricelli, ...). U borbi protiv praznovjerja i misticizma, podržavao je nove znanstvene ideje i branio Descartesa i Galilea od teoloških prigovora te se trudio eksponirati alkemiju i astrologiju kao pseudoznanosti. Mersenneov glavni matematički interes su bili prosti i savršeni brojevi, a želio je otkriti opću formulu za proste brojeve pa je počeo razmatrati brojeve oblika $M_n = 2^n - 1$. Podsjetimo se: Jošu pitagorejci znali da ako je M_n prost, onda je $2^{n-1}M_n$ savršen. Lako se vidi i da ako je n složen, onda je i M_n složen. Za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ već su i prije Mersennea bili poznati prosti brojevi oblika M_n, a znalo se i da M_{11} nije prost. Mersenne je smatrao su M_n za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ i 257 prosti brojevi. Bio je u krivu za $n = 67$ i $n = 257$, a u tom rasponu nedostaju mu $n = 61, 89$ i 107. Danas se prosti brojevi oblika M_n zovu **Mersenneovim brojevima**. Do danas ih je otkriveno 52, dosad najveći je $M_{136.279.841}$ (2024.), a ne zna se ima li ih beskonačno mnogo [10, 26, 93, 104].

Jedan od matematičara s kojima je Mersenne komunicirao bio je **Pierre de Fermat** (1601.–1665.). Uz iskaz velikog Fermatovog teorema i njegova dokaza za eksponente 3 i 4, znamenit je i **mali Fermatov teorem**, kojeg je iskazao u jednom pismu 1640. godine, no prvi objavljeni dokaz ovog teorema dao je Euler 1736. Eulerova formulacija ovog teorema glasi: Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p. Fermat je dokazao razne rezultate iz teorije brojeva, a postavio je i više hipoteza (od kojih je mnoge razriješio Euler). Otkrio je par prijateljskih brojeva $(17296, 18416)$, koji je kako smo rekli vrlo vjerojatno znao već Thabit ibn Kurra. U jednom od pisama Mersenneu postavio je hipotezu da su brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ prosti. To je provjerio za $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Ipak, 1732. Euler je pokazao da Fermatova hipoteza nije točna (broj $2^{32} + 1 = 4.294.967.297$ je djeljiv sa 641). Danas se prosti brojevi koji su oblika $2^{2^n} + 1$ nazivaju **Fermatovim brojevima** [10, 26, 16, 104].

Kao i Viète, Fermat je bio samo hobi-matematičar, a po struci pravnik. Osim po rezultatima iz teorije brojeva poznat je i kao suutemeljitelj teorije vjerojatnosti i analitičke geometrije te neposredni prethodnik otkrića deriviranja. Pierre Fermat je diplomirao pravo i 1631. postao član *parlementa* (vrsta prizivnog suda) u Toulouseu, čime je ostvario pravo na titulu *de* u imenu. Još u doba studija počeo se baviti matematičkim problemima i iz tog doba potječu njegovi prvi rezultati o ekstremima funkcija. Tijekom svog rada u parlamentu postepeno je napredovao do viših pozicija te je 1652. dosegao najviši mogući položaj na kaznenom sudu. Ipak, ta napredovanja bila su manje posljedica posebne ambicioznosti ili zasluga, a više tada glavnog kriterija: senioriteta. De Fermatova matematička reputacija brzo je rasla, no zbog nesklonosti prema sređivanju rezultata nije ih objavljivao, ali je mnoge opisao u pismima prijateljima. S druge strane, rast de Fermatova ugleda i kompliciranost problema koje je riješio počeli su izazivati prigovore i ljutnju drugih matematičara. Među tim sukobima najpoznatiji je sukob s Descartesom. Neovisno o Descartesu, o čijem ćemo otkriću analitičke geometrije više reći malo poslije, de Fermat je također razvio osnove analitičke geometrije. No, njegov je doprinos postao poznat tek poshumno 1679., iako je vjerojatno svoje ideje razvio nekoliko godina prije Descartesa (razlog je, naravno, u de Fermatovoj nesklonosti objavljivanju rezultata). Godine 1636. opisao je prvu spiralu različitu od Arhimedove. **Fermatova spirala** se može opisati slično kao Arhimedova, ali je udaljenost r točke do ishodišta razmjerna ne kutu φ zaokreta radij-vektora, već njegovom drugom korijenu. Njeno karakteristično svojstva je konstantnost površine između dva uzastopna zaokreta. Krajem 1630ih godina, kad je

analitička geometrija već postala poznata, posebice da se krivulje u ravnini mogu opisati jednadžbama, de Fermat je izveo i vlastitu metodu određivanja tangenti i točaka ekstrema (upravo ona je bila glavna tema sukoba s Descartesom). Taj doprinos ćemo opisati nešto kasnije. Na molbu jednog Descartesovog studenta koji je skupljao Descartesovu korespondenciju nakon njegove smrti, de Fermat je iznova pregledao svoja pisma iz doba sukoba s Descartesom te se ponovno vratio geometrijskim pitanjima vezanim za optiku. Tada je razvio zakon, poznat kao Fermatov, koji je jedan od temeljnih zakona optike: Svjetlost uvijek ide najkraćim putem [10, **?**, 16, 26, 93, 104].

9.2 Utemeljenje teorije vjerojatnosti

De Fermat je kroz korespondenciju s Blaise Pascalom utemeljio i **teoriju vjerojatnosti**. Podsjetimo se: Iako su ljude igre na sreću fascinirale od davnina, tek u doba renesanse pomalo se prestaje rezultate primjerice bacanja kocke gledati kao rezultat utjecaja nadnaravnih sila. Prvi pokušaj matematičko-racionalnog pristupa potječe od Cardana, koji je svoju *Liber de ludo aleae* napisao oko 1562., no ona je objavljena tek 1662. Slično, Galileov rani racionalni pristup vjerojatnosti postao je poznat tek po objavi 1718. To je glavni razlog zašto se utemeljiteljima teorije vjerojatnosti smatraju Pierre de Fermat i Blaise Pascal, a ne Cardano i Galileo. Pascal i de Fermat su se godine 1654. dopisivali su se vezano za određene kockarske probleme koje je postavio tad poznati pariški kockar Antoine Gombaud, poznatiji kao **Chevalier de Méré** (1607.–1684.):

1. **Problem kocaka**: Isplati li se uz koeficijent (omjer) $1:1$ kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica?

2. **Problem bodova** Dva igrača igraju igru u krugovima i uložili su jednak iznos novaca. U svakom krugu jednake su im šanse za pobjedu i gubitak — ako u nekom krugu pobijedi prvi, drugi gubi i obrnuto. Onaj koji prvi ostvari neki broj pobjeda, recimo 6, dobiva sav ulog. Kako podijeliti ukupni ulog ako je igra morala biti ranije prekinuta, npr. pri stanju $5:3$?

Problem kocaka je lako rješiv, što brzo shvatili i Pascal i de Fermat: Vjerojatnost da u jednom bacanju ne padne par šestica je $\frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u 24 bacanja nijednom ne padne par šestica jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Stoga je vjerojatnost da u 24 bacanja bar jednom padne par šestica $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49\ \%$. Dakle, odgovor na prvo pitanje je 'ne'.

Problem bodova je puno važniji i zapravo je upravo on potakao razvoj vjerojatnosti. Pascal i de Fermat su se kroz pisma suglasili oko njegova rješenja i tako u biti otkrili **binomnu raspodjelu**. Ključna je ideja gledati koliko je kome još preostalo do pobjede. Neka je igra prekinuta u trenutku kad prvom igraču treba još a bodova, a drugom još b bodova do pobjede, neka je recimo $a < b$ (prvi vodi). Igra će najdulje trajati ako bi sad drugi igrač zaredom dobio $b-1$ put, a zatim prvi a puta, odnosno igra završava najkasnije za $a+b-1$ krugova. U svakom od tih $a+b-1$ krugova može nastupiti 2^{a+b-1} jednako vjerojatnih nizova pobjeda. Ako bi u k od njih pobijedio prvi, a preostalih l drugi igrač, pravedna podjela uloga je u omjeru $k:l$. Ako je $a+b-1$ velik ispisivanje svih 2^{a+b-1} je nepraktično pa su Pascal i de Fermat razmatrali kako izbjeći ispisivanje svih mogućnosti. Pascal je pritom uočio da nisu bitni redoslijedi pobjeda, nego samo koliko krugova bi koji igrač pobijedio. Tako je shvatio da samo treba efikasan način da prebroji binarne nizove (nizove dvaju slova, recimo A i B za pobjede prvog odnosno

drugog igrača) duljine $n = a + b - 1$ u kojima se A pojavljuje bar a puta. U tu je svrhu upotrijebio trokut koji je po njemu dobio ime. **Pascalov trokut** je bio poznat još davno prije Pascala — rekli smo već da je binomni teorem za eksponente 2 i 3 je u Indiji i Kini bio poznat već u prvim stoljećima naše ere, a sama tablica binomnih koeficijenata koju danas nazivamo Pascalovim trokutom bila je poznata u 11. stoljeću u Kini, ali i u abasidskom kalifatu (Umar Hajjam odnosno Dzia Sian). Naṣīr Al-Ṭūsī je 1265. opisao konstrukciju aritmetičkog trokuta u kojem su koeficijenti razvoja $(a + b)^n$ i to primjenjuje na računanje korijena, a u isto doba (1261.) je kineski matematičar Jang Hui (ca. 1238.–1298.) opisao razna svojstva tog trokuta. U Europi se Pascalov trokut prvi put pojavio na naslovnici djela *Kaufmanns Rechnung* (1527.) njemačkog učenjaka Petrusa Apianusa, a prvi opis u već spomenutoj Stifelovoj *Arithmetica integra* (1544.). Do Pascala interpretacija ovog trokuta bila je vezana za binomni teorem i njegovu primjenu na korjenovanje, a kombinatorna interpretacija nije eksplicitno prisutna. Tek Pascal je u svom *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.) detaljno opisao sva bitna svojstva ovog trokuta, kojeg je zapisivao u pravokutnom obliku. Tako je Pascal uočio, a de Fermat se s njime složio, da u problemu bodova brojeve nizova sa svim mogućim brojevima pobjeda prvog igrača možemo direktno očitati iz Pascalovog aritmetičkog trokuta. Recimo, za problem prekida igre pri stanju 5 : 3 gdje se igra do 6 pobjeda prvom nedostaje $a = 1$ bodova, a drugome $b = 3$. Stoga treba pogledati 3. dijagonalu (mi bismo rekli red), brojeÄ‡i od nulte, u Pascalovom trokutu: 1, 3, 3, 1. To znači da u 1 od $2^{1+3-1} = 8$ moguích daljnjih razvoja igre bi prvi u 1 slučaju pobijedio triput, u 3 slučaja dvaput, u 3 slučaja jednom i u 1 slučaju nijednom. Budući da mu je dovoljna jedna pobjeda za ukupni dobitak, to znači da je pravedna podjela uloga $(1 + 3 + 3) : 1 = 7 : 1$, tj. prvi treba dobiti $\frac{7}{8}$ uloga, a drugi $\frac{1}{8}$. Vidimo dakle da su kroz svoju korespondenciju Pascal i de Fermat uveli binomnu raspodjelu, tj. uočili da ako se neki slučajni pokus sa dva jednako vjerojatna moguća ishoda ponavlja (nezavisno) n puta, vjerojatnost da se 'uspjeh' ponovi točno k puta je $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ [10, 26, **?**, 40, 104].

Pascalovo i de Fermatovo utemeljenje kombinatorne teorije vjerojatnosti nije sređeno djelo, već se radilo o korespondenciji. Prva objavljena knjiga o teoriji vjerojatnosti bila je *De ratiociniis in ludo aleae* (1656.). Njen autor je bio znameniti nizozemski znanstvenik **Christiaan Huygens** (1629.–1695.), najpoznatiji po svom patentu prvog sata s njihalom. On je sistematizirao i proširio Pascalove i de Fermatove rezultate, te objavio navedenu knjigu u kojoj po prvi puta susrećemo ideju **očekivanja**, no Huygensova definicija je još malo nejasno opisana kao prikladan ulog u igri na sreću: „Ako imamo jednaku šansu osvojiti 3 ili 7 novčića, igra „vrijedi" 5 novčića, dakle je to prikladan ulog." Sam izraz *očekivanje* potječe od drugog nizozemskog matematičara, Huygensovog profesora Fransa van Schootena (1615.–1660.), koji je Huygensovu knjigu preveo na latinski jezik. Od matematičkih doprinosa Christiaana Huygensa spomenimo ovdje još i da je dokazao mnoge nove rezultate o konikama, a pomoću hiperbole je riješio Alhazenov problem [**?**, **?**].

Blaise Pascal (1623.–1662.) je bio sin pravnika Étienna Pascala koji se iz hobija bavio i matematikom. Otac je bio odlučio da Blaise ne smije učiti matematiku dok ne navrši 15 godina, no s 12 godina Blaise se sam počeo baviti geometrijom te ga je otac našao kako ugljenom na zidu ispisuje dokaz da je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta. To je oca tako impresioniralo da je dozvolio Blaiseu da proučava Euklidove *Elemente*. Blaise je u dobi od 14 godina počeo pratiti oca na sastanke Mersenneovog kruga. Budući da mu je otac bio zaposlen kao sakupljač poreza, Pascal je u razdoblju 1642.–1645. izumio mehanički kalkulator, poznat kao *Pascaline*. Godina 1646. bila je prekretnica u

Pascalovom životu: od te godine intenzivno se posvetio vjeri i filozofiji. Povod prekretnici bila je očeva ozljeda nakon koje su ga njegovala dva brata iz jednog vjerskog pokreta koji su ostavili dubok dojam na Pascala. U isto doba Pascal se počeo baviti i fizikom. Tako je 1647. dokazao postojanje vakuuma. Nakon toga susreo se s Descartesom, koji nije vjerovao u postojanje vakuuma i koji je poslije susreta u pismu Huygensu napisao da Pascal „*. . . ima previše vakuuma u glavi*". Pascal je 1653. objavio djelo o ravnoteži u tekućinama u kojemu se može naći Pascalov zakon tlaka, na osnovi kojega je SI jedinica za tlak dobila ime paskal (Pa). U doba dopisivanja s de Fermatom Pascalovo zdravlje počelo je pokazivati prve znakove slabljenja. U listopadu iste godine zamalo je izgubio život u nezgodi, kad su se uplašili konji koji su vukli njegovu kočiju te je kočija ostala visjeti na mostu nad Seinom. Slabljenje zdravlja i opisana nezgoda ostavile su i psihološke posljedice te se on još više okreće vjeri. Usmjerio se na jansenizam, izvorno katolički pokret koji je 1656. proglašen heretičkim zbog neprihvaćanja potpune slobode volje. U ovom razdoblju Pascal je pisao filozofska djela, od kojih je najznamenitije *Pensées* (*Misli*), skup osobnih razmišljanja o ljudskoj patnji. U tom djelu zapisana je poznata Pascalova oklada: „Ako Bog ne postoji, ne gubi se ništa ako se vjeruje u njega, ali ako postoji, ako se ne vjeruje u njega, izgubit će se sve." Od mladih dana boležljiv i u jakim bolovima (bio je sklon migrenama), u to je doba postajao sve bolesniji. Umro je 1662. u Parizu, s 39 godina, nakon metastaziranja raka iz želuca u mozak [26, 104].

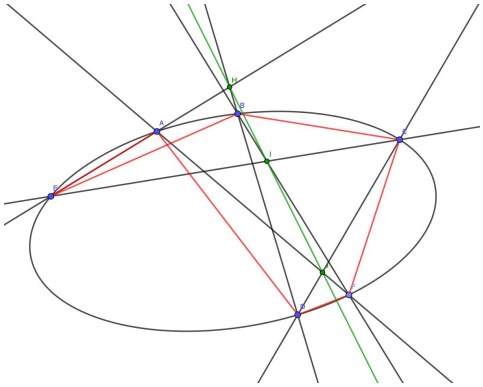
Konačno formiranje teorije vjerojatnosti kao grane matematike pripisuje se **Jacobu Bernoulliju** (1655.–1705.), starijem bratu Johanna Bernoullija. Njegova *Ars Conjectandi*, objavljena posthumno 1713., se smatra prvim bitnim, sređenim tekstom o vjerojatnosti (i kombinatorici). Sastoji se od četiri dijela. Prvi dio komentira i dopunjava Huygensovu *De ratiociniis in aleae ludo*, uključivo preciziranja pojma očekivanja i eskplicitnog uvođenja binomne distribucije. Drugi dio opisuje kombinatorne principe bitne za vjerojatnost. Tu su klasični rezultati o permutacijama i kombinacijama te prvi potpun dokaz binomnog teorema za prirodne eksponente. U trećem dijelu se prvi i drugi dio primjenjuju na 24 konkretna zadatka vezana uz igre na sreću.

Primjer 36 *Prvi zadatak u trećem dijelu glasi: Netko je u urnu stavio dvije kuglice, jednu crnu i jednu bijelu, te je ponudio nagradu onome od triju igrača A, B, C koji prvi izvuče bijelu kuglicu. Ako nijedan od igrača ne izvuče bijelu kuglicu, onda nitko ne dobiva nagradu. Prvo izvlači A, pa vrati kuglicu u urnu. Onda drugi izvlači B i učini isto. Naposlijetku kao treći izvlači C. Kolike su nade*[1] *triju igrača?*

Najvažniji dio je četvrti, koji je ostao nezavršen. On se bavi pitanjima primjene vjerojatnosti na „civilna, moralna i ekonomska" pitanja. Ovdje je postavljeno pitanje veze vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*: Ako imamo dovoljno mnogo rezultata nekog slučajnog pokusa, možemo li iz njih procijeniti teorijsku vjerojatnost? Ovaj dio završava teoremom kojeg je Jacob Bernoulli nazvao „zlatnim teoremom" i na kojeg je bio jako ponosan: „Neka se broj povoljnih slučajeva prema broju nepovoljnih slučajeva odnosi točno ili približno kao $\frac{r}{s}$, dakle prema broju svih mogućih slučajeva kao $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$ (ako se stavi $r + s = t$), gdje je posljednji omjer između granica $\frac{r+1}{t}$ i $\frac{r-1}{t}$. Sad se mogu, kako je dokazano, izvesti toliko opažanja da proizvoljno mnogo (npr. c) puta bude vjerojatnije da je omjer povoljnih prema svim provedenim opažanjima unutar tih granica, nego da je izvan njih, dakle da niti je veći od $\frac{r+1}{t}$, niti je manji od $\frac{r-1}{t}$."[2] Ovo je, naravno, prvi

[1] Pod nadom, očigledno, misli na vjerojatnost osvajanja nagrade.

[2] Za svaki $c > 0$ postoji broj n izvođenja tog slučajnog pokusa (svaki nezavisno u odnosu na ostale) da vjerojatnost da relativna frekvencija f uspjeha zadovoljava bude unutar $\frac{k}{n} \pm \varepsilon$ iznosi $\frac{c}{1+c}$.



Slika 9.1: Pascalov teorem o mističnom heksagramu

zakon velikih brojeva, poznat pod nazivom Bernoullijev slabi zakon velikih brojeva: Ako slučajni pokus provodimo neograničen broj puta, uvijek u istim uvjetima, te tako da je svako izvođenje nezavisno od ostalih, relativne frekvencije uspjeha će sve manje varirati i s vjerojatnošću 1 težiti prema p. Naziv „zakon velikih brojeva" uveo je 1837. Siméon-Denis Poisson. Kao motivaciju za dokaz „zlatnog teorema", Jacob je uzeo sljedeći zadatak: Stvarni sastav urne je 3000 bijelih i 2000 crnih pokusa, ali to nije poznato osobi koja će iz urne izvlačiti kuglice jednu po jednu, s vraćanjem. Pitanje je, može li ta osoba to učiniti neki broj puta tako da 10, 100, 1000, ... puta bude vjerojatnije (i naposlijetku 'moralno sigurno') da omjer frekvencija izvučenih bijelih i crnih kuglica bude jednak stvarnom $(3 : 2)$, nego da taj omjer bude neki drugi. Drugim riječima, Jacob Bernoulli je motivirao svoj teorem statističkim pitanjem određivanja teorijske vjerojatnosti (vjerojatnosti *a priori*) iz poznavanja empirijske vjerojatnosti (vjerojatnosti *a posteriori*). Koristeći svoj „zlatni teorem", Bernoulli je na kraju četvrtog dijela *Ars Conjectandi* pokazao da ako želimo 1000 puta veću vjerojatnost da omjer apsolutnih frekvencija bijelih i crnih kuglica bude $3 : 2$ nego neki drugi, minimalni broj izvlačenja je 25500 [10, 26, **?**, 104].

9.3 Utemeljenje projektivne i analitičke geometrije

Osim utemeljenja teorije vjerojatnosti, Pascal je dao još dva značajna doprinosa matematici. Jedan je njegov karakteristični trokut, važan u razvoju ideje derivacije, kojeg ćemo spomenuti malo kasnije, te jedan od prvih teorema projektivne geometrije. Bio je to pvi veliki Pascalov rezultat kojeg je dokazao u dobi od 16 godina (*Essai pour les coniques*, 1640.). Radi se o znamenitom **Pascalovom teoremu o mističnom heksagramu**,[3] jednom od od prvih teorema **projektivne geometrije**. On je poopćenje Papusovog teorema: Ako je u koniku upisan heksagram $ABCDEF$ (slika 9.1), onda su sjecišta tri para nasuprotnih stranica AE s BD, BF s CE i AF sa CD kolinearna.

Dokazom ovog teorema, Pascal je postao suutemeljitelj **projektivne geometrije**. Ideje projektivne geometrije (svaka dva paralelna pravca se sijeku u beskonačno dalekoj točki) zasigurno potječu iz renesansne teorija perspektive. Te je ideje dalje razvio **Girard Desargues** (1591.–1661.), francuski arhitekt i matematički autodidakt, član Mersenneovog kruga, kojeg se smatra glavnim utemeljiteljem projektivne geometrije. U *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (1639.) opisao je

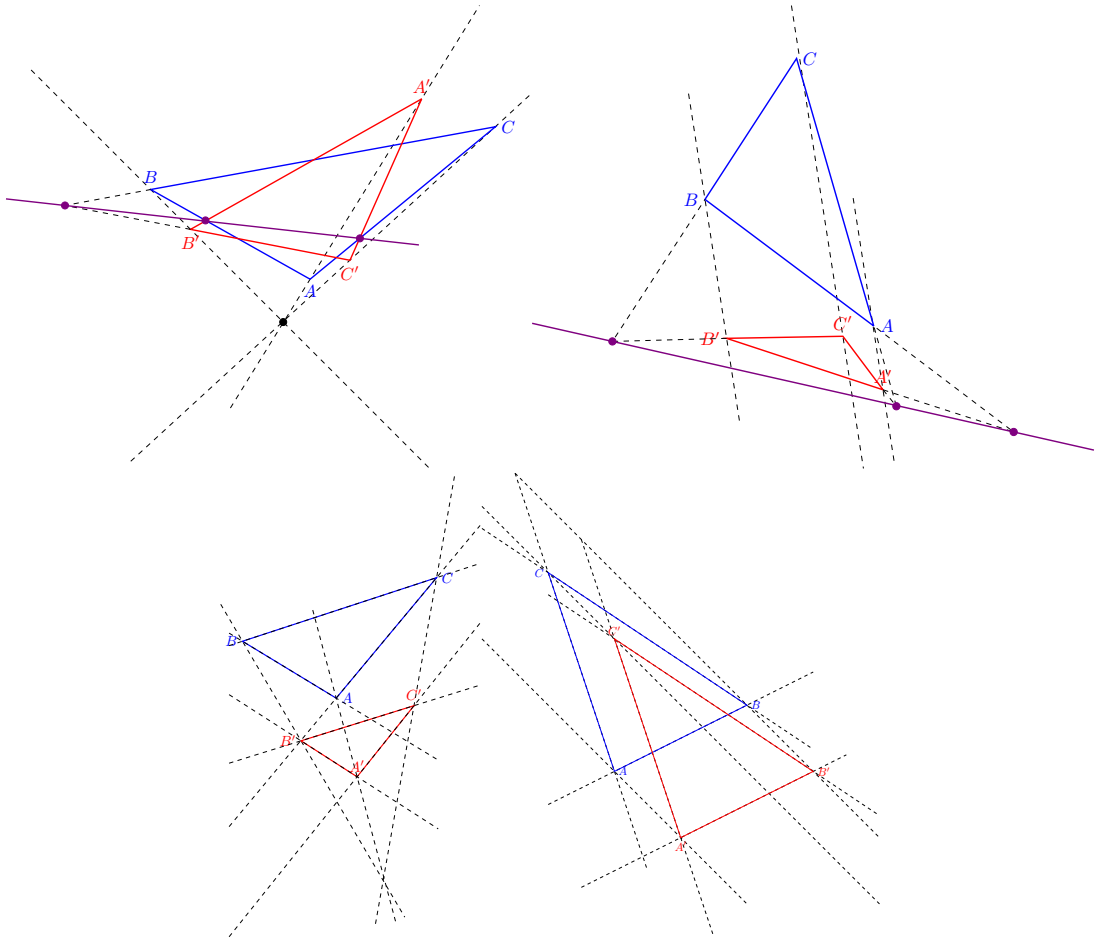
[3]Heksagram $ABCDEF$ je unija dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ i $\overline{FA}$.

geometriju u kojoj se svi međusobno paralelni pravci sijeku u beskonačno dalekoj točki, a sve takve beskonačno daleke točke čine beskonačno dalek pravac. Time asimptote krivulja postaju zapravo tangente u beskonačno dalekim točkama. Te je ideje poopćio i na trodimenzionalni slučaj: paralelne ravnine sijeku se u beskonačno dalekom pravcu, a svi beskonačno daleki pravci čine jednu beskonačno daleku ravninu. Desargues je uočio i projektivnu ekvivalenciju konika (hiperbola je u projektivnoj geometriji također zatvorena, a ima dvije beskonačno daleke točke, dok parabola ima jednu; asimptote hiperbole su tangente u tim beskonačno dalekim točkama, a u beskonačno dalekoj točki parabole tangenta na parabolu je beskonačno daleki pravac). Ipak, najpoznatiji je Desarguesov rezultat teorem kojeg sam nikad nije objavio: **Desarguesov teorem**. On glasi: Neka su dani trokuti ABC i $A'B'C'$. Ako se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki[4] onda su sjecišta AB s $A'B'$, AC s $A'C'$ i BC s $B'C'$ kolinearna. Pritom svako od sjecišta može biti i u beskonačnosti. Mogući slučajevi Desarguesovog teorema ilustrirani su slikama 9.2. Projektivna geometrija se nije bitnije razvijala do 19. stoljeća. Jedan razlog je što je Desarguesovo djelo bilo tiskano u malo primjeraka, koji su svi nestali dok jedan nije otkriven 1950., a dotad je ostalo poznato samo kroz jednu kopiju u obliku rukopisa. Uz to, radi se o jako sažetom djelu kompliciranom za čitanje pa dugo vremena nije imalo bitan utjecaj. Naposlijetku, a možda i najvažnije, u isto je doba Descartes utemeljio bitno praktičniju i neposredno primjenjiviju **analitičku geometriju**.

Neposredni prethodnik utemeljenja analitičke geometrije bio je Dubrovčan **Marin Getaldić** (1568.–1626.). Godine 1607. objavio je *Variorum problematum collectio*, u kojoj započeo razvijati primjenu algebru na gemetriju, što je u jasnijem i dorađenijem obliku učinio u svom glavnom, ujedno posljednjem, matematičkom djelu *De resolutione et de compositione mathematica, libri quinque* (objavljeno posthumno, Rim, 1630.). Algebarski način razmišljanja, uz očigledan utjecaj Viètea, primijenio je na geometriju i u potonjem od dva djela geometrijske odnose sustavno opisivao pomoću algebarskih identiteta. Uz to tu razmatra i neodređene probleme, dakle situacije s nejedinstvenim rješenjem i upravo taj aspekt ga ističe kao neposrednog prethodnika analitičke geometrije. Primjerice, Getaldić opisuje konstrukciju trokuta za kojeg je poznata duljina jedne stranice i to da je razlika duljina drugih dviju stranica jednaka polovini duljine zadane stranice. Getaldić uvodi algebarske oznake (B za zadanu duljinu i A za nepoznatu razliku duljina dijelova na koje visina na zadanu stranicu dijeli tu stranicu) pa iz podataka algebarski izvodi rezultat da je umnožak od $4A$ i B jednak sebi samom, te budući da to vrijedi za sve A i B zaključuje da zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. Moguće je, ali nipošto pouzdano, da su ova Getaldićeva djela utjecala i na oca analitičke geometrije, Descartesa [7, 12].

Kao što smo rekli, u antičkoj Grčkoj su se zadaci koje danas smatramo algebarskima razmatrali geometrijski. Ipak, neki grčki matematičari su u 3. st. pr. Kr. koristili pojmove poput duljina, širina i visina da opišu pozicije (Apolonije, Arhimed). Kasnije su neki arapski matematičari (Al-Māhānī, 9. st.) pokušali neke geometrijske probleme formulirati algebarski. Krajem srednjeg vijeka, d'Oresme je dao prikaze ovisnosti *latitude* o *longitudi*. Kroz renesansu, do početka 17. st. je postalo očito da su za opis fizikalne prirode bitne i druge krivulje osim kružnica i pravaca. No, jedna od glavnih prepreka uvođenja koordinatnog sustava i korištenja jednadžbi za opis krivulja bio je još uvijek standardni princip homogenosti u jednadžbama. Svakako treba reći i da je de Fermat neovisno o Descartesu razvio osnove analitičke geometrije, ali je njegov doprinos postao poznat tek poshumno 1679., iako je vjerojatno svoje ideje razvio nekoliko godina prije Descartesa (razlog je, naravno, u de Fermatovoj nesklonosti objavljivanju rezultata). Stoga se

[4]Ako za trokute vrijedi to svojstvo, kažemo da je jedan projekcija drugog.



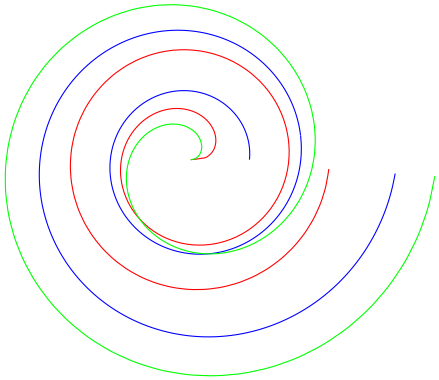
Slika 9.2: Desarguesov teorem

kao utemeljitelj **analitičke geoemtrije** uzima znameniti matematičar i filozof **René Descartes** (1596.–1650.), poznat i pod svojim latiniziranim prezimenom Cartesius [10, **?**, 26, 104].

Descartes je bio iz ugledne obitelji. Bio je bolježljivo dijete, a od osme godine obrazovan i odgajan je u isusovačkoj školi. Usprkos strogoj disciplini, zbog slabog zdravlja imao je dozvolu ležati ujutro do 11 sati u krevetu. Taj je običaj i kasnije zadržao. Kad je 1647. posjetio Pascala, rekao mu je da je jedini način za dobro raditi matematiku i sačuvati zdravlje ne ustajati ujutro ranije nego što imaš potrebu za ustajanjem. Studirao je pravo, a zatim odabrao vojničko zanimanje te je 1617. otišao u tridesetogodišnji rat. Prema vlastitim riječima, svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10. studenoga 1619., u doba ratovanja na Dunavu. Iz vojske je izašao 1620. te idućih pet godina proveo putujući Europom. U Parizu se nastanio 1626. te se dvije godine kretao u društvu i bavio konstrukcijama optičkih instrumenata. 1628. godine je upoznao kardinala de Bérullea, koji je bio toliko impresioniran Descartesom da ga je nagovorio da život posveti otkrivanju istine. Descartes je pristao te se, kako bi mogao voditi mirniji život, preselio u Nizozemsku gdje je živio dvadeset godina potpuno posvećen filozofiji i matematici. Tu je napisao i svoje poznato djelo *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* (*Rasprava o metodi*) o univerzalnoj znanosti. Godine 1649. ga je švedska kraljica Kristina pozvala na svoj dvor da bi ju podučavao matematiku. Descartes je prihvatio, ali je ona zahtijevala ranojutarnju poduku te je Descartes, dotad naviknut do kasna jutra biti u krevetu, bio prisiljen u pet sati ujutro prolaziti hladan put iz jednog dijela dvorca u drugi. Tako je dobio upalu pluća i unutar dva mjeseca boravka u Stockholmu umro. Descartes se nikad nije ženio i nema potomaka, ali je (navodno) imao jednu vanbračnu kćer koja je rano umrla [26, **?**, 104].

Temeljne principe analitičke geometrije izložio je u prilogu spomenute *Discours de la méthode*. Taj prilog nosi naslov *La Géométrie* (1637.) i sastoji se od tri dijela. Među ostalim, u tome prilogu Descartes je uveo danas uobičajene oznake za konstante (početak abecede) i varijable (kraj abecede). Prema anegdoti, Descartes je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravnine dobio promatrajući muhu na stropu i pokušavajući opisati njezine pozicije. Descartesova je ideja bila da se svaka točka u ravnini može jednoznačno opisati parom realnih brojeva x i y koji opisuju udaljenosti te točke do dva fiksna, međusobno okomita pravca (koordinatne osi). Uočio je da jednadžbe $f(x, y) = 0$ mogu biti neodređene, ali se njihova rješenja mogu opisati kao koordinate točaka koje čine neku krivulju. Posebno, linearne jednadžbe $a\,x + b\,y + c = 0$ predstavljaju pravce, a kvadratne $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ konike. Tako su, primjerice, kod Descartesa x, x^2 i x^3 jednostavno (varijabilni) brojevi kojima odgovaraju jednodimenzionalni objekti (krivulje), odnosno x^2 više ne mora predstavljati površinu kvadrata stranice x, već je to broj kojemu geometrijski odgovara jednodimenzionalni objekt (parabola). Također, sad se može konstruirati krivulja koja predstavlja kubnu jednadžbu, a ne samo rješenja kubne jednadžbe pomoću krivulja. Time je, očito, izbjegao ovisnost o principu homogenosti. Descartes je komentirao i da bi se iste ideje mogle primijeniti u prostoru korištenjem tri koordinate, no tu ideju nije dalje razradio [10, **?**].

Prvi dio *La Géométrie* sadrži osnovne crte analitičke geometrije, opisane kroz diskusiju **Papusovog problema**: Neka je zadano po n pravaca $p_1, \ldots, p_n$ i kutova $\phi_1, \ldots, \phi_n$ u ravnini, te duljina a. Udaljenost točke T do pravca p_i definirajmo kao duljinu odsječka pravca koji prolazi kroz T i s p_i tvori kut ϕ_i. Zadatak je pronaći geometrijsko mjesto točaka T u ravnini za koje je umnožak udaljenosti do prvih $\frac{n}{2}$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti do ostalih pravaca, ako je n paran, odnosno umnožak



Slika 9.3: Arhimedova spirala $r = \frac{1}{2}\varphi$ (zeleno), logaritamska spirala $r = \frac{3}{2}\exp\left(\frac{\varphi}{10}\right)$ (plavo) i Fermatova spirala $r = \sqrt{\varphi}$ (crveno)

udaljenosti do prvih $\frac{n+1}{2}$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti do ostaliha pravaca i a, ako je n neparan [10, **?**].

U drugom dijelu *La Géométrie* se bavi krivuljama, koje je podijelio dijeli na geometrijske i mehaničke. To odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje koju je uveo Leibniz. Godinu kasnije je opisao i algebarsku krivulju koja danas nosi ime po njemu: **Kartezijev list** $x^3 + y^3 = 3axy$, no njen je oblik točno opisao samo u prvom kvadrantu, ali je krivo mislio da isti oblik ima i u ostala tri kvadranta. Iste godine kao i Kartezijev list (1638.), Descartes otkrio **logaritamsku spiralu**, krivulju kod koje je za svaku njenu točku kut radijvektora s tangentom u toj točki konstantan. Nju je kasnije detaljno analizirao Jacob Bernoulli, koji ju je nazvao *spira mirabilis*. Na slici 9.3 vidi se usporedba logaritamske spirale (plavo) s Fermatovom (crveno) [10, **?**, 26, **?**, 104].

U trećem dijelu *La Géométrie* se Descartes doduše bavi problemima vezanim za krivulje, ali se u biti radi o pregledu tada poznate algebre. Prije nego kažemo više o tome, spomenimo da Descartes (kao ni Fermat) nije koristio negativne koordinate. To će poopćenje uvesti nekoliko desetljeća kasnije Newton i Leibniz. Newton je također, čini se, prvi koji je koristio polarne koordinate i naziv analitička geometrija. Analitička geometrija je izuzetno brzo postala poznata jer je omogućila niz novih primjena, a postala je i temelj utemeljenju infinitezimalnog računa. Također, Descartesov pristup je (to smo već spomenuli) povezan i s nerješivošću tri klasična problema. Naime, posljedica njegove jednodimenzionalne interpretacije veličina je da se množenjem duljina dobije duljina, a ne površina, dijeljenjem duljina ne dobijemo samo omjer, nego također duljine, a i kvadriranje pravokutnika odgovara drugom korijenu duljine (tj. uočio je kako EEVI12 i EEVI13 iskoristiti za množenje i dijeljenje duljina). Dakle, Descartes je uočio da se rezultati primjene sve četiri osnovne računske operacije i drugih korijena na duljine mogu konstruirati ravnalom i šestarom (ako je zadana jedinična duljina), tj. svi problemi koji se svode na kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima mogu se riješiti ravnalom i šestarom. Danas znamo da vrijedi i obrat: Ako je zadana jedinična duljina, ravnalom i šestarom se mogu konstuirati one i samo one duljine koje se iz 1 mogu izračunati s konačno mnogo operacija $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{\cdot}$. Brojevi koji odgovaraju tim konstruktibilnim duljinama zovu se euklidski brojevi i u njih, među ostalim, spadaju i Euklidove iracionalnosti iz EEX. Posebno, budući da je π transcendentan (što je 1882. dokazao Ferdinand von Lindemann), slijedi da problem kvadrature kruga nije rješiv. S druge strane, može se dokazati da ako kubni polinom s cjelobrojnim koeficijentima ima rješenje u euklidskim brojevima, onda

ima bar jedno racionalno rješenje. Stoga ni problem duplikacije kocke ni trisekcije kuta od 60° nisu rješivi ravnalom i šestarom [**?**, **?**, **?**, 26, 104].

9.4 Razvoj algebre u 17. stoljeću

Kao što smo vidjeli, krajem 16. st. prve primjere polinomijalnih jednadžbi stupnja n s n rješenja dao je Viète, a Harriot je u isto doba znao da ako su a, b i c rješenja kubne jednadžbe, ona se može zapisati u obliku $(x-a)(x-b)(x-c)=0$. No, prva osoba koja je iskazala **osnovni teorem algebre**[5] bio je 1629. francuski matematičar **Albert Girard** (1595.–1632.). On je ustvrdio da svaka jednadžba stupnja n (s realnim koeficijentima) ima n rješenja, s tim da dozvoljava da se ta rješenja nalaze u nekom većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva. Tvrdnju o broju rješenja su tadašnji matematičari prihvatili kao očitu, pa se posljedično gotovo 200 godina nije pokušavalo dokazati da *postoji n rješenja*, nego da *su rješenja kompleksni brojevi*. Descartes pak navodi i da se može zamisliti da svaka jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja, ali da ta „zamišljena rješenja" ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.[6] Kao što smo rekli, treći dio Descartesove *La Géométrie* bavi se algebrom. Zahvaljujući Descartesu postalo je poznato Harriotovo otkriće da ako je c nultočka polinoma p, onda je $p(x)=(x-c)q(x)$.[7] Ta činjenica je, naravno, bitan korak u dokazu osnovnog teorema algebre. Zanimljivo je spomenuti i **Descartesovo pravilo predznaka**, koje je bez dokaza naveo u *La Géométrie*: Broj pozitivnih rješenja jednadžbe jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka koeficijenata (u standardnom redoslijedu) [10, 26, 93, 104].

Primjer 37 *Jednadžba* $7x^5-6x^2+8x-9=0$ *prema Descartesovom pravilu ima ili* 3 *ili* 1 *pozitivno realno rješenje. Supstitucija* x *s* $-x$ *daje jednadžbu* $-7x^5-6x^2-8x-9=0$*, koja po Descartesovom pravilu nema pozitivnih rješenja, dakle polazna jednadžba nema negativnih rješenja. Budući da* 0 *očito nije rješenje, zaključujemo: Jednadžba* $7x^5-6x^2+8x-9=0$ *ima ili točno jedno (pozitivno) realno rješenje (a ostala četiri su kompleksna) ili pak ima tri (pozitivna) realna rješenja (i dva kompleksna).*

Poznat je i pokušaj **G. W. Leibniza** opovrgavanja tvrdnje iz osnovnog teorema algebre: Leibniz je tvrdio da se x^4+a^4 ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma jer je mislio da $\sqrt{i}$ nije kompleksan broj. Leibniz je vezan i za drugu od algebarskih novosti u 17. stoljeću, prvu pojavu **determinanti**, vezano za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Još Cardano je znao rješavati 2×2-sustave linearnih jednadžbi koristeći Cramerovo pravilo, ali bez ispisivanja matrica. Godine 1683. su Leibniz i neovisno o njemu japanski matematičar **Takakazu Shinsuke Seki** (1642.–1708.) uveli brojeve, koji se danas zovu determinantama, u istu svrhu, tj. kao pomoć za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Leibniz je te godine u pismu L'Hôpitalu opisao uvjet da neki sustav ima netrivijalno rješenje, a dokazao je i razne rezultate o sustavima koji se danas formuliraju pomoću determinanti (Cramerovo pravilo, Laplaceov razvoj), no to se nalazi u njegovim

[5] Svaki polinom stupnja n s realnim ili kompleksnim koeficijentima ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

[6] Upravo Descartes je prvi koristio naziv imaginaran u kontekstu kompleksnih brojeva.

[7] Citirano iz *La Géométrie*: „Iz gornjega je očigledno da je suma jednadžbe koja ima više korijena uvijek dijeljiva binomom koji se sastoji od nepoznanice umanjene za vrijednost jednog od istinitih korijena, ili plus vrijednost jednog od lažnih korijena." Descartes pod sumom jednadžbe misli na polinom kojeg dobijemo kad sve članove prebacimo na lijevu stranu. Istiniti korijeni su pozitivni, a negativne smatra 'lažnim'.

neobjavljenim radovima. S druge strane, Seki je opisao starije kineske metode rješavanja sustava i kao pomoć računa brojeva koje bismo danas zvali determinantama do veličine 5×5 [10, 26, 104]. Naravno, Leibniz (i L'Hôpital) puno su poznatiji u povijesti infinitezimalnog računa, čijem ćem se utemeljenju sad posvetiti.

9.5 Utemeljenje infinitezimalnog računa

Početkom 17. stoljeća, uslijed razvoja tehnike i znanosti u renesansi, matematičari su se ponovno zainteresirali za probleme površina i volumena zaobljenih likova i tijela, za problem određivanja tangente kao i za probleme optimizacije (određivanja minimuma i maksimuma). Spomenuli smo da je Kepler imao pojednostavljenu varijantu metode ekshaustije za računanje volumena rotacijskih tijela kao i uočio svojstvo da su točke ekstrema (u pravilu) stacionarne točke. No, pravi razvoj matematike za rješavanje navedenih problema omogućilo je Descartesovo utemeljenje analitičke geometrije 1637. Posebno je značajno da je njime problem određivanja tangente na krivulju s antičkih konstrukcija ravnalom i šestarom sveden na izračunavanje njezine jednadžbe temeljem poznate jednadžbe krivulje. Descartes se i sam bavio problemom određivanja tangente. On ga je svodio na problem određivanja normale na oskulacijsku kružnicu.[8] Tu je metodu u potpunosti algebraizirao i za geometrijske (algebarske) krivulje opisao u *La Géométrie*. Istim principom, ali čisto geometrijski je odredio tangentu na krivulju **cikloidu**. Podsjetimo se: Cikloida je krivulja koja nastaje kao trajektorija točke na kružnici, ako se ta kružnica kotrlja po pravcu. Ta je krivulja u 17. stoljeću bila predmet interesa mnogih matematičara (Mersenne, Pascal, de Roberval, Torricelli, Wallis, ...), među ostalim i jer ima zanimljiva fizikalna svojstva (primjerice, ima svojstvo tautohrone, što je Huygens iskoristio u svojoj konstrukciji sata s njihalom), a ime joj je 1599. dao Galileo. Neka je P točka cikloide u kojoj tražimo tangentu (slika 9.4). Neka kružnica koja generira cikloidu točki B dodiruje pravac po kojem se kotrlja kad se nalazi u položaju $(*)$ u kojem bi označena točka bila na najvišem položaju (a A je polazna pozicija točke na toj kružnici, dakle je AB pravac po kojem se kotrlja kružnica). Kroz P povučemo paralelu s AB i odredimo njezino sjecište Q s kružnicom u položaju $(*)$. Tada je paralela s QB povučena u P normala na cikloidu u točki P, njeno sjecište R s AB je središte oskulacijske kružnice, a okomica na PR u P je naravno tražena tangenta [17, **?**].

S druge strane, de Fermat je za određivanje tangente osmislo metodu vrlo sličnu suvremenom pristupu. Neka je $A=(x_0,y_0)$ točka u kojoj tražimo tangentu $y=k\,x+l$ na krivulju $y=f(x)$ (slika 9.5). Neka je O sjecište te tangente s osi apscisa. Uočimo da je koeficijent smjera tangente $k=\frac{y_0}{|OX|}$. Za mali prirast E su $\triangle OXA$ i $\triangle OYB$ približno slični jer je $f(x_0+E)\approx k\,(x_0+E)+l$ (tangenta je pravac koji najbolje aproksimira krivulju oko dane točke), dakle:

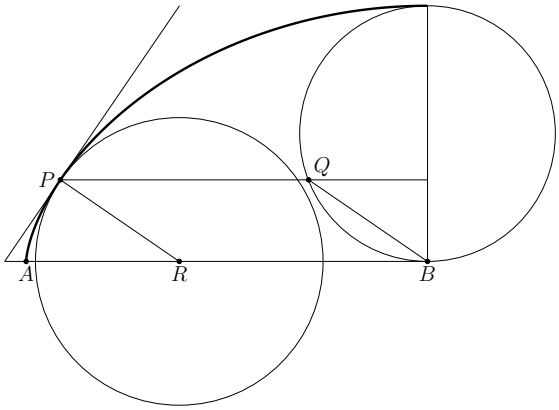
$$|OX| : (|OX|+E) \approx y_0 : f(x_0+E),$$

odnosno

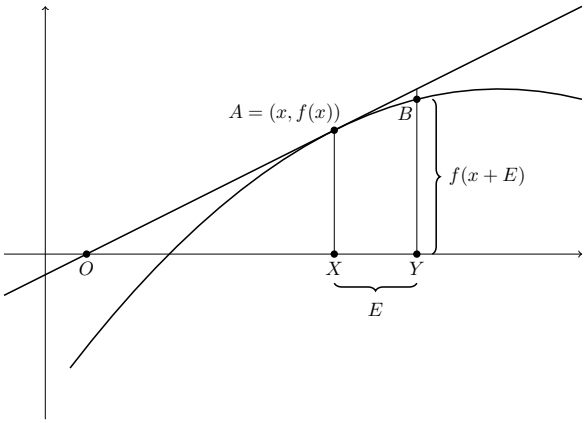
$$k=\frac{y_0}{|OX|}\approx\frac{f(x_0+E)-y_0}{E}.$$

Fermat nakon izračunavanja desne strane uzima $E=0$ i tako dobiva $|OX|$ i iz njega k te naposlijetku jednadžbu tangente. Tu je metodu koristio i za određivanje točaka ekstrema

[8] Oskulacijska kružnica u nekoj točki ravninske krivulje je kružnica koja prolazi kroz tu točku i u toj točki ima istu tangentu i zakrivljenost kao krivulja.



Slika 9.4: Descartesova konstrukcija tangente na cikloidu.



Slika 9.5: Fermatova konstrukcija tangente na krivulju $y = f(x)$.

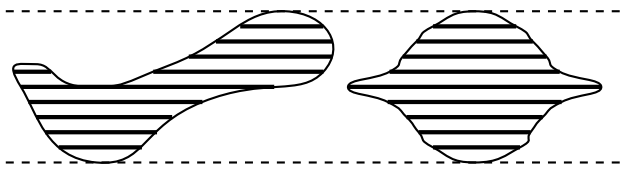
(kao točaka koje danas zovemo stacionarnim, tj. u kojima je koeficijent smjera tangente 0, što u njegovoj metodi poprima oblik uvjeta $f(x + E) = y$ u kojem se prvo maksimalno pokrati, a onda zanemari E) [10, **?**].

Primjer 38 *Ako tražimo tangentu na krivulju $y = x^3$ u nekoj njezinoj točci $A = (x_0, x_0^3)$, imamo $|OX| : (|OX| + E) \approx x_0^3 : (x_0 + E)^3$, iz čega dobijemo*

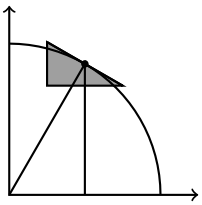
$$|OX| \approx \frac{Ex_0^3}{3x_0^2E + 3x_0E^2 + E^3} = \frac{x_0^3}{3x_0^2 + 3x_0E + E^2}.$$

Uzimajući $E = 0$ dobijemo $|OX| \approx \frac{1}{3}x_0$, dakle je $k = \frac{y_0}{|OX|} = \frac{x_0^3}{\frac{1}{3}x_0} = 3x_0^2$ pa je jednadžba tangente $y = 3x_0^2x - 2x_0^3$.

Među važnim prethodnicima utemeljenja infinitezimalnog računa moramo istaknuti Galileove studente Cavalierija i Torricellija, zatim de Robervala, Pascala, Barrowa i Wallisa. Talijanski matematičar **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598.–1647.) je nastavio razvijati Keplerove metode računanja površina i volumena. Svoju metodu nedjeljivih veličina objavio je 1635. pod naslovom *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Cavalieri ravninske figure smatra sastavljenim od paralelnih dužina, a prostorne od paralelnih likova, odnosno Cavalierijeve nedjeljive veličine



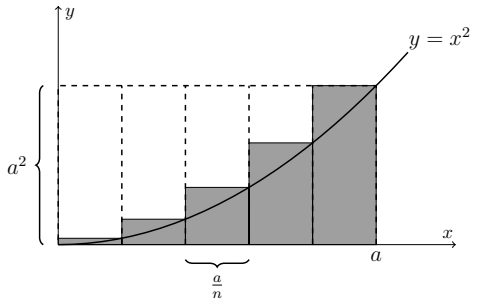
Slika 9.6: Cavalierijev princip



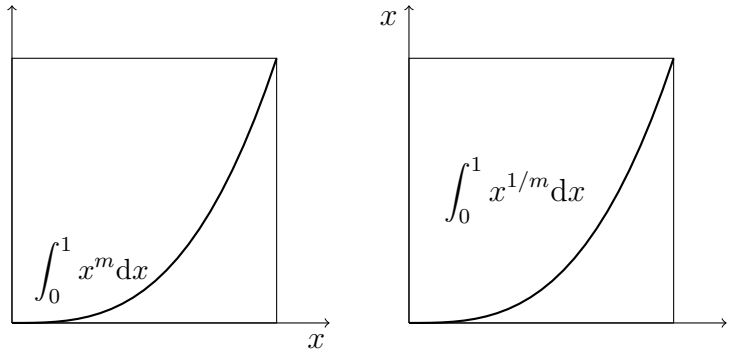
Slika 9.7: Pascalov karakteristični trokut

su „debljine“ 0. Stoga je **Cavalierijev princip** u izvornoj formulaciji ovako iskazan: Ravninske (prostorne) figure, tj. njihove površine (volumeni), stoje u istom omjeru kao ukupnost njihovih nedjeljivih veličina (slika 9.6). Koristeći taj princip, Cavalieri je uspio odrediti površine, koje bismo danas zapisali kao $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$. Među ostalim, tako je jednostavnije dobio Arhimedov rezultat o volumenu kugle. S druge strane, fizičar i matematičar **Evangelista Torricelli** (1608.–1647.), je kombinirao izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina. Dobio je mnoge rezultate, od kojih je najznamenitija **Torricellijeva truba**, primjer neograničenog tijela konačnog volumena. Radi se o rotacijskom tijelu koje nastaje rotacijom hiperbole $x\,y = 1$ $(1 \leq x < \infty)$ oko x-osi. Toricelli je pokazao da je njen volumen jednak π (mi bismo pisali $\int_1^\infty \frac{\pi \mathrm{d}x}{x^2} = \pi$, pa se radi o prvom primjeru konvergentnog nepravog integrala u povijesti). Poznati filozof i Torricellijev suvremenik Thomas Hobbes to je otkriće komentirao 1672.: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.* Torricellijev suvremenik, francuski znanstvenik **Gilles Personne de Roberval** (1602.–1675.) je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene). Tako popravljenom metodom, dijeljenjem na tanke pravokutnike, odredio je površine ispod $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, tj. ono što danas označavamo s $\int_0^a x^n \,\mathrm{d}x$ [11, 26, 104]. Pascal je pak 1659. opisao trokut kojeg je Leibniz kasnije nazvao **Pascalovim karakterističnim trokutum** (*triangulum characteristicum*), i kojeg je iskoristio u svom utemeljenju infinitezimalnog računa. Pascalov karakteristični trokut je pravokutni trokut kojemu je hipotenuza dio tangente (na kružnicu) oko promatrane točke, a katete su paralelne koordinatnim osima (u Pascalovo doba već je bilo poznato korištenje koordinatnog sustava). Za danu točku na kružnici (ili općenitijoj krivulji), taj je trokut sličan pravokutnom trokutu kojemu je hipotenuza odsječak normale od točke do osi apscisa, a katete su paralelne koordinatnim osima (slika 9.7) [11, 26, 104].

Kao što vidimo, sredinom 17. st. imamo niz primjera koji jasno najavljuju deriviranje i integriranje. No, u svim slučajevima nedostaju dvije bitne karakteristike **infinitezimalnog računa**: veza između određivanja tangente i površine (brzine i puta, tj. deriviranja i integriranje), te efikasne računske metode. Pod utjecajem Cavalierijevih i Torricellijevih



Slika 9.8: Wallisovo određivanje površine ispod $y = x^2$.



Slika 9.9: $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{1/n} \mathrm{d}x = 1$.

rezultata prvi korak u smjeru svođenja ovakvih izvoda na račun učinio je najutjecajniji engleski matematičar prije Newtona, **John Wallis** (1616.–1703.). Bio je profesor geometrije u Oxfordu. U doba engleskog građanskog rata angažirao se na strani parlamenta i bio poznat po svom znanju kriptografije. Bio je i jedan od ranih povjesničara matematike, a bavio se i logikom i (engleskom) gramatikom. Iz grupe matematičara s kojima se sastajao nastao je *Royal Society*. U svom djelu *De sectionibus conicis* (1655.) uveo je simbol ∞. Najznačajnije Wallisovo djelo je *Arithmetica infinitorum* (1656.),[9] čiji naslov sugerira glavni Wallisov doprinos: preciznije i efikasnije računske metode za računanje površina i volumena.

Primjer 39 *Wallis je površinu ispod $y = x^2$ između 0 i a odredio tako da ju je rastavio na n uskih pravokutnika širine $\frac{a}{n}$ (slika 9.8). Traženu površinu usporedio je s površinom površinom a^3 pravokutnika $[0, a] \times [0, a^2]$ koju je isto gledao kao rastavljenu na n pravokutnika površine $\frac{a}{n} \cdot a^2$. Stoga je omjer tih površina jednak:*

$$\frac{\frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{na}{n}\right)^2}{\frac{a}{n} \cdot a^2 + \frac{a}{n} \cdot a^2 + \ldots + \frac{a}{n} \cdot a^2} = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + \ldots + n^2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

što za velike n postaje sve bliže $\frac{1}{3}$, odnosno da tražena površina je $\frac{1}{3}a^3$.

Veća novost kod Wallisa je da je iz tako dobivenih površina ispod $y = x^n$ dobio površine ispod $y = x^{1/n}$. Naime, uočio je (slika 9.9) da je površina ispod $y = x^{1/n}$ komplementarna

[9] U ovom djelu se može naći i Wallisov produkt $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$.

(u odnosu na kvadrat $[0,1]\times[0,1]$) površini ispod $y=x^n$, odnosno dobio je zaključak kojeg danas bilježimo ovako: $\int_0^1 \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}$ [11, 26, 49, 104].

Neposredni prethodnik Newtonu i njegov profesor bio je **Isaac Barrow** (1630.–1677.). Kao dječak je navodno bio tako naporan, da se njegovog oca moglo čuti u molitvi, da ako Bog uzme k sebi koje od njegove djece, najlakše bi mu bilo ostati bez Isaaca. Studirao je (bez specijalizacije, kako je tada bilo uobičajeno) na *Trinity College* u Cambridgeu. Po završetku studija ostao je raditi kao *fellow* s istaknutim znanjem grčkog, teologije i prirodnih znanosti. U razdoblju 1655.–1659. putovao je Mediteranom, a tijekom puta u Tursku preživio je i aktivno sudjelovao u obrani broda od gusarskog napada. Boravio je u Smirni pa u Konstantinopolu, baveći se prvenstveno pravoslavnom teologijom. Po povratku u Englesku postao je profesor grčkog jezika u Cambridgeu, a od 1662. je vodio katedru za prirodne znanosti. Barrowova predavanja iz matematike i optike kasnije su i objavljena. Kad je 1669. napustio poziciju na sveučilištu, postao je kraljevski kapelan u Londonu. Godine 1677. obolio je od vrućice i pokušao se sam, kao ranije u Konstantinopolu, izliječiti postom i opijumom, ali je umro. Barrow je tangentu smatrao graničnim slučajem sekante, kad se njezina sjecišta s krivuljom međusobno približavaju. Još važnije je da je Barrow (a tako i malo ranije Torricelli) primijetio: Brzina se može odrediti iz puta, kao i obrnuto. Također, put se može dobiti kao površina ispod grafa brzine u ovisnosti o vremenu, a brzina kao koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti puta o vremenu. Vidimo da je time najavio osnovni teorem infinitezimalnog računa. Svoju metodu određivanja tangente i geometrijski opis upravo navedene inverznosti objavio je 1670. u sklopu *Lectiones Geometricae*. Barrowljeva metoda određivanja tangente je slična Fermatovoj, a temelji se na korištenju trokuta sličnog Pascalovom karakterističnom trokutu, koji je poznat kao Barrowljev diferencijalni trokut [11, 26, 72, 49, 104].

Često se kaže: „Newton i Leibniz otkrili su deriviranje i integriranje". Želi li se time reći da su definirali derivaciju preko limesa, a integral preko Darbouxovih suma? Da su bili prvi koji su znali izračunati ono što mi zovemo derivacijom i integralom? Ni jedno ni drugo. Do preciznih definicija derivacije i integrala trebat će proći oko 150 godina nakon Newtona i Leibniza. Kao što smo dosad vidjeli, svakako nisu bili prvi, jer su mnogi njihovi prethodnici znali odrediti koeficijent smjera tangente ili pak površinu ispod krivulje. Jesu li možda Newton i Leibniz bili precizniji u svom pristupu? Ni to. Razlog zašto se Newtonu i Leibnizu pripisuje utemeljenje **infinitezimalnog računa** je što su njih dvojica, nezavisno jedan od drugog, iz mnoštva pojedinačnih metoda i rezultata izveli jedinstvenu računsku metodu za rješavanje opisanih tipova problema, te jer su oni prvi jasno iskazali međusobnu inverznost deriviranja i integriranja (osnovni teorem infinitezimalnog računa). Newtonovi i Leibnizovi rezultati su matematički ekvivalentni, ali su pristupi bitno različiti: Newton pristupa fizikalno, a Leibniz apstraktnije. Opisat ćemo glavne crte oba pristupa [11, 26, 104].

Isaac Newton (1642.–1727.) je rođen nakon smrti svog oca. Kad je imao tri godine, njegova majka se preudala. Kad je po drugi put ostala udovica, majka je htjela da Isaac postane farmer, ali je on taj posao mrzio i njegov učitelj ju je uspio uvjeriti da mu dopusti školovanje. Studirao je na *Trinity College* u Cambridgeu i tijekom studija je otkrio interes za matematiku. Nakon diplome 1665. ostao je na *Trinity College*, ali je taj zbog epidemije kuge zatvoren te se Isaac povukao na obiteljsko imanje u Woolsthorpe. U dvije godine koje je tamo boravio razvio je svoje revolucionarne nove ideje infinitezimalnog računa, optike i gravitacije. Kasnije je naslijedio Barrowljevu poziciju na *Trinity College*. Tijekom 1670-ih se upleo u mnoge sukobe s drugim znanstvenicima. Prvi slom živaca doživio

je 1678., godinu kasnije mu je umrla majka, poslije je živio sve povučenije. Najvažnije Newtonovo djelo je *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principia*, 1687.), koje među ostalim sadrži i Newtonov zakon gravitacije. U to je doba postao sve više politički aktivan, posebno jer je katolički kralj James II. na sve pozicije postavljao katolike neovisno o sposobnostima. Nakon drugog sloma živaca 1693. potpuno se povukao iz znanosti i ostatak života bavio politikom. Postigao je mnoge visoke pozicije i obogatio se. Od 1703. je bio predsjednik *Royal Society*, a 1705. je postao prvi znanstvenik s titulom viteza (*sir*). Zadnje godine njegova života obilježene su sukobom s Leibnizom oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa. Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu su *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669., objavljen 1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671., objavljen 1736.) i *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693., objavljen 1704.). Uočljiv je veliki razmak između termina nastanka i objave tih djela, što je, navodno, prvenstveno bilo uzrokovano time što je u doba kad je napisao te tekstove objavljivanje, osobito „neisplativih“ znanstvenih tekstova, bilo teško zbog šteta koje je po londonsko tiskarstvo ostavio veliki požar 1666. [11, 26, 104].

Newtonova varijanta infinitezimalnog računa poznata je pod nazivom **metoda fluksija**. Newton je promatrao veličine ovisne o vremenu (fluense) x, y, ..., a njihove brzine nazvao je fluksijama. 1690-ih godina Newton je fluksije počeo označavati s $\dot{x}$, $\dot{y}$, ..., a fluksije fluksija (akceleracije fluensâ) s $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, ... Ako gledamo česticu koja se giba u koordinatnoj ravnini, njena pozicija je opisana dvama fluensima, apscisom i ordinatom, koje su funkcije vremena: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Vidimo da je Newtonov pristup krivuljama u ravnini ekvivalentan modernim parametarskim jednadžbama krivulje. Ako se u nekom trenutku čestica nalazi na poziciji $(x(t), y(t))$, onda su njena horizontalna i vertikalna komponenta brzine fluksije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, odnosno vektor brzine je na pravcu s koeficijentom smjera $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Budući da je vektor brzine uvijek tangencijalan na krivulju po kojoj se čestica kreće, zaključujemo da je kod Newtona koeficijent smjera tangente na krivulju kvocijent dviju *konačnih* (ne infinitezimalnih!) veličina $\dot{y}$ i $\dot{x}$. U *De Methodis Serierum et Fluxionum* Newton je iskazao temeljni zadatak infinitezimalnog računa: „Iz odnosa fluensâ odrediti odnos njihovih fluksija te obrnuto“ (tj. deriviranje i integriranje). U konkretnim računima Newton koristi male priraste $o\,\dot{x}$ fluensa x, gdje s o označava „beskonačno mali” prirast vremena. Metoda je vrlo slična ranijem de Fermatovom i Barrowljevom pristupu, ali prikladnija za efikasno računanje. Objasnit ćemo je na primjeru „deriviranja na Newtonov način” [11, 26, 74, 49, 95, 104].

Primjer 40 *Zadana je odnos fluensâ, tj. implicitna jednadžba krivulje:*

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Prvo u nju supstituiramo $x + o\dot{x}$ za x i $y + o\dot{y}$ za y:

$$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + axy +$$

$$+a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

Budući da (x, y) mora zadovoljavati polaznu jednadžbu, preostaje:

$$3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox +$$

$$+a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

Budući da $o \neq 0$ (radi se o malom prirastu), podijelimo s o:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0.$$

Naposlijetku zanemarimo o, jer je on ujedno i jako blizu 0. Tako dobijemo

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Iz ovog lako odredimo koeficijent smjera tangente na našu krivulju, u njezinoj točci (x, y):

$$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Za inverzni problem, tj. integriranje, Newton kreće od odnosa fluksija, tj. diferencijalne jednadžbe.[10] Dakle, ono što danas nazivamo integriranjem od svog samog početka povezano je s rješavanjem **diferencijalnih jednadbi**. Ako u takvoj jednadžbi imamo točno dvije fluksije ($\dot{x}$ i $\dot{y}$), prvi je korak odrediti njihov kvocijent (tj. već spomenuti koeficijent smjera tangente na krivulju). Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova potencija, posebno za integriranje. Pritom Newton još nije obraćao pozornost na područje konvergencije reda potencija, ali je jedan od prvih matematičara koji su ih uopće razmatrali. Newton je otkrio više razvoja u redove potencija, od kojih je najpoznatiji binomni red, kojeg je otkrio 1665., a opisao u jednom pismu H. Oldenburgu 1676. Razvio je i metodu za invertiranje redova potencija (određivanje reda potencija koji predstavlja inverznu funkciju od danog reda potencija) [11, 20, 26, 74, 49, 95, 104].

Primjer 41 *Ako je zadan odnos fluksija $\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2y^2$, onda je*

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Sad Newton koristi binomni red:

$$\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

što daje

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (1+)x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots.$$

Znajući da fluksiji x^n odgovara fluens $x^{n+1}/(n+1)$ (što je znao još Wallis), Newton zaključuje (mi bismo rekli: integrirao je član po član)

$$y = (x+)\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{9}x^9 + \frac{14}{11}x^{11} + \ldots$$

Newton u predgovoru svoje *The method of fluxions and infinite series with its application to the geometry of curve-lines* (1671., objavljeno 1736.) kaže: „Računanje s brojevima i varijablama je slično, pa je stoga prirodno, prikaz brojeva kao decimalnih razlomaka analogno primijeniti na varijable." Iskazuje i čudjenje, da to još nikome osim njemačkom matematičaru **Nicolausu Mercatoru** (Niklaus Kauffman, 1620.–1687.) nije palo na

[10] Newton je primijetio da u jednadžbi koja sadrži fluksije, svi članovi moraju biti istog stupnja, primjerice $\dot{x} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2 = 0$ se mora interpretirati kao $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2\dot{z}^2 = 0$ uz $\dot{z} = 1$.

pamet. Mercator je u tekstu *Logarithmotechnia* (1668.) za određivanje površine ispod istostrane hiperbole (tj. $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$) koristio, riječima opisan, Mercatorov red

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

kojeg je dobio iz geometrijskog reda $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$. Zbog toga se N. Mercatora smatra utemeljiteljem teorije **redova potencija**. Pritom je Mercator naveo i da bi se to moglo zvati „prirodnim" logaritmom od $1 + t$ (ističemo da se u to doba logaritmi još ne gledaju kao inverzne funkcije eksponencijalnih funkcija, tj. kao funkcije definirane putem baze) [11, 20, 26, 49, 104].

Njemački filozof i matematičar **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646.–1716.) je kao mladić je 1672. posjetio Pariz i ondje upoznao Huygensa, koji ga je podučio u matematici i fizici. Među ostalim, Huygens mu je dao neke Pascalove spise za proučavanje. U to je doba Leibniz osmislio poboljšanje *Pascaline*, što spominjemo i zato jer je Leibniz u povijesti matematike zapamćen kao prethodnik **računarstva**. Naime, 1703. je opisao račun, kojeg je osmislio dvadesetak godina ranije, u prvom pravom pozicijskom ne-dekadskom brojevnom sustavu u povijesti, u **binarnom brojevnom sustavu** (pri čemu je otkriće tog sustava pripisao starim Kinezima vezano uz već spomenuti *I-Ching*). Također, njegov je glavni cilj bio razviti univerzalni simbolički jezik (*lingua characteristica universas*), kojemu bi svrha bila lakše sporazumijevanje neovisno o materinjem jeziku, te vezano za to *calculus ratiocinator* računica razuma), u kojoj bismo manilipulacijom simbola uz određena pravila dobili i provjeravali tvrdnje. Prema Leibnizu, to bi omogućilo konstrukciju strojeva koji bi izvodili korektne logičke zaključke. Tako je s jedne strane prvi imao ideju umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice, zbog čega ga se smatra utemeljiteljem **matematičke logike**. Zbog navedenog je veliku pozornost pridavao simbolici pa nije iznenađujuće da mnogi moderni matematički simboli potječu od njega: $\int \dots \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$,[11] $\cdot$ za množenje, : za dijeljenje, ... Godinu dana nakon Pariza Leibniz je posjetio London i postao član *Royal Society*. Po povratku u Pariz bavio se proučavanjem Pascalovih i Descartesovih tekstova i tamo do 1676. razvio svoje prve ideje infinitezimalnog računa, od kojih je prve objavio 1680-ih godina. Od 1676. Leibniz je živio u Hannoveru, prvo kao knjižničar, kasnije kao savjetnik vojvode od Braunschweig-Lüneburg. Na tom namještenju provodio je i razne geološke projekte, ali se i dalje bavio matematikom i dinamikom. Kasnije je u službi vojvode putovao Europom i tako upoznao mnoge velike znanstvenike. U posljednjem dijelu života ponajviše se bavio filozofijom, a okupirao ga je i sukob s Newtonom [10, 11, 22, 26, 95, 104].

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize. Poticaj bavljenju tom temom bio je zadatak kojeg mu je 1672. postavio Huygens: Koliko iznosi suma reda recipročnih trokutastih brojeva

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots ?$$

Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2 - \frac{1}{n+1}$. Što je n veći, to je to bliže 2, odnosno Leibniz je zaključio da je suma reda 2. Tako je primijetio da vrijedi: Ako je $d_n = a_{n+1} - a_n$ za svaki n, onda je $\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}$, tj. da je diferenciranje inverzno sumiranju. Iz tog će nešto kasnije

[11] Označavanje parcijalnih derivacija uveo je 1786. Legendre.

dokazati inverznost deriviranja i integriranja, tj. osnovni teorem infinitezimalnog računa. Godinu kasnije, 1673., je otkrio i **Leibnizov red**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

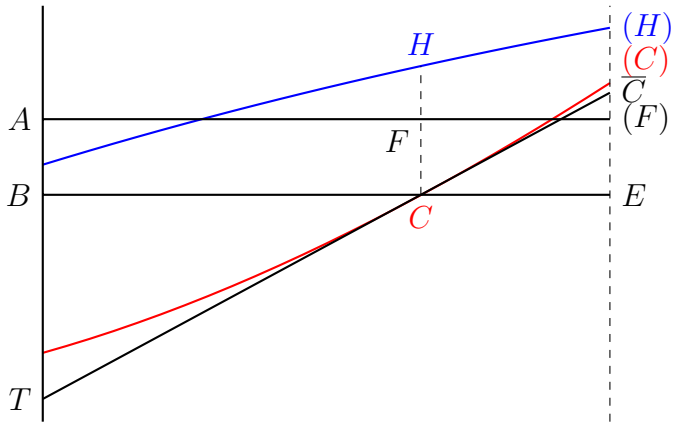
Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682. Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru **James Gregory**-ju (1638.–1675.), koji je naveo i neke razvoje u redove potencija. Gregory je koristio i varijantu kriterija uspoređivanja, a prva je osoba koja koristi (1667.) izraz konvergentan. Red za arkustangens

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

se danas naziva **Gregory-Mādhavin red**om jer ga je još ranije otkrio i za račun π na 11 decimala koristio indijski matematičar **Mādhava iz Sangamagrame** (oko 1350.–1425.) ili neki član njegove škole. Ovakvi redovi kasnije su nazvani Taylorovim redovima jer je Gregory umro mlad (od moždanog udara) i relativno nepoznat [11, 20, 26, 49, 95, 104].

Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.* iz čega je vidljiv utjecaj Cavalierija, koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je Leibniz za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji dy) koristio l. Tako primjerice 1675. formulu parcijalne integracije piše u obliku $\operatorname{omn}. xl = x \operatorname{omn}. l - \operatorname{omn}.\overline{\operatorname{omn}. l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su l-ovi i x-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d, isprva u nazivniku ($\frac{y}{\mathrm{d}}$), onda u modernom obliku dy. Koristeći tu simboliku je 1677. dokazao formule za diferenciranje (ne deriviranje!) produkata i kvocijenata funkcija. Leibnizov infinitezimalni račun se temelji na analitičkoj geometriji i generalizaciji Pascalovog karakterističnog trokuta. U svom članku *Suplementum geometriae dimensioriae* (1693.) Leibniz ga je iskoristio za dokaz osnovnog teorema infinitezimalnog računa. Svoj izvod započinje riječima „Sad ću pokazati da se opći problem kvadrature može svesti na nalaženje krivulje danog zakona tangecijalnosti (*declivitas*), tj. takve da stranice karakterističnog trokuta imaju dan međusobni odnos“. Leibniz razmatra dvije krivulje u koordinatnom sustavu. Prva od njih je krivulja čija se kvadratura traži, tj. uz suvremene ozake to bi bio graf funkcije $y = f(x)$ (plavo na slici 9.10) za koju tražimo funkciju „kvadrature“ $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, a njezin graf će u konačnici biti druga krivulja na istoj slici (crveno na slici 9.10). Leibniz gleda tangentu na drugu krivulju u jednoj njenoj točci C i dokazuje da je uz jedan uvjet njezin koeficijent smjera jednak ordinati točke H na prvoj krivulji (pri čemu H i C imaju istu apscisu) te u dokazu koristi sličnost trokuta TBC, kojeg tvore koordinatne osi i spomenuta tangenta, i karakterističnog trokuta $CE\overline{C}$, kojemu su katete infinitezimalne duljine ($\overline{C}$ je na spomenutoj tangenti). Da bi to stvarno rezultiralo željenim odnosom, Leibniz je uveo uvjet $|TB| : |BC| = |HF| : a$, gdje je a konstanta i iz njega dokazao željeni odnos krivulja [11, 20, 26, 45, **?**, 49, 95, 104].

Iako su Newtonov i Leibnizov koncept infinitezimalnog računa sadržajno ekvivalentni, vidljive su i bitne razlike. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina (fluksija $\dot{y}$ i $\dot{x}$), a kod Leibniza dviju infinitezimalnih (diferencijala dy i dx). Newtonov stil infinitezimalnog računa brzo se proširio britanskim otočjem, a Leibnizov kontinentalnom Europom. Praktične primjene su se posebno brzo razvile, ali je dugo ostao problem rigoroznog utemeljenja: Prirasti (o kod Newtona, dx kod Leibniza) su čas različiti od 0 (kad dijelimo s njima), a čas jednaki 0 (kad



Slika 9.10: Skica uz Leibnizov dokaz osnovnog teorema infinitezimalnog računa.

brišemo članove koji ih sadrže iz jednadžbi). Kako nešto može istovremeno biti jednako i različito od 0? Najpoznatiji kritičar bio je irski biskup i filozof **George Berkeley** (1684.–1753)., koji je 1734. postavio pitanje: „Što su fluksije? Brzine nestajućih prirasta? A što su ti nestajući prirasti? Niti su konačne veličine nit beskonačno male, a nisu niti ništa. Bismo li ih smjeli nazvati duhovima umrlih veličina?" Tek u 19. st. će Bolzano, Cauchy i Weierstraß u potpunosti razriješe ovaj problem, dati korektnu matematičku podlogu infinitezimalnom računu [11, 20, 26, 49, 95, 104].

Zanimljivo je, posebno jer se radi o jednom od najznamenitijih sukoba velikih znanstvenika u povijesti, ukratko opisati tijek sukoba Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa. Neosporno je da su Newtonovi rezultati desetak godina stariji od Leibnizovih, a moguće je i da je Leibniz pri svojim posjetima Londonu (1673. i 1676.) vidio Newtonove rukopise, no bar 1673. ih sigurno još nije bio u stanju razumiti. Leibnizovi prvi rezultati potiču iz 1675., a godinu kasnije Newton mu je poslao pismo koje je dugo putovalo. Leibniz je u odgovoru pohvalio Newtonove zasluge u teoriji redova, no Newton je smatrao da je Leibniz odugovlačio i napisao mu drugo pismo iz kojeg je jasno da ne želi odati detalje svojih rezultata. Među ostalim to pismo sadrži znameniti anagram `6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x.` značenja *Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*, tj. Newtonov opis osnovnog zadatka infinitezimalnog računa. To je pismo putovalo još dulje, a Leibniz je u odgovoru opisao osnovne crte svoje metode, na što mu je Newton odgovario da u tom nema ništa novog. To je sve potaklo Leibniza da što prije objavit svoje rezultate, što je i učinio 1684., dok je prva objava Newtonovih rezultata dio njegove *Principia*-e (1687.). Svađa se intenzivirala 1710., kad je škotski matematičar i član *Royal Society* John Keill u časopisu *Transactions of the Royal Society of London* optužio Leibniza za plagijat. Godinu kasnije Leibniz je zatražio ispriku od *Royal Society* te je imenovana komisija za utvrđivanje prvenstva. Bez da se Leibniza pitalo za mišljenje, komisija je 1713. utvrdila da je prvenstvo Newtonovo (vrijedi istaknuti da je u to doba Newton bio predsjednik *Royal Society* da je on sam napisao konačni izvještaj komisije). Leibniz je za to saznao od Johanna Bernoullija, te objavio anonimni tekst u kom spominje Newtonovu pogrešku koje nema u njegovim rezultatima, na što je Keill objavio odgovor, nakon čega se Leibniz povukao iz rasprave uz izgovor da neće davati odgovore idiotu. Iako je 1716. Leibniz umro, sukob se nastavio još dugo, a donekle i danas traje [11, 8, 26, 49, 95, 104].

Upravo spomenuti švicarski matematičar **Johannom Bernoulli** (1667.–1748.) bio je dobar Leibnizov prijatelj i prva je osoba koja je, u jednom pismu Leibnizu 1694., u matematičkom smislu koristila izraz **funkcija**. Johann Bernoulli u tom pismu kaže: „Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti." Johann Bernoulli je zaslužan i za naziv „integriranje": Dok je Leibniz isprva predlagao naziv *calculus summatoris* (i simbol $\int$), Johann je predložio *calculus integralis* (i simbol I). Na koncu su se složili oko kompromisa: simbol $\int$ i naziv *calculus integralis*. Skupa sa starijim bratom Jacobom, Johann je prvi nastavio Leibnizove rezultate. Oba brata su mnogo novih rezultata dobili vezano za diferencijalne jednadžbe,[12] a oba su doprinijeli i širenju ideja infinitezimalnog računa. Johann je, kao i Leibniz i Huygens, 1691. uspio odrediti jednadžbu lančanice.[13] On je tijekom boravka u Parizu podučio markiza **Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital** (1661.–1704.) tehnikama infinitezimalnog računa, a L'Hôpital je 1696. objavio prvi udžbenik *diferencijalnog* računa, čiji veći dio sadržaja se pripisuje Johannu, uključivo poznatog **L'Hôpitalovog pravila**, no L'Hôpital je samo u predgovoru zahvalio Bernoullijima [11, 26, 49, 95, 104].

Johann Bernoulli je 1696. zadao **problem brahistohrone**: Ako su u vertikalnoj ravnini zadane dvije točke (koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge), treba odrediti krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke. Rješenje je cikloida, što su pokazali Johann, Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital. Zanimljiva je usporedba Johannovog i Jacobovog rješenja. Johannovo rješenje je elegantnije (uočio je analogiju s lomom svjetlosti te koristeći Fermatov princip i Snellusov zakon loma dobio diferencijalnu jednadžbu $\mathrm{d}x = \frac{k\sqrt{y}}{\sqrt{1-k^2a^2y}}\mathrm{d}y$ i pokazao da je njezino rješenje cikloida). Jacobovo rješenje je kompliciranije, ali je imalo puno veći utjecaj na razvoj matematike. Jacob je naime uočio da je ovo potpuno novi tip problema: Dotad su se rješavali zadaci u kojima se traže točke ekstrema na zadanoj krivulji, a ovdje se traži „ekstremalna krivulja". Stoga je njegovo rješenje utemeljilo **varijacijski račun**, u kom se traži krivulja y za koju je neki[14] $I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x$ minimalan ili maksimalan [11, 8, 17, 26, 38, 83, 94, 104].

Kao što su braća Bernoulli bili važni neposredni nastavljači Leibnizovog stila infinitezimalnog računa u kontinentalnoj Europi, tako su se i na britanskom otočju neki matematičari istakli kao nastavljači s Newtonovim pristupom. Među njima se ističu Taylor i Maclaurin, koje danas obično asociramo s redovima potencija. Engleski matematičar, jedan od članova komisije za utvrđivanje prvenstva u sukobu Newtona i Leibniza, **Brook Taylor** (1685.–1731.) danas je najpoznatiji po Taylorovim redovima, no kako smo vidjeli, neki Taylorovi redovi bili su poznati već i prije njega. On je 1715. objavio tekst *Methodus incrementorum directa et inversa*, u kojem je dobio opći oblik **Taylorovog reda** dane funkcije iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule[15] kad „prirast nestaje" ($\Delta x \to 0$). Škotski matematičar **Colin Maclaurin** (1698.–1746.) je 1742. objavio knjigu *Treatise of fluxions* (s čak 763 stranice!), koja je prvi sustavni prikaz Newtonovog računa fluksija. Sedam godina kasnije je prevedena na francuski i tako doprinijela širenju Newtonovih ideja

[12] Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^a$ s $a \neq 0, 1$ je proučavao Jacob.

[13] Hiperbolne funkcije prvi je uveo Vincenzo Riccati (1707.–1775.) ca. 1760., a prvi sustavno proučavao Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.).

[14] U slučaju problema brahistohrone, minimizira se $\int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\mathrm{d}x$.

[15] Formulu su otkrlili, nezavisno jedan od drugoga, Gregory i Newton oko 1670.

u kontinentalnoj Europi. Djelo sadrži i mnoge primjene, posebno na fiziku. Maclaurin se nadao tim djelom barem dijelom odgovoriti na Berkeleyevu kritiku. Stoga je, primjerice, osnovni teorem infinitezimalnog računa dokazao oslanjajući se na algebarske nejednakosti. Po njemu danas nazivamo specijalni slučaj Taylorovih redova za razvoj oko 0, a to su **Maclaurinovi redovi**, jer ih je u tom djelu koristio koristio za određivanje ekstrema i točaka infleksije [11, 20, 26, 49, 94, 104].



Najvažniji matematički doprinosi u doba apsolutizma ...

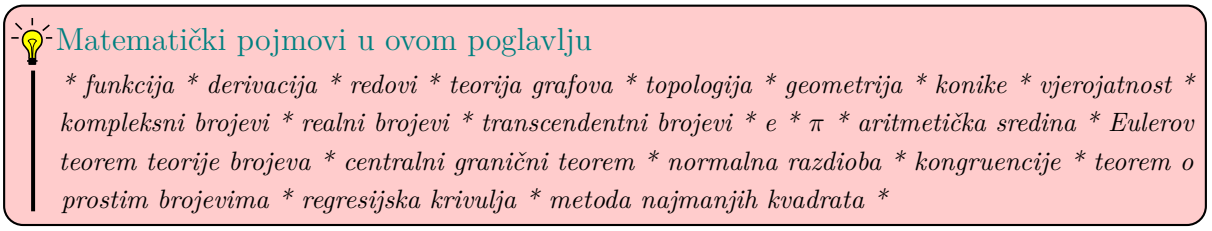
... su utemeljenje analitičke i projektivne geometrije te infinitezimalnog računa, obnova interesa za teoriju brojeva, iskaz osnovno teorema algebre te pojava determinanti i ideje simboličke matematičke logike. Najvažniji matematičari s glavnim doprinosima u ovo doba su, abecedno,

- *I. Barrow: prethodnik infinitezimalnog računa, Newtonov profesor, najavio osnovni teorem infinitezimalnog računa;*
- *Jacob Bernoulli: formiranje teorije vjerojatnosti kao grane matematike, dokaz binomnog teorema, slabi zakon velikih brojeva, bavio se s logaritamskom spiralom, rješenjem problema brahistohrone utemeljio varijacijski račun;*
- *Johann Bernoulli: prvo korištenje izraza funkcija i integral, jedno od rješenja problema brahistohrone, kao i brat Jacob nastavljač Leibnizovog stila infinitezimalnog računa;*
- *B. F. Cavalieri: Cavalierijev princip u fomu računa nedjeljivih veličinaM*
- *G. Desargues: utemeljitelj projektivne geometrije, Desarguesov teorem;*
- *R. Descartes:* 1637. *utemeljio analitičku geometriju, opisao Kartezijev list i logaritamsku spiralu, uvodi suvremene oznake za nepoznanice i koeficijente u jednadžbama, Descartesovo pravilo predznaka, teorem o faktoru polinoma postaje poznat zahvaljujući njemu, metoda određivanja tangente preko određivanja središta oskulacijske kružnice;*
- *P. de Fermat: glavni zaslužni za obnovu interesa za teoriju brojeva, iskazi malog i velikog Frematovog teorema, opis Fermatove spirale, s Pascalom suutemeljitelj teorije vjerojatnosti, neovisno o Descartesu razvio ideju analitičke geometrije, metoda određivanja tangente i ekstrema koja neposredno prethodi modernoj definiciji derivacije i stacionarne točke;*
- *M. Getaldić: neposredni prethodnik analitičke geometrije, primjenjuje algebru (Viètinog stila) na geometriju;*
- *A. Girard: iskaz osnovnog teorema algebre;*
- *J. Gregory: otkriće nekih redova potencija (npr. Gregory-Madhavin red za arkustanges), prvo korištenje izraza konvergentan;*
- *C. Huygens: prva knjiga o vjerojatnosti, uvodi pojam očekivanja,*
- *G. W. Leibniz: uveo determinante u svrhu rješavanja sustava linearnih jednadžbi, uvodi binarni brojevni sustav, ideja simboličke logike, neovisno o Newtonu utemeljio inifinitezimalni račun, koeficijent smjera tangente je kvocijent dvaju diferencijala, opisao Leibnizov red i Leibnizov kriterij, uveo oznake $\int$, $\mathrm{d}x$, $\cdot$, $:$;*
- *G. F. A. Marquis de L'Hôpital: autor prvog udžbenika diferencijalnog računa (na temelju predavanja Johanna Bernoullija);*
- *C. Maclaurin: djelo kojim je pokušao odgovoriti na Berkeleye prigovore i čiji prijevodi su doprinijeli širenju računa fluksija, koristi redove potencija za određivanje ekstrema i točaka infleksije;*
- *N. Mercator: utemeljitelj teorije redova potencija (Mercatorov red za funkciju koju naziva prirodnim logaritmom);*
- *M. Mersenne: komunikacija sa svim bitnim znanstvenicima svog doba, bavio se prostim i savršenim brojevima;*

- *sir I. Newton: neovisno o Leibnizu utemeljio infinitezimalni račun u formi računa fluksija (brzine fluensa), otkrio binomni red, koristio redove potencija, koeficijent smjera tangente je kvocijent dviju fluksija, nedostatnu utemeljenost njegovog (i Leibnizovog) računa je uočio biskup G. Berkeley;*
- *B. Pascal: dopisivanjem s de Fermatom oko problema kocaka i problema bodova* 1654.. *utemeljio teoriju vjerojatnosti, opisao svojstva Pascalovog trokuta, dokazao teorem o mističnom heksagramu, karakteristični trokut određen tangentom na kružnicu;*
- *G. P. de Roberval: preciziranje Cavalierijeve metode računanja površina i volumena;*
- *T. Sh. Seki: neovisno o Leibnizu opisao determinante u svrhu rješavanja sustava linearnih jednadžbi;*
- *B. Taylor: dobio Taylorove redove kao granični slučaj Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule;*
- *E. Torricelli: kombinira metodu ekshaustije s Cavalierijevim principom, Torricellijeva truba (neograničeno rotacijsko tijelo ograničenog volumena);*
- *J. Wallis: uveo simbol ∞, aritmetizirao i algoritmizirao ranije metode računanja površina i volumena.*

Poglavlje 10

Matematika u doba prosvjetiteljstva



Iako temelji prosvjetiteljstva sežu još u doba Descartesa, u užem smislu koji koristimo ovdje radi lakše periodizacije povijesti matematike, prosvjetiteljstvo je doba prosvijećenog apsolutizma, industrijske, ali i političkih revolucija, te dominacije racionalizma i utemeljenja modernih znanstvenih metoda, počevši od kraja 17. stoljeća pa do početka 19. stoljeća. Za razliku od prethodnog razdoblja, u ovom je živio jedan toliko istaknuti matematičar da se njegovi doprinosi istuču u odnosu na sve ostale zajedno: Leonhard Euler. On će ne samo formirati matematičku analizu u zasebnu granu matematike, nego i utemeljiti topologiju (točnije, teoriju grafova) i analitičku teoriju brojeva i dati mnoštvo doprinosa u skoro svim tada postojećim granama matematike. Osim njegovih doprinosa, u doba prosvjetiteljstva ističe se daljni razvoj teorije vjerojatnosti, uvođenje kompleksne ravnine i pojava neeuklidskih geometrija. Uz to, u ovo razdoblje pada djelovanje najznamenitijeg hrvatskog znanstvenika, Ruđera Josipa Boškovića.

10.1 Razvoj infinitezimalnog računa u 18. stoljeću

Švicarski matematičar **Leonharda Eulera** (1707.–1783.) je rođen u Baselu, gdje je studirao filozofiju i pravo. Tu ga je Johann Bernoulli ohrabrio da se posveti matematici. Karijeru je proveo u St. Petersburgu i Berlinu: Godine 1727. mu je Johannov sin Daniel prvo našao zaposlenje na Akademiji znanosti u St. Petersburgu, gdje je po Danielovom povratku u Basel 1733. preuzeo katedru matematike. Tako je imao dovoljno novaca da se oženi. Imao je 13 djece, ali samo pet je preživjelo djetinjstvo. Već brzo nakon ženidbe počeo je imati zdravstvene probleme. Od 1738. je na desno oko bio praktički slijep. Kad je 1740. politička situacija postala nemirna, preselio je Berlin, kamo ga je pozvao car Friedrich Veliki. Tu je Euler napisao gotovo 400 tekstova na najrazličitije matematičke teme, uključivo popularnog teksta *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de pyhsique et de philosophie*. No, s vremenom je postao sve nezadovoljniji, posebno zbog careva miješanja u vodstvo akademije. Nakon stupanja na vlast Katarine Velike, vratio se u St. Petersburg 1766. Godine 1771. dom mu je izgorio u požaru, a Euler je uspio spasiti

samo sebe i svoje matematičke rukopise. Ubrzo zatim, potpuno je oslijepio, no to ga nije spriječilo u daljnjem radu. Njegovo znamenito pamćenje i dvojica njegovih sinova pomogli su u tome da je velik dio njegovog ukupnog opusa od preko 800 radova za života nastao upravo u doba potpune sljepoće. Na sam dan smrti još je podučavao matematici svoga unuka i bavio se proračunima kretanja dvaju balona. Prije nego se posvetimo Eulerovim doprinosima u infinitezimalnom računu, osvrnimo se prvo na njegove doprinose drugim disciplinama [11, 26, 104].

Po mišljenju mnogih, Eulerova *Introductio in analysin infinitorum* (1748.) je za matematičku analizu ono što su *Elementi* za geometriju ili *Al-Kitāb al-muhtaṣar fī hisab al-džabr wa-l-mukābala* za algebru. Među najpoznatijim rezultatima iz tog djela je izvod reda potencija za eksponencijalnu funkciju. Euler je ujedno prvi matematičar koji je logaritamske funkcije sustavno gledao kao inverze eksponencijalnih, tj. logaritme kao funkcije definirane putem baze. Opisat ćemo ukratko Eulerov pristup. Neka je $a > 1$. Tada postoji konstanta k (ovisna samo o a) takva da je

$$a^{\omega} = 1 + k\,\omega$$

za ω „toliko malen, da taman da nije 0". Ako to potenciramo na j i na desnu stranu primijenimo Newtonov binomni red,[1] dobit ćemo

$$a^{j\,\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{2!}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3!}k^3\omega^3 + \dots$$

Proširimo svaki m-ti član s j^{m-1}:

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{(j-1)}{2!j}j^2k^2\omega^2 + \frac{(j-1)(j-2)}{3!j\cdot j}j^3k^3\omega^3 + \dots$$

Naposlijetku, supstituiramo $x = j\omega$:

$$a^x = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}\cdot\frac{j-1}{j}\cdot x^2 + \frac{k^3}{3!}\cdot\frac{(j-1)(j-2)}{j^2}\cdot x^3 + \dots$$

Sad Euler zaključuje da ako je j „beskonačno velik", možemo uzeti $\frac{j-1}{j} = \frac{j-2}{j} = \dots = 1$, a svaki x se može napisati kao umnožak takvog velikog j i malog ω. Stoga vrijedi:

$$a^x = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \dots.$$

Taj red je najjednostavniji za $k = 1$, a odgovarajući a Euler je označio s e. Taj razvoj za e[1] je iskoristio za izračunavanje e na 23 decimale, a (1744.) je dokazao i da je e iracionalan broj i dao njegov razvoj u verižni razlomak. Stoga ga njemu u čast nazivamo Eulerovim brojem. Dalje je Euler iz $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dokazao **de Moivreovu formulu**ı[2]ndexformula, de Moivreova

$$(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos(nx) \pm i\sin(nx)$$

(u to doba je još pisao $\sqrt{-1}$ za imaginarnu jedinicu, ali 1777. je upravo Euler uveo oznaku i). Iz toga je izveo redove potencija za sinus i kosinus te formule

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

[1] $(1+x)^j = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{j(j-1)\dots(j-m+1)}{m!}x^m$.

[2] Formula nosi ime po Abrahamu de Moivreu koji ju je prvi objavio, 1722.

Iz njih pak slijedi znamenita **Eulerova formula**

$$e^{i\,x} = \cos x + i \sin x.$$

Spomenimo ovdje da je ekvivalentna formula $\ln(\cos q + i \sin q) = iq$ bila 1712. poznata engleskom matematičaru **Rogeru Cotesu** (1682.–1716.), koji je poznat i po tome što je, čini se, bio prvi značajni matematičar koji je za nalaženje najverojatnijeg stvarnog iznosa mjerene veličine (usp. temeljne postavke računa pogreške kod Galilea) predložio težinsku aritmetičku sredinu pri čemu su kod Cotesa težine obrnuto proporcionalne greškama pojedinih mjerenja. Ako su one sve jednake, dobijemo **aritmetičku sredinu** kao procjenu stvarnog iznosa, koja je najkasnije 1770-ih godina postala uobičajena procjena stvarne vrijednosti [11, 26, 41, 94, 92, 104].

Vratimo se Euleru. Euler je prvi matematičar koji je pojam **funkcije** postavio kao temeljni matematički pojam, a analizu opisao je kao matematičku granu koja se bavi funkcijama. Uveo je i oznaku $f(x)$ (1734.), a 1755. je pokušao dati definiciju funkcije. Eulerova „definicija" funkcije u slobodnom prijevodu glasi:

> Funkcija neke varijabline veličine je *analitički izraz*, koji je na neki način složen iz te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.

Pod analitičkim izrazima Euler je podrazumijevao formule kojima zadajemo funkcije, pri čemu je dozvoljavao beskonačne sume i produkte te verižne razlomke. Euler je funkcije podijelio na algebarske i transcendentne te predložio da se transcendentne proučavaju preko razvoja u redove potencija (pri čemu nije uvijek pazio na područje konvergencije). Također, Euler je prvi koristio pojam neprekidne funkcije, no to je za njega značilo da je odgovarajući analitički izraz samo jedan (da funkcija nije zadana po dijelovima različitim formulama) [11, 26, 49, 87, 104, 105].

Znamenito je i Eulerovo rješenje **Baselskog problema**. Baselski problem je zadatak sumacije reda

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

kojeg je 1650. zadao talijanski matematičar **Pietro Mengoli** (1625.–1686.). Zadatak je postao šire poznat kad ga je 1689. opisao, u tekstu kojeg je objavio u rodnom Baselu, Jacob Bernoulli. Oba brata Bernoulli su bezuspješno pokušali izračunati navedenu sumu, iako je Jacob uspio dokazati da je manja od 2. Euler je pak 1735. dobio (kasnije je dao precizniji dokaz) da je:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Euler je krenuo od Maclaurinovog reda za sinus, kojeg je podijelio s x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots,$$

što je tretirao kao polinom beskonačnog stupnja. Njegove nultočke su $n\,\pi$, gdje je $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pa je pretpostavio da ga se može faktorizirati[3] kao polinom, tj. pretpostavio je da je gornji red jednak

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots.$$

[3]Euler se bavio i algebrom, konkretno dokazom osnovnog teorema algebre. Utvrdio je da je netočan Leibnizov „kontraprimjer", tj. tvrdnja da se $x^4 + a^4$ ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma (1742.). Dokazao je osnovni teorem za polinome s realnim koeficijentima stupnjeva do 6.

Izjednadčavanjem koeficijenata uz x^2 u ovom beskonačnom produktu s koeficijentom uz x^2 u gornjem redu potencija dobio je $-\frac{1}{3!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}$, iz čega slijedi rješenje Baselskog problema [11, 20, 26, 49, 104].

Od mnogih Eulerovih doprinosa matematičkoj analizi izdvajamo još njegov pokušaj razrješenja prirode infinitezimalnih veličina, tj. diferencijala $\mathrm{d}x$. Euler u *Institutiones calculi differentialis* (1755.) kaže:

> Onima, koji pitaju što je infinitezimalno mala veličina u matematici, odgovaramo: Ona je u biti jednaka nuli.

Diferencijali različitih varijabli za Eulera su različite nule, pa je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$, ali $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ može poprimiti različite iznose. Iz toga je izveo objašnjenje brisanja viših potencija diferencijala iz izraza: Budući da je

$$\frac{\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 1 + \mathrm{d}x = 1,$$

slijedi

$$\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x.$$

To je dalje iskoristio za dokazivanje pravila diferenciranja.

Primjer 42 *Eulerov dokaz pravila za diferenciranje kvocijenta kreće od korištenja geometrijskog reda:*

$$\frac{1}{q+\mathrm{d}q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1+\frac{\mathrm{d}q}{q}} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{\mathrm{d}q}{q} + \frac{\mathrm{d}q^2}{q^2} - \dots\right) = \frac{1}{q} - \frac{\mathrm{d}q}{q^2}.$$

Stoga je:

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+\mathrm{d}p}{q+\mathrm{d}q} - \frac{p}{q} = (p+\mathrm{d}p)\left(\frac{1}{q} - \frac{\mathrm{d}q}{q^2}\right) - \frac{p}{q} = \\ = \frac{p}{q} - \frac{p\mathrm{d}q}{q^2} + \frac{\mathrm{d}p}{q} - \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{q\mathrm{d}p - p\mathrm{d}q}{q^2}.$$

Primjer 43 *Neka je* $y = \sin x$. *Budući da je* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, *slijedi*

$$\mathrm{d}y = \sin(x+\mathrm{d}x) - \sin x = \sin x \cos(\mathrm{d}x) + \sin(\mathrm{d}x)\cos x - \sin x.$$

Zbog $\mathrm{d}x = 0$ *je* $\cos(\mathrm{d}x) = 1$ *i* $\sin(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$,[4] *preostaje* $\mathrm{d}y = \cos x\, \mathrm{d}x$.

Ono što je ovdje posebno uočljivo je da je u Eulerovo doba diferencijalni račun stvarno bio diferencijalni, a da još nemamo derivacije. Napomenimo za kraj da se Euler bavio i diferencijalnim računom za funkcije više varijabli, diferencijalnim jednadžbama te varijacijskim računom [11, 26, 46, 49, 104].

Mnoge analitičke interese Euler je dijelio sa suvremenikom, francuskim matematičarem **Jean le Rond d'Alembertom** (1717.–1783.). Bio je i suizdavač i koautor Diderotove *Encyclopedie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* i unutar nje je napisao enciklopedijske članke, među ostalim, o diferencijalima i limesima (1754.). Time je D'Alembert prvi ili barem jedan od prvih koji su primijetili: Za opravdanje infinitezimalnog računa bitni su limesi, odnosno on je pitanje matematički rigoroznog utemeljenja infinitezimalnog računa usmjerio na limese. No, njegova „definicija" limesa je neprecizna. Dalje, diskutirajući diferencijale prvi sustavno razmatra diferencijalne

[4] Oko svake točke $(c, f(c))$ najbolja nekonstantna aproksimacija funkcije f je dana tangentom, tj. s prva dva člana Taylorovog razvoja oko c.

kvocijente, tj. derivacije. Pritom ističe da se diferencijalni račun svodi na algebarsko određivanje limesa kvocijenta i da je bit diferencijalnog računa u limesu kvocijenta infinitezimalnih veličina, a ne samim infinitezimalnim veličinama. Izrazio je sumnju u korištenje nekonvergentnih redova, a razvio je i po njemu nazvani kriterij konvergencije reda (objavljen u *Opuscules MathÅ©matiques*, 1761.–1780.). D'Alembert je bio vanbračno dijete artiljerijskog oficira i bivše časne sestre koja je od pape dobila dozvolu razrješenja zaređenja. Imala je niz ljubavnih afera i sudjelovala je u mnoštvu političkih intriga. Kad se rodio, majka ga je ostavila na stepenicama pariške crkve St. Jean Le Rond. Stoga je kršten kao Jean Le Rond, te smješten u dom za siročad. Otac ga je ubrzo potražio i pobrinuo se da se za njega brine žena jednog staklara, Madame Rousseau, koju je d'Alembert uvijek doživljavao kao svoju majku jer ga prava majka nikad nije priznala kao sina, a kod gospođe Rousseau je živio sve do srednjih godina. Otac mu je umro kad je Jean imao 9 godina, no ostavio mu je dovoljno novca da se može obrazovati. Upisan je u jansenističku školu. Ubrzo je promijenio ime u Jean d'Alembert. U toj se školi zainteresirao za matematiku i fiziku. Kad je 1735. završio školu, odlučio se za pravničku karijeru, no u slobodno se vrijeme nastavio baviti matematikom. Kad je 1738. postao advokat, predomislio se i sljedeće godine upisao studij medicine, no ni s tim studijem nije bio zadovoljan. Čini se da je jedino što ga je stvarno zanimalo bila matematika i u njoj je neobično brzo napredovao, osobito uzevši u obzir da je bio uglavnom samouk. D'Alembert je posebno poznat po svojim doprinosima infinitezimalnom računu i matematičkoj fizici. Smatra ga se utemeljiteljem teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i njihovih primjena u fizici. Život je proveo u Parizu i postigao velik matematički ugled, ali je često bio upetljan u razne sukobe jer je bio sklon svađama sa svima u svojoj okolini, a najpoznatiji su njegovi sukobi s Clairautom[5], Danielom Bernoullijem i Eulerom (s kojim je isprva bio u dobrim odnosima). U drugom dijelu života više se bavio književnošću i filozofijom. Nakon više godina slabog zdravlja, umro je od bolesti mjehura. Kao poznati nevjernik pokopan je u neoznačenom grobu [11, 26, 44, 49, 104].

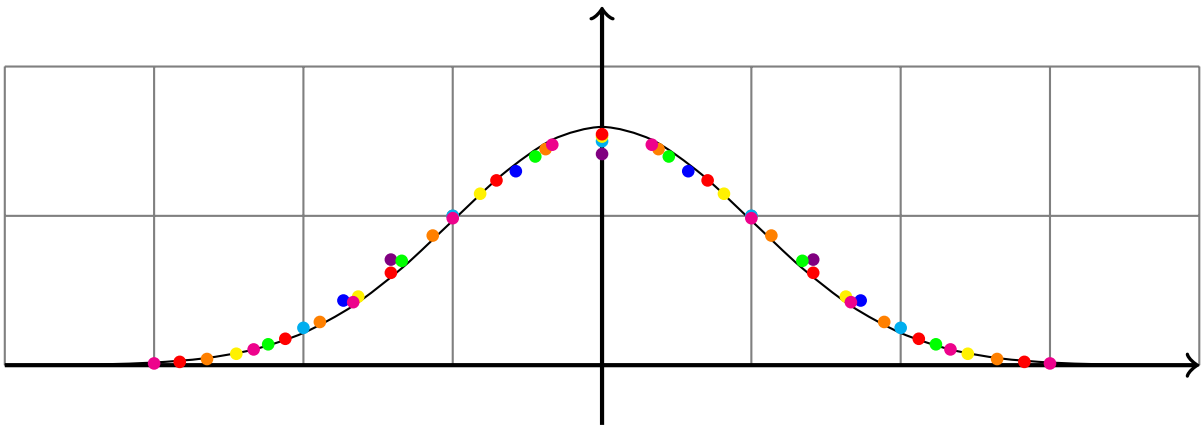
10.2 Moderniziranje teorije vjerojatnosti

Spomenuli smo da je Euler izveo formulu koju nazivamo de Moivreovom formulom za potenciranje kompleksnih brojeva. Ime je dobila po Abrahamu de Moivreu, koji ju je zapisao 1698., no znao ju je već 1676. Newton. No, iako je de Moivre većini najpoznatiji po toj formuli, on je iznimno važna figura u povijesti teorije vjerojatnosti. **Abraham de Moivre** (1667.–1754.) je bio rođen u Francuskoj, zbog vjere morao iseliti u Englesku. U Londonu je živio od „instrukcija". U Engleskoj je pak bio diskriminiran zbog nacionalnosti i nikad nije uspio dobiti mjesto profesora, iako su mu prijatelji bili Halley i Newton. Poznata je i anegdota o njegovoj smrti, da je potkraj života primijetio da svaki dan spava po 15 minuta dulje te da je predvidio da će umrijeti kad prvi put prespava puna 24 sata, a tako je i bilo. De Moivre je u *Miscellanea Analytica* (1730.) je koristio formulu

$$n! \approx K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(za velike n). Uz $K = \sqrt{2\pi}$ ta je formula poznata kao Stirlingova. U izdanju *Doctrine of chances* 1738. (latinska verzija objavljena je 1711., a engleska izdanja 1718., 1738. te 1756.).

[5]Alexis Claude Clairaut, 1713.–1765., francuski matematičar, pokušavao je potvrditi Newtonovo i Huygensovo uvjerenje da je Zemlja spljoštena na polovima.



Slika 10.1: Normalna razdioba kao limes binomnih

de Moivre je otkriće te konstante pripisuje škotskom matematičaru Jamesu Stirlingu (1692.–1770.). Koristeći Stirlingovu formulu de Moivre je (još 1733.) izveo prvu formulaciju **centralnog graničnog teorema** (za slučaj $p = \frac{1}{2}$), tj. de Moivre je prvikako smo rekli, sadrži centralni granični opisao **normalnu razdiobu**. De Moivre je promatrao niz n (nezavisnih) Bernoullijevih pokusa. Budući da je za velike n egzaktni račun vjerojatnosti da uspjeh ostvarimo između k i l puta korištenjem binomne razdiobe mukotrpan, de Moivre je tražio kako to procijeniti. Prvo je uočio karakteristika grafa binomne distribucije za različite manje n. Tako je primijetio da ako ishodište pomaknemo za $\frac{n}{2}$ ulijevo, tj. ako umjesto točaka $\left(k, \binom{n}{k}\right)$ crtamo točke $\left(k - \frac{n}{2}, \binom{n}{k}\right)$, sve binomne distribucije postaju parne funkcije. Da bi ujednačio ukupne vrijednosti, iznose vjerojatnosti skalirao je s 2^n, odnosno crtao točke $\left(k - \frac{n}{2}, \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)$. Naposlijetku, uočio je da ako apscise i ordinate skaliramo s $\frac{1}{\sqrt{n}}$ odnosno $\sqrt{n}$, što je veći n, to će grafovi binomnih distribucija sve više sličiti na jednu zvonoliku krivulju (slika 10.1) [11, 26, 50, 92].

Među raznim zadacima koje je de Moivre riješio u *The Doctrine of Chances*, u izdanju 1756. ističe se **problem kockareve propasti**. Problem glasi: Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos, a u svakom krug je vjeorjatnost pobjede prvog igrača p (konstanta). Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost da će, recimo, drugi igrač ostati bez novca (propasti)? Za slučaj kad oba igrača igru započinju s jednakim iznosima novca, ovim problemom su se bavili i svoja rješenja dali još Pascal, Fermat i Huygens. Rješenje općeg slučaja, ali bez opisa postupka, dao je Jacob Bernoulli. De Moivreovo rješenje općeg slučaja nije samo prvo s detaljima, nego je i vrlo originalno. De Moivre je zamislio da igrači imaju novce složene u tornjeve i da po jedan novčić predstavlja po jedan ulog. Ovisno o tome tko u pojedinom krugu pobijedi, najgornji novčić prvoga se prebacuje drugom ili obrnuto. Prvi igrač na početku ima a novčića, a drugi igrač njih b. Zatim je de Moivre novčićima dodijelio „nominalne vrijednosti": Najdonji novčić prvog igrača ima nominalnu vrijednost $x = \frac{q}{p}$ (s $q = 1 - p$), sljedeći na njemu x^2 i t.d. do najgornjeg novčića nominalne vrijednosti x^a. Dalje najgornji novčić drugog igrača ima nominalnu vrijednost x^{a+1}, novčić ispod njega x^{a+2} i t.d. do najdonjeg novčića drugog igrača koji ima nominalnu vrijednost x^{a+b}. Budući da se u svakom krugu ulažu najgornji novčići, nominalni ulog drugog je u svakom krugu x puta veći od uloga prvog. Stoga je očekivana nominalna vrijednost dobitka prvog igrača u svakom krugu

$$p\,x^{i+1} - q\,x^i = 0,$$

gdje je i broj novčića koje je na početku tog kruga još imao prvi igrač. Budući da je očekivanje u svakom krugu nula, ono je nula i na razini čitave igre. Specijalno, umnožak vjerojatnosti P_A da prvi osvoji sve novce od drugog (da drugi propadne) i njegovog nominalnog dobitka u tom slučaju jednaka je umnošku vjerojatnosti P_B da drugi osvoji sve novce od prvog (da prvi propadne) i njegovog nominalnog dobitka u tom slučaju:

$$P_A \cdot (x^{a+1} + x^{a+2} + \ldots + x^{a+b}) = P_B \cdot (x + x^2 + \ldots + x^a),$$

odnosno, koristeći $P_A + P_B = 1$ i formulu za sumu geometrijskog niza, dobijemo (izuzev za slučaj $p = q = \frac{1}{2}$) da je vjerojatnost propasti drugog igrača [11, 26, 91]:

$$P_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Među vjerojatnosničarima 18. stoljeća ističe se i već spomenuti Eulerov prijatelj **Daniel Bernoulli** (1700.–1782.), nećak Jacoba i sin Johanna Bernoullija, Eulerov prijatelj. Najpoznatiji je po doprinosima matematičkoj fizici, ali je ujedno prvi uveo tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti i svoja je otkrića primjenjivao i na pitanja osiguranja. Utemeljio je i primjenu teorije vjerojatnosti na kinetičku teoriju plinova. Najpoznatiji mu je doprinos analiza jednog znamenitog vjerojatnosnog paradoksa, kojeg je objavio u izvještajima St. Petersburgške Akademije znanosti 1738. Znameniti **St. Petersburški paradoks** glasi: Igrač baca novčić. Kockarnica će mu isplatiti 1 novčić ako u prvom bacanju padne glava, 2 ako glava prvi put padne u drugom bacanju, 4 ako glava prvi put padne u trećem bacanju itd. 2^{n-1} ako se glava prvi put pojavi u n-tom bacanju. Koliko iznosi pravedni ulog igrača na početku igre? Paradoks se sastoji u sljedećoj analizi: Lako je uočiti da je vjerojatnost dobitka u iznosu 2^{n-1} je 2^{-n}. Stoga očekivana isplata igraču iznosi

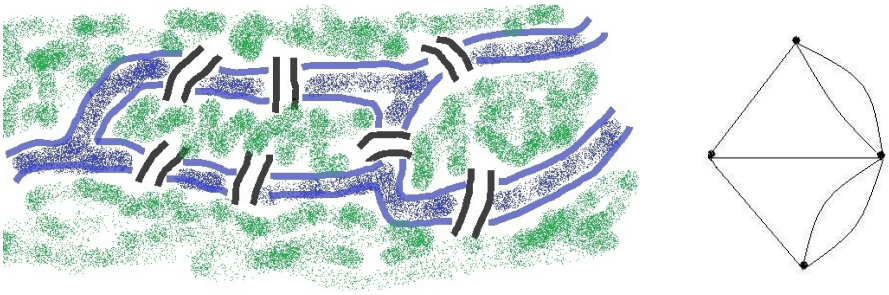
$$2^{-1} \cdot 1 + 2^{-2} \cdot 2 + 2^{-3} \cdot 2^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Čini se dakle da koliko god na početku igrač uloži, u konačnici će profitirati (a kockarnica bankrotirati). No, vjerojatnosti dobitka unutar prvih pet bacanja su: $p_1 = 50\%$ za dobitak u prvom bacanju; $p_2 = 75\%$ za dobitak unutar prva dva bacanja; $p_3 = 87{,}5\%$ za dobitak unutar prva tri bacanja; $p_4 = 93{,}8\%$; $p_5 = 96{,}9\%$. Vidimo: vrlo je vjerojatno (96,875 %) da bi igrač dobio unutar prvih 5 bacanja, i to (najviše) 16 kn, dakle se ulog od otprilike 16 kn se čini pravednim. Gdje je to do teorijskih ∞? Daniel Bernoulli je 1738. dao jedno rješenje, koristeći ideju očekivane koristi (ako igrač ima puno novca, mali dobitak mu ne znači puno, ali ako ima malo novca, onda mu je vrijedan i mali dobitak). Daniel je zatim koristeći diferencijalni račun izveo jednadžbu za izračunavanje prikladnog uloga ovisno o početnom kapitalu (za početni kapital 10 prikladan ulog ispada ca. 3, a za početni kapital 1000 prikladan ulog ispada ca. 6). Spomenimo i da je ime St. Petersburškom paradoksu dao 1768. D'Alembert koji se u svom glavnom djelu *Opuscules Methématiques* među ostalim bavio i s vjerojatnosti. [11, 26, 50, 49].

10.3 Utemeljenje topologije

Matematičku granu **topologiju** utemeljio je L. Euler,[6] malo preciznije utemeljio je **teoriju grafova**. U doba Eulerovog života, jedan popularni zadatak bio je **problem mostova u**

[6]Na prvi pogled, topologija je slična geometriji. No, dok su u geometriji objekti ekvivalentni („sukladni") ako postoji izometrija koja jedan prevodi u drugi, u topologiji se ekvivalencija definira preko postojanja



Slika 10.2: Problem mostova u gradu Königsbergu

gradu Königsbergu (danas Kaliningrad, Rusija): Može li se grad Königsberg obići tako da se svaki od njegovih sedam mostova (vidi sliku 10.2 lijevo) prijeđe točno po jednom, te da se na kraju vratimo na polazište? Euler je uočio da rješenje nema veze s duljinama i kutovima, nego samo povezanošću te je to razlog da ga nazivamo ocem topologije. Svoje rješenje objavio je 1736. pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, iz kojeg se vidi da je bio svijestan da se radi o novom tipu geometrije, *geometria situs* (geometrija položaja). Euler je tu objasnio da ako dijelove Königsberga zamnislimo kao točke (danas bismo rekli vrhove grafa), a mostove kao linije koje ih povezuju (danas bismo rekli bridove grafa), imamo situaciju kao na slici 10.2 desno. Euler je ne samo pokazao da je konkretni zadatak nerješiv, nego je dao i opći postupak za ovakve zadatke:

1. Ako su više od dva vrha neparnog stupnja (tj. u njih ulazi/izlazi neparan broj linija), problem je nerješiv (samo ovaj slučaj rigorozno dokazao).

2. Ako su točno dva vrha neparnog stupnja moguća je „otvorena" šetnja.

3. Ako su svi vrhovi parnog stupnja, zadatak je rješiv.

Osim ovog rezultata, još je jedan nazigled čisto geometrijski Eulerov rezultat temelj teorije grafova. Naime, 1750. je Euler u pismu C. Goldbachu[7] ustvrdio da ako je V broj vrhova nekog poliedra, B njegov broj bridova, a S broj stana, onda je

$$V - B + S = 2.$$

Danas znamo da je ta **Eulerova poliedarska formula** točna za sve poliedre bez rupa. Sam Euler nije uočio uvjet da poliedar treba biti bez rupa, a 1752. je dao nepotpuni dokaz. Prvi potpuni dokaz, ali čisto geometrijski, dao je Legendre 1794. Danas pak tu formulu obično iskazujemo u terminima teorije grafova, pa se radi o formuli koja vrijedi za planarne grafove, što je, čini se, prvi uočio Cauchy 1811. Zanimljivo je spomenuti da je stotinjak godina prije Eulera Descartes otkrio jednu Eulerovoj formuli ekvivalentnu formulu, koju nije objavio, a njegov rezultat je postao poznat tek u 19. st.:

Teorem 11 (Descartesova poliedarska formula) *Ako četiri prava kuta (tj., puni kut) pomnožimo s brojem prostornih kutova (tj. vrhova) poliedra i od toga oduzmemo osam*

homeomorfizma (neprekidnog preslikavanja s neprekidnim inverzom), dakle u topologiji se objekti razlikuju ne prema veličini i obliku, nego prema (ne)povezanosti i broju rupa. Primjerice, kocka, kugla i zdjela su topološki ekvivalentni oblici.

[7] Christian Goldbach (1690.–1764.), pruski matematičar, najpoznatiji je po Goldbachovoj hipotezi iz teorije brojeva (svaki parni prirodni broj veÄ‡i od 2 je zbroj dvaju prostih brojeva).

pravih kutova (tj. dva puna kuta), preostat će zbroj svih ravninskih kutova u poliedru:

$$360°V - 720° = \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{V_i} \alpha_{ij}.$$

Ta je formula ekvivalentna Eulerovoj poliedarskoj formuli jer je u svakom V_i-terokutu (strani poliedra) zbroj kutova jednak $(V_i - 2) \cdot 180°$, a $\sum_{i=1}^{S} V_i = 2B$, jer svaki brid povezuje dva vrha [11, 26, 94, 93, 104].

Primjer 44 *Za trostranu prizmu je* $S = 5$, $V = 6$, $B = 9$ *pa je* $V - B + S = 6 - 9 + 5 = 2$. *S druge strane prizma je omeđena s 2 trokuta (zbrojevi kutova* $180°$*) i 3 četverokuta (*$360°$*), pa imamo* $360°E - 720° = 360° \cdot 4 = 2 \cdot 180° + 3 \cdot 360°$.

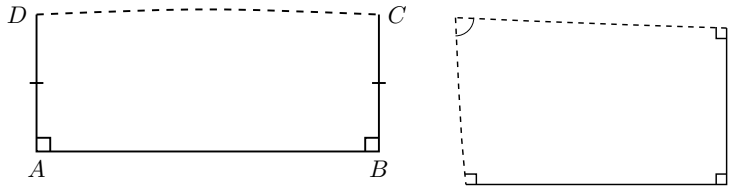
Prve nove topološke rezultate dobit će tek na prijelazu 18./19. st. Gauß, o čemu ćemo više reći u sljedećem, zadnjem, poglavlju jer se njegovi topološki rezultati prirodnije uklapaju u razvoj topologije u 19. st.

10.4 Problem Euklidovog postulata o paralelama

Kao što je rečeno (str. 39), **postulat o paralelama**, tj. Euklidov peti postulat je već od svoje pojave izazvao diskusije. Dugo su vremena mnogi matematičari bili uvjereni da se radi o teoremu kojeg je moguće dokazati iz ostalih aksioma i postulata, a nakon arapskog doba pitanje postulata o paralelama ponovno je počelo biti popularno tijekom 17. st., a pokušaji dokaza će i dalje kao i raniji imati tipičnu grešku: U nekom koraku se pretpostavi određeno „očito" svojstvo, koje je ali u stvarnosti ekvivalentno postulatu o paralelama, pa je stoga dobivena kontradikcija samo prividna, odnosno dokaz je logički nevaljan. Najznamenitiji od matematičara koji su se u 17. stoljeću bavili problemom postulata o paralelama bio je Wallis, koji je počinio grešku tog tipa, ali je za razliku od mnogih drugih i sam uočio da je pretpostavio nešto što treba dokazati. Ta njegova pretpostavka je jedna od poznatijih ekvivalentnih formulacija postulata o paralelama, te ju se ponekad naziva **Wallisovim aksiomom** (1693.): Za svaki trokut postoji njemu sličan trokut proizvoljne veličine. Tijekom 18. stoljeća slijedilo je više pokušaja dokaza, a svi su imali isti taj tip greške, ali se među njima po važnosti ističu se dva: Talijana **Girolama Saccherija** (1667.–1733.) i Švicarca **Johanna Heinricha Lamberta** (1728.–1777.). Oboma je zajedničko da su postulat o paralelama pokušali dokazazi svođenjem na kontradikciju te su u dijelu koji se odnosi na slučaj kad postulat ne vrijedi dobili niz teorema iz hiperboličke geometrije [2, 10, 26, 93, 104].

Saccheri je u svom djelu *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (1733.) dao „dokaz" u kojem koristi četverokut kojeg su u svojim pokušajima koristili Hajjam i al-Tusi. **Saccheri(-Hajjam-al-Tusij)ev četverokut** je četvrokut $ABCD$ s dvije jednako duge nasuprotne stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ okomite na treću ($\overline{AB}$), vidi sliku 10.3 lijevo. Pretpostavimo da postulat o paralelama ne vrijedi. U Saccherijevom četverokutu je po SKS-teoremu o sukladnosti trokuta $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, dakle je $|AC| = |BD|$, iz čega po SSS-teoremu o sukladnosti slijedi $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SSS) pa je $\angle BCD = \angle ADC = \alpha$.[8] Sad su moguća tri slučaja: Ako je α tup, ako je α pravi i ako je α šiljast. U prva dva slučaja dade se (korektno) izvesti postulat o paralelama, dakle kontradikcija s pretpostavkom. U

[8] SKS-teorem je dokazan kao EEI4, a SSS-teorem kao EEI8, dakle bez korištenja postulata o paralelama, pa ti teoremi vrijede i u neeuklidskim geometrijama.



Slika 10.3: Saccherijev četverokut (lijevo) i Lambertov četverokut (desno)

trećem slučaju Saccheri je dobio niz svojstava hiperbolične geometrije, ali je do prividne kontradikcije došao jer je kad je dokazao da tad postoji beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku zadani pravac to smatrao nespojivim s prirodom pravca [2, 10, 26, 93, 104].

Lambert je u povijesti matematike posebno poznat po prvom dokazu iracionalnosti broja π (1768.). Lambert je dokazao da ako je $x \neq 0$ racionalan, onda ni e^x ni $\operatorname{tg} x$ ne mogu biti racionalni. Budući da je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{\pi}{4}$ pa onda ni π ne može biti racionalan. Pritom je postavio i hipotezu da su π i e transcendentni brojevi, što je dokazano tek više od 100 godina kasnije (trancendentnost broja π je dokazao F. von Lindemann 1882., a za broj e transcendentnost je dokazao Charles Hermite 1873.). Također, Lambert je prvi koji je sustavno proučavao hiperbolne funkcije. Vezano za postulat o paralelama, Lambertov pristup (*Theorie der Parallellinien*, 1766.) je analogan Saccherijevom. I on je krenuo od jednog četverokuta kojeg je ranije u svom pokušaju razmatrao jedan arapski matematičar, u ovom slučaju Alhazen. **Lambert(-Alhazen)ov četverokut** je četverokut s tri prava kuta (slika 10.3). Opet se dobiju tri slučaja i u trećem, koji odgovara hiperboličnoj geometriji, je dobio niz zanimljivih rezultata, među kojima je najpoznatiji taj da bi u takvoj geometriji trokuti manje površine imali veći zbroj kutova (i što manji trokut, to bi zbroj kutova bi bliži 180°). Točnije: dobio je proporcionalnost površine trokuta s $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Primijetio je da prvi (kod njega drugi) slučaj funkcionira u sfernoj geometriji (gdje su zbrojevi kutova u trokutima veći od 180°) u kojoj je višak površine razmjeran zbroju kutova (T. Harriot je 1603. dokazao da je površina sfernog trokuta $R^2(\alpha + \beta + \gamma - 180°)$). Stoga je Lambert imao je ideju da bi treći slučaj mogla biti geometrija na sferi imaginarnog polumjera. No, na kraju je i Lambert dobio prividnu kontradikciju [2, 10, 19, 26, 93, 104].

Nisu ovo bili jedini takvi pokušaji. U svakom slučaju, sredinom 18. stoljeća statust postulata o paralelama je bio da su svi pokušaji dokaza imali isti tip greške, koji je bio pretpostavljanje neke ekvivalentne tvrdnje kao očite. Tu je situaciju 1767. D'Alembert nazvao „skandalom elementarne geometrije". Također, u to doba još se euklidska geometrija (uključivo sferne) smatrala jedinom smislenom i da se radi o teoremu, no pojavljuju se i prve sumnje. Prvi koji je iskazao da se možda stvarno radi o nedokazivom aksiomu bio je njemački matematičar **Georg Klügel** (1738.–1812.). Nakon što je u svojoj doktorskoj disertaciji 1763. analizirao tridesetak različitih pokušaja dokaza, zaključio je da ga možda ljudi smatraju istinitim samo zbog toga na što ih njihova osjetila upućuju na njegovu istinitost. Time je započeo novu fazu u povijesti postulata o paralelama, u kojoj se počelo razmatrati kakva to bila geometrija u kojoj postulat o paralelama ne vrijedi? [2, 10, 26, 104].

Jedan od znanstvenika koji su smatrali da se postulat o paralelama ne može dokazati, nego da se radi o pravom aksiomu, bio je i naš **Ruđer Josip Bošković** (1711.–1787.). Bošković je imao mnogo velikih doprinosa matematici, prvenstveno primijenjenoj. Prvi matematički doprinosi bili su mu vezani za sfernu trigonometriju i njenu primjenu u

astronomiji. U kasnijem razdoblju u metode sferne trigonometrije uključio je i diferencijalni račun. Najpoznatiji Boškovićev rezultat iz matematičke fizike je rješenje (1743.) problema tijela najveće atrakcije, tj. problem određivanju rotacionog tijela koje najvećom privlačnom silom djeluje na točku na svojoj osi. Bošković je osmislio i metodu za izravnavanje grešaka minimizacijom sume apsolutnih vrijednosti odstupanja, koja je prethodnik metod najmjanjih kvadrata. Nju je primijenio na rezultate mjerenja duljina dvaju meridijanskih lukova, koje je proveo s Englezom Christopherom Maireom, a opisao 1755. Posebno je značajna Boškovićeva teorija konika koju je izložio u *Sectionum Conicarum Elementa*, trećem svesku svog matematičkog udžbenika *Elementorum Universae Matheseos* (1754.). Tu je krenuo od definicije konika kao ravninskih krivulja za koje je omjer udaljenosti bilo koje njihove točke do zadane čvrste točke (žarišta) i do zadanog čvrstog pravca (ravnalice) konstantan (usp. Papos). Navedeni omjer (današnji numerički ekscentricitet) nazvao je odredbenim omjerom (*ratio determinans*) konike. Na temelju te definicije izveo je (sintetičko geometrijski) prvu potpunu teoriju konika kao ravninskih krivulja, bez reference na njihov prostorni aspekt (ali je i dokazao da su krivulje koje opisuje stvarno presjeci stošca). Zanimljiva su i Boškovićeva razmatranja o osnovama matematike. Konkretno, razmatrao je ideje kontinuuma i beskonačnosti. U *De continuitatis lege* (1754.) je nagovijestio suvremenu definiciju kontinuuma realnih brojeva, koju je stotinjak godina kasnije dao Dedekind. U Boškovićevo se doba već podrazumijevala korespondencija između realnih brojeva i točaka pravca, ali se ona nije izričito iskazivala, niti se jasno izricalo da realni brojevi čine kontinuum, neprekidan skup bez rupa. Bošković pak navodi da kad nabrajamo prirodne brojeve izostavljamo brojeve koji se nalaze između njih i ispunjuju cijeli prazan prostor između dva najbliža broja. Zatim ističe gustoću: između svakog odabranog razlomka ili pak iracionalnog broja (njega naziva neizrazivim brojem) i bilo kojeg cijelog broja možemo naći neki drugi razlomak ili iracionalni broj. Pri svojim razmatranjima beskonačno malih i beskonačno velikih veličina naišao je na prividne paradokse neizmjerno velikog, iz čega je zaključio da su neizmjerno velike nemoguće, no takva su razmišljanja važan prethodnik utemeljenja teorije skupova [10, 11, **?**, 37].

Čini se da je prvi tko je stvarno razumio problem postulata o paralelama bio Gauß, no o tom njegovom doprinosu više ćemo reći u sljedećem poglavlju.

10.5 Razvoj (ne samo) teorije brojeva u 18. stoljeću

Već smo spomenuli da je Euler provjerio neke od Fermatovih hipoteza iz teorije brojeva. Među ostalim, dao je dokaz velikog Fermatovog teorema za eksponent 3. No, to nije jedini njegov doprinos toj disciplini. Euler je prvi uočio da se teorija brojeva može proučavati pomoću metoda matematičke analize i time je postao osnivač **analitičke teorije brojeva**. Među ostalim, otkrio je **Eulerov produkt**: Za $s > 1$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prost}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, .$$

Dokazao je i divergenciju reda recipročnih prostih brojeva, uveo je **Eulerovu φ-funkciju** (za prirodan broj n je $\varphi(n)$ broj brojeva iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ koji su relativno prosti s n) i poopćio mali Fermatov teorem na **Eulerov teorem**: Za prirodan broj a relativno prost s n je $a^{\varphi(n)} - 1$ djeljivo s n. Našao je i 58 novih parova prijateljskih brojeva (prije njega bila su poznata samo tri). Dokazao je i da su parni savršeni brojevi isključivo oblika $2^{n-1}(2^n - 1)$ ako je $2^n - 1$ prost (obrat pitagorejskog teorema o savršenim brojevima). Izrekao je (1783.), ali nije znao dokazati, zakon kvadratnog reciprociteta [11, 16, 26, 104].

Zakon kvadratnog reciprociteta danas obično iskazujemo koristeći Legendreov simbol $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Teorem 12 (Zakon kvadratnog reciprociteta) *Za različite neparne proste brojeve vrijedi:*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4},$$

pri čemu je $\left(\frac{p}{q}\right)=1$ *ako* $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\, q)$ *ima rješenja, a inače je* $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$.

Simbol nosi ime po francuskom matematičaru **Adrien-Marie Legendreu** (1752.–1833.). Legendre je zakon kvadratnog reciprociteta objavio u *Théorie des Nombres* (1785.), no dokaz mu je bio nepotpun. Popravljeni (još uvijek nesavršen) dokaz objavio je 1798. Legendre je bio iz bogate obitelji i odlično obrazovan u matematici i fizici. Imao je uspješnu matematičku karijeru. U doba revolucije bio je član komisije za standardizaciju mjera (1791.). Zbog ukidanja Akademije znanost izgubio dobar prihod, a u doba terora se jedno vrijeme morao i skrivati. 1795. godine Akademija je ponovno otvorena kao Nacionalni institut znanosti i umjetnosti i Legendre je postao član odjela za matematiku. Kad je 1803. Napoleon reorganizirao Institut, stvorena je geometrijska sekcija i Legendre je postao njen član. U sljedećem razdoblju doživio je par kritika od mladoga Gaußa koje su ga jako pogodile. Umro je siromašan jer mu je 1824. ukinuta penzija jer je odbio glasovati za vladinog kandidata za Institut. Osim teorijom brojeva bavio se i geometrijom, primjenama matematike u fizici i astronomiji i dr. Prvi je dokazao iracionalnost π^2, dao je jednostavniji dokaz iracionalnosti broja π i smatrao je da je π transcendentan [10, 19, 26, 104].

Prvi potpun dokaz zakona kvadratnog reciprociteta dao je **Carl Friedrich Gauß** (1777.–1855.) u (*Disquisitiones Arithmeticae* (1801.), djelu za koje se uzima da s njim počinje moderna teorija brojeva. Pritom je kritizirao Legendreove dokaze i inzistirao na svom prvenstvu, što je Legendrea vrlo povrijedilo. Ipak, Legendre je u svom kasnijem izdanju *Théorie des Nombres* (1808.) citirao Gaußa. Sam Gauß je našao čak osam različitih dokaza tog teorema kojeg je nazivao zlatnim. Gauß je poznat i po svojoj velikoj ljubavi za teoriju brojeva, a u njegovoj *Disquisitiones Arithmeticae* nalazimo i simbol $\equiv$ za kongruencije, prvi potpun iskaz i dokaz **osnovnog teorema aritmetike** i te Gaußovu procjenu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}=1$$

broja $\pi(x)$ prostih brojeva koji nisu veći od realnog broja x. Gauß je i tu istaknuo svoju prednost pred Legendreom, koji ju je u malo drugačijem obliku dao već Legendre u izdanju *Théorie des Nombres* iz 1798. Gaußova i Legendreova fromulacija **teorema o prostim brojevima** (dokazan 1896.):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1.$$

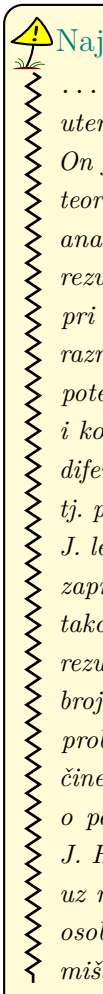
Gauß i Legendre imali su „sukob" i oko prvenstva za jednan rezultat iz primijenjene matematike. Radi se o metodi najmanjih kvadrata. Obojica su zaključili da je formulu regresijske krivulje $y=f(x)$ (pri čemu je poznat oblik od f, ali točna fomula sadrži nepoznate parametre a, b, ...) za dane točke (x_i,y_i), $i=1,\ldots,n$ najbolje određivati minimizacijom greške definirane kao zbroj kvadrata odstupanja (a ne, kao Bošković i Laplace, koji je Boškovićevu metodu analitički opisao 1789., apsolutnih vrijednosti):

$$E=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2\to\min$$

Gauß je tu metodu razvio 1801. za izračunavanje putanje planetoida Ceresa (objavio ju je 1809. u *Theoria motus corporum coelestium*), no tvrdio je da ju je koristio od 1795. Legendre je pak, opet manje precizno razrađenu nego Gauß, istu metodu objavio 1805., što je dovelo do rasprave o prvenstvu. Kad je f polinom, zahtjev minimizacije E kao funkcije koeficijenata polinoma vodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Gauß je stoga razvio i 1810. detaljno opisao i efikasnu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi — **Gaußovu metodu eliminacija**. Dokazao je i da je aritmetička sredina točka minimuma za kvadratna odstupanja (tj. da ona minimizira $e(x) = \sum(x - x_i)^2$).[9] Također, Gauß je dao i argumente za korištenja kriterija najmanjih kvadrata na temelju pretpostavki računa pogreške, od kojih je jedina koja nije dio već opisanih Galileovih da ako raspolažemo s više mjerenja iste veličine, aritmetička sredina rezultata je najverojatniji stvarni iznos.[10] Iz navedenih pretpostavki Gauß je kao krivulju pogreške dobio **Gaußovu krivulju** jednadžbe

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Pritom je h pozitivna konstanta koju je Gauß interpretirao kao preciznost mjerenja [11, 37, 26, 92, 104].



Najvažniji matematički rezultati iz doba prosvjetiteljstva ...

... potječu od L. Eulera, koji se bavio gotovo svim tada postojećim matematičkim granama, a utemeljio je i dvije nove. Većina njegovih velikih rezultata ostvareni su u razdoblju 1730. – 1760. *On je rješenjem problema mostova u Königsbergu te iskazom Eulerove poliedarske formule utemeljio teoriju grafova i njome topologiju. Također, primjenjivao je analizu na teoriju brojeva i tako utemeljio analitičku teoriju brojeva (Eulerova φ-funkcija, Eulerov produkt i dr.). Osobito se ističu njegovi rezultati u matematičkoj analizi. Upravo on ju je ustanovio kao granu koja se bavi funkcijama, pri čemu je njegova definicija funkcije još neprecizna (poistovjećuje funkciju s formulom). Prvi je razmatrao logaritme preko baze, dakle kao inverze eksponencijalnih funkcija. Dobio je razvoj u red potencija za eksponencijalnu funkciju iz kojeg je dobio i broj* e, *a povezivanjem s razvojima sinusa i kosinusa dobio je de Moivreovu i Eulerovu formulu za kompleksne brojeve. Problem definicije diferencijala pokušao je razriješiti tako da je definirao da je $\dot{x}$ u biti* 0. *Riješio je i Baselski problem, tj. pokazao da je zbroj svih recipročnih kvadratnih brojeva jednak $\pi^2/6$, uveo je oznake $f(x)$,* e, *π i* i. *J. le R. D'Alembert je pak prvi koristio pojam derivacije i istaknuo da je problem korektne definicije zapravo problem definicije graničnih vrijednosti. U teoriji vjerojatnosti u doba prosvjetiteljstva se također počinje primjenjivati infinitezimalni račun (D. Bernoulli), no najznačajniji vjerojatnosni rezultat ovog doba je pojava normalne distribucije kao granične za binomne distribucije pri velikom broju Bernoullijevih pokusa (za $p = \frac{1}{2}$, A. de Moivre,* 1733.*). U ovo doba opet se pojačao interes za problem postulata o paralelama, no matematičari su ga još uvijek pokušavali dokazati kao teorem, čineći redovno isti tip greške — koristeći neko „očito" svojstvo, koje je zapravo ekvivalentno postulatu o paralelama. Dva pokušaja, svođenjem na kontradikciju, se ovdje ističu (G. Saccheri* 1733., *J. H. Lambert* 1766.*) jer su, iako su na kraju počinili opisanu grešku, razmatrajući što se dobije uz negaciju postulata o paralelama izvedli de facto prve rezultate neeuklidskih geometrija. Prva osoba koja je izrekla da se možda ipak radi o pravom aksiomu bio je G. Klügel* 1763., *a takvog je mišljenja bio i R. J. Bošković. Bošković je među mnogim iznimnim rezultatima prvi koji je izveo*

[9] Točka minimuma za apsolutna odstupanja, tj. točka minimuma funkcije $\overline{e}(x) = \sum |x - x_i|$ je medijan.

[10] Tu je pretposavku pokušao kasnije eliminirati. Danas se kao argument za dobivenu krivulju pogreške koristi centralni granični teorem, uz pretpostavku da su pojedinačne greške posljedica mnoštva „atomarnih" slučajnih grešaka.

*potpuno ravninsku teoriju konika, razmatranjem problema neprekidnosti pravca „najavio“ modernu definiciju realnih brojeva, opisao prvu metodu za izravnavanje grešaka mjerenja minimizacijom zbroja apsolutnih vrijednosti odstupanja i drugo. Boškovićevu je metodu opisao Laplace, a ubrzo su je u modernu metodu najmanjih kvadrata preoblikovali, neovisno jedan od drugog, A.-M. Legendre i C. F. Gauß. Oni su također dobili i prve varijante teorema o prostim brojevima i prve dokaze zakona kvadratnog reciprociteta, kojeg je prvi izrekao Euler. Gauß je svojom „Disquisitiones arithmeticae“ (*1801.*), u kojoj je među ostalim dao prvi dokaz osnovnog teorema aritmetike, utemeljio modernu teoriju brojeva.*

Poglavlje 11

Matematika u doba druge znanstvene revolucije



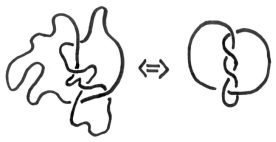
Matematički pojmovi u ovom poglavlju

** kompleksna ravnina * topologija * teorija uzlova * teorija grafova * stablo * planarni graf * ploha * neprekidnost * zakrivljenost * zatvorenost * postulat o paralelama * hiperbolična geometrija * vektor * determinanta * Cramerovo pravilo * sustav linearnih jednadžbi * grupa * algebarska jednadžba * matrica * funkcija * derivacija * limes * integral * neprekidna funkcija * uvjetna vjerojatnost * centralni granični teorem * statistika * regresija * normalna razdioba * Poissonova distribucija * studentova razdioba * zakon velikih brojeva * aksiomi vjerojatnosti * skup * ekvipotentnost * kardinalni broj * aksiom izbora * transfinitni brojevi * realni brojevi * transcendentni brojevi * matematička logika **

Moderna matematika u potpunosti se precizirala tijekom doba druge znanstvene revolucije, u 19. stoljeću i poÄŤetkom 20. stoljeća.

11.1 Uvođenje kompleksne ravnine i dokaz osnovnog teorema algebre

Na prijelazu 18. u 19. stoljeće naposlijetku će i kompleksni brojevi postati šire prihvaćeni, zahvaljujući otkriću njihove geometrijske interpretacije, tj. **kompleksne ravnine**. Prvi korak u tom smjeru napravio je još u 17. st. John Wallis. Njegova razmatranja iz 1685. doduše još nisu bila savršena, ali je došao do važne nove ideje da se geometrijska interpretacija imaginarnih brojeva očituje u vertikalnom pomaku. No, do preciziranja geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva trebalo je više od sto godina. Dansko-norveški geodet i kartograf **Caspar Wessel** (1745.–1818.) je 1799. objavio, na danskom, opis kompleksne ravnine. Kompleksni broj $a + b\,i$ gledao je kao radij-vektor točke (a, b), opisan duljinom r (dakle, modulom) i „kutem smjera" (argumentom) θ te je kompleksne brojeve bilježio u obliku $r\angle\theta$. Opisao je i kako zbrajati odnosno množiti usmjerene dužine (kompleksne brojeve). Tako je zaključio da množenje s i predstavlja rotaciju za pravi kut oko ishodišta, iz čega je zaključio da je imaginarna os okomita na realnu. No, njegov je tekst postao poznat tek 1895. Zato danas kompleksnu ravninu nazivamo po Gaußu i Argandu: Švicarski računovođa **Jean-Robert Argand** (1768.–1822.) ju je opisao 1806. (pri čemu je i uveo pojam modula kompleksnog broja), a Gauß neovisno o Argandu 1831. (no ideju je razradio još 1796.).



Slika 11.1: Dva ekvivalentna uzla

Argand i Gauß su ujedno nezavisno jedan od drugog dali dokaze **osnovnog teorema algebre**. Gauß je bio prvi matematičar koji je primijetio grešku svih prethodnika (da su se koncentrirali na dokaz da su nultočke polinoma s realnim koeficijentima kompleksni brojevi, umjesto na to da ih ima koliki je stupanj polinoma) i dao prvi potpuni dokaz u sklopu svog doktorata 1799. Taj dokaz je topološki i imao je neke nedostatke, te je Gauß popravio dokaz i 1816. dao dva potpuno rigorozna dokaza. U međuvremenu je (1813.) dokaz (temeljen na ranijoj d'Alembertovoj ideji) dao i Argand, no iako je Cauchy 1820. u svom *Cours d'analyse* cijelo jedno poglavlje posvetio tom Argandovom dokazu, on Arganda uopće nije spomenuo i Argandov je dokaz postao poznat tek krajem 19. st. Argand je ujedno prvi koji je osnovni teorem algebre formulirao i za polinome s kompleksnim koeficijentima, što je 1849. dokazao Gauß [10, 26, 71, 94, 104].

Nakon dokaza osnovnog teorema algebre ostalo je otvoreno pitanje: Može li se polje[1] kompleksnih brojeva proširiti? Primjerice, Gauß je vjerovao u postojanje hijerarhije u kojoj su obični konpleksni brojevi „sjena sjenâ". No, 1863. je Weierstraß dokazao da je (do na izomorfizam) polje kompleksnih brojeva jedino polje koje proširuje polje realnih brojeva [10, 84].

11.2 Razvoj topologije

Znameniti matematičar Gauß je poznat i po mnogim velikim doprinosima matematici, kako teorijskoj, tako i primijenjenoj. O njemu su poznate razne anegdote, primjerice kako je kao dijete brzo izračunao zbroj $1 + 2 + \ldots + 100$. S 19 godina otkrio je konstrukciju ravnalom i šestarom pravilnog 17-erokuta. Poznat je i njegov *Theorema egregrium* iz diferencijalne geometrije (1828.),[2] prema kojem je Gaußova zakrivljenost plohe, iako definirana s obzirom na prostor, zapravo intrinzičko svojstvo plohe. Ostvario je prve značajne nove rezultate nakon Eulera u topologiji: utemeljio je **teoriju uzlova**. U matematičkom smislu, uzao je zatvorena krivulja u prostoru koja nema samopresjeka. Dva uzla su (topološki) ekvivalentna ako se bez rezanja (ili lijepljenja) mogu prevesti jedan u drugi (vidi sliku 11.1). Gauß je 1794. skicirao i tabelirao neke uzlove, a 1833. je (vezano za rad na elektrodinamičkim problemima) dokazao prvi poznati rezultat teorije uzlova (našao je jednu topološku invarijantu uzlova, tj. svojstvo uzlova koje se ne mijenja pri njihovim neprekidnim transformacijama). Gaußov student **Johann Benedict Listing** (1802.–1882.) je nastavio njegov rad na topološkim problemima. On je prvi koristio izraz **topologija** (1836. u jednom pismu, 1847. u članku). Ipak, do kraja 19. st. uobičajeni termin za topologiju ostat će *analysis situs*, naslijeđen iz naslova Eulerovog članka kojim je utemeljio ovu disciplinu. Listing je 1861. opisao prvu topološki zanimljivu plohu, poznatu

[1] Polje je algebarska struktura koja se sastoji od nepraznog skupa F s dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ tako da je F s obzirom na $+$ komutativna grupa (s neutralnim elementom 0), kao i F bez 0 s obzirom na $\cdot$.

[2] Diferencijalnu geometriju, kao i nacrtnu, utemeljio je krajem 18. st. francuski matematičar Gaspard Monge (1746.–1818.).



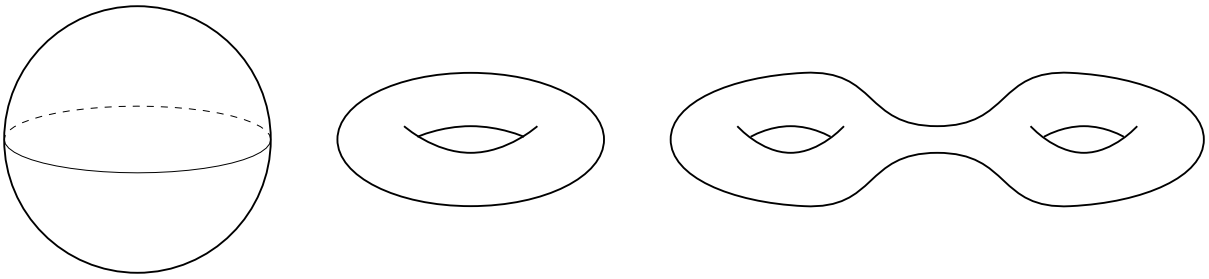
Slika 11.2: Model Möbiusove trake

Möbiusovu traku (slika 11.2). To je ploha koja ima jednu stranu i jedan rub te nije orijentabilna, a ime je dobila po također Gaußovom studentu **Augustu Ferdinandu Möbiusu** (1790.–1868.), koji ju je otkrio 1858., ali je njegov opis objavljen tek 1865. Stoga možemo reći da su Gauß, Listing i Möbius utemeljitelji **geometrijske topologije** [11, 26, 80, 104].

S druge strane, Bernhard Riemann je 1850ih godina razmatrao pitanja povezanosti ploha te 1857. uveo Riemannove plohe, koje (vrlo pojednostavljeno rečeno) predstavljaju relacijske ovisnosti u skupu kompleksnih brojeva poput $w = \sqrt{z}$ kad w nije jednoznačno određen sa z. Na osnovi Riemannovih razmatranja je 1860ih godina **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838.–1922.) uveo mnoge nove topološke koncepte i invarijante, npr. homotopiju puteva. Posebno je poznat intuitivno jasan, ali teško dokaziv **Jordanov teorem** (1893.): Svaka jednostavno zatvorena krivulja[3] u ravnini dijeli ravninu na dva disjunktna područja, jedan omeđen (unutrašnjost), drugi neomeđen (vanjština). U isto doba više matematičara se bavilo i pokušajem klasifikacije ploha. Riemann i Jordan su smatrali da Eulerova karakteristika (za danu plohu, iznos $V - B + S$ za bilo koji graf kojem se bridovi sijeku isključivo u vrhovima, iznosi 2 za ravninu i sferu) topološki potpuno određuje zatvorenu plohu. Möbius je pak 1863. otkrio osnovne tipove zatvorenih ploha: 2-sfera, torus, ... (slika 11.3), a 1907. je dokazano da Möbisuova klasifikacija pokriva sve zatvorene orijentabilne plohe [11, 104].

Čak trojica velikih matematičara, prijatelji A. Cayley, W. R. Hamilton i J. J. Sylvester zaslužni su za odvajanje **teorije grafova** u zasebnu granu 1870ih godina. Nešto ranije, njemački fizičar **Gustav Kirchhoff** (1824.–1887.) je proučavao strujne krugove i razvio teoriju razapinjućih stabala u svrhu određivanja jakosti struje u pojedinim granama. Pokazao je da nije potrebno razmatrati sve moguće cikluse u strujnom krugu (grafu), nego da je dovoljno promatrati jedno razapinjuće stablo. Engleski matematičar **Arthur Cayley** (1821.–1895.) ostavio je velik trag u algebri i u teoriji grafova. Već tokom školovanja se istaknuo u matematici. Studirao je i diplomirao matematiku u Cambridgeu i nakon studija se tamo i zaposlio. No, nakon isteka stipendije morao je naći drugu profesiju te je odabrao pravo. Od 1849. do 1863. radio je kao odvjetnik. Iako je bio uspješan pravnik, uvijek je pravo smatrao samo sredstvom za zaradu novaca kako bi se mogao baviti matematikom. U tih 14 godina rada kao pravnik objavio je oko 250 matematičkih radova, a ukupno je tokom životu objavio 967 radova iz raznih područja matematike. Matematičke ideje je razmjenjivao s Hamiltonom i Sylvesterom. Osobito je mnogo komunicirao sa Sylvesterom jer je i on bio pravnik te su često skupa radili pri sudu i tokom radnog dana raspravljali o

[3] Krivulja je jednostavno zatvorena ako nigdje ne siječe sama sebe.

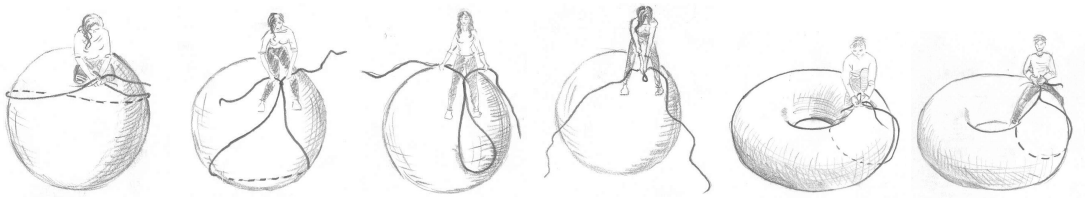


Slika 11.3: Osnovni tipovi zatvorenih ploha

matematici. 1863. godine Cayley je dobio mjesto profesora matematike u Cambridgeu, što je za njega doduše značilo bitno smanjenje prihoda, ali je Cayley prihvatio mjesto sretan da ima mogućnost potpuno se posvetiti matematici. Ubrzo zatim se oženio i imao je vrlo sretan brak. Pokazao je velik interes za pokret za sveučilišno obrazovanje žena. 1881. godine pozvan je održati niz predavanja na *John Hopkins University* u Baltimoreu (SAD), gdje je Sylvester u međuvremenu postao profesor matematike. Tamo je proveo prvih pet mjeseci 1882. godine. Po povratku je (1883.) postao predsjednik *British Association for the Advancement of Science*. Njegov govor tom prigodom bio je popularni prikaz matematike za znanstveni krug, a ujedno vrijedan povijesni pregled različitih matematičkih teorija. Cayley se pak bavio kemijskim kombinatornim problemima i prebrajao stabla koja se pojavljuju pri prebrajanju strukturnih izomera. Posebno, prebrojio je (1875.) alkane C_nH_{2n+2} za razne n i uočio da se to svodi na prebrajanje stabala s n vrhova stupnja 4 i $2n + 2$ vrhom stupnja 1. **James Joseph Sylevester** je pak u članku objavljenom u časopisu *Nature* (1878.) uveo naziv „graf", a Hamilton je 1859. opisao igru *Icosian game* (*Put oko svijeta*), točnije zadatak: Mogu li se bridovi dodekaedra obići tako da se svaki vrh posjeti točno jednom? [11, 26, 104].

Spomenimo ovdje i poznati **teorem o četiri boje**. Južnoafrički matematičar i botaničar Francis Guthrie (1831.–1899.), koji je matematiku studirao u Londonu, primijetio je da se razne zemljopisne karte mogu obojiti s četiri boje tako da susjedne zemlje imaju različite boje. Tako je 1852. postavio pitanje: Koji je najmanji broj boja potreban za bojanje svih zemljopisnih karti (tj. vrhova planarnog grafa)? Pritom se pretpostavlja da su zemlje jednostavno povezane (nemaju rupa i u jednom su „komadu"). Pitanje je proslijedio svom profesoru Augustusu De Morganu, a 1878. Cayley spominje problem, koji uskoro zatim postaje popularan. Cayleyev student Alfred Kempe je 1879. objavio navodni dokaz, no 11 godina kasnije otkrivena je greška. Otkrio ju je Percy Heawood i pojednostavljenjem Kempeovih argumenata dokazao teorem o pet boja. Tijekom 20. st. dani su razni dokazi za „do n" zemalja, a 1976. su Kenneth Appel i Wolfgang Haken dali prvi dokaz. Bio je to prvi matematički dokaz korišenjem računala, što je otvorilo važno pitanje rigoroznosti matematičkih dokaza [11, **?**, 104].

Kratku priču o nastanku topologije završavamo spomenom znamenitog francuskog matematičara **Jules Henri Poincaré**a (1854.–1912.). On je 1895. pod naslovom *Analysis situs* objavio prvi sustavni prikaz topologije. Pokazao je da ako se svaka zatvorena petlja na zatvorenoj plohi (2-dimenzionalnoj mnogostrukosti) može stegnuti u točku, onda je ta ploha topološki ekvivalentna 2-sferi (slika 11.4). **Poincaréova hipoteza** tvrdi da analogno vrijedi za 3-sfere, a poslije je poopćena na n-sfere. Prvo je 1960ih dokazana za $n > 4$, onda 1982. za $n = 4$. Izvorna hipoteza je postala jedan od 7 milenijskih problema i zasad je jedini od njih koji je riješen (Grigorij Perelman, 2002.) [11, 26, 104].



Slika 11.4: Ideja Poincaréove hipoteze

11.3 Otkriće neeuklidskih geometrija

Vratimo se opet Gaußu. Čini se da je upravo on bio prvi koji je stvarno razumio problem postulata o paralelama. Njime se bavio od svoje petnaeste godine, a najkasnije 1824. postao je uvjeren u njegovu nezavisnost od ostalih postulata i aksioma, tj. da nije dokaziv iz njih. Gauß je pokušao izvesti posljedice geometrije u kojoj bi kroz zadanu točku postojalo više od jedne paralele s danim pravcem, ali nikad nije objavio svoje rezultate, najvjerojatnije jer kao osoba nije bio sklon sukobima i vjerojatno se bojao da bi takva objava izazvala „buru". No, u pismu astronomu Olbersu 1817. napisao je: „Sve više dolazim do uvjerenja, da neophodost naše geometrije nije dokaziva, bar ne od ljudskog razuma niti za njega. Možda ćemo u jednom drugom životu doći do drugih uvida u bit prostora, koji su nam sada nedostupni. Dotad bi trebalo geometriju po rangu izjednačiti ne s aritmetikom, koja stoji čisto a priori, već primjerice s mehanikom . . . ". Jedan od Gaußovih prijatelja bio je mađarski matematičar **Farkas Bolyai** (1775.–1856.), koji je i sam imao nekoliko neuspješnih pokušaja dokaza petog Euklidovog postulata. Njegov sin **János Bolyai** (1802.–1860.) je također razvio interes za tu temu, a otac mu je preporučio da se time ne bavi. Ipak, János u pismu ocu 1823. kaže:

> Otkrio sam stvari tako divne da sam zaprepašten . . . Iz ničega sam stvorio čudan novi svijet.

Te rezultate je objavio 1825. na 24 strane dodatka očevoj knjizi. Gauß je to komentirao pohvalom da je János genijalan, ali da je i on sam, Gauß, isto već ranije otkrio. János Bolyai je rođen u Transilvaniji, a već s 13 godina svladao je diferencijalni račun i analitičku mehaniku. Bio je i uspješan violinist, te je nastupao i u Beču, gdje je i studirao te zatim pristupio vojnoj inženjeriji i u njoj proveo 11 godina. Ostao je zabilježen kao najbolji plesač i mačevalac u austrijskoj vojsci. Nije ni pušio ni pio, čak ni kavu, a govorio je čak devet stranih jezika (uključujući tibetanski). Nakon čestih groznica, 1833. je otpušten vojske i povukao se na obiteljsko imanje, gdje je od 1834. živio s Rozáliom Kibédi, s kojom je imao dvoje djece. No, nikad se nisu vjenčali jer je zakon za vjenčanje zahtijevao novčani polog, a János je bio prilično siromašan. Umro je od upale pluća u dobi od 57 godina, a za sobom je ostavio više od 20.000 stranica rukopisa, no osim spomenutog priloga očevoj knjizi druge rezultate nije objavio [10, 26, 104].

U čemu se sastojao Jánosev „čudan novi svijet"? János Bolyai *nije* dokazao da postoji geometrija u kojoj ne vrijedi postulat o paralelama, nego je „samo" izveo posljedice geometrije u kojoj postoji više od jedne paralele s danim pravcem kroz danu točku, ako takva geometrija postoji. U osnovi, glavna razlika prema ranijim rezultatima pokušaja dokaza petog postulata putem *reductio ad absurdum* je u tome što János prihvaća da je takva geometrija moguća i tako dobio prve „prave" teoreme **hiperbolične geometrije**. Neovisno o Gaußu i Bolyaiju, ekvivalentne rezultate je u isto doba dobio ruski matematičar

Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792.–1856.). Studirao je matematiku i fiziku u Kazanu, gdje je poslije bio profesor i 1827.–1846. rektor. Oženio se tek s 40 godina, s dvadesetak godina mlađom ženom. Imali su sedmero djece koja su doživila odraslo doba (navodno 18 ukupno!), ali biografi navode da im je brak bio nesretan. Od 1840. mu je zdravlje počelo naglo slabiti te se umirovio 1846. Nakon smrti najstarijeg sina oslijepio je, a i do kraja života je imao ozbiljnih financijskih problema i umro je u siromaštvu. Lobačevski je uz iste pretpostavke kao Bolyai dobio niz teorema hiperbolične geometrije i objavio ih 1829. u lokalnoj publikaciji. Razradu svoje nove geometrije objavio je i u više kasnijih radova, od kojih je najvažniji i najdetaljniji *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (1840.). Tu je eksplicitno naveo alternativu Euklidovom petom postulatu,[4] poznatu kao **postulat Lobačevskog**:

> U ravnini kroz svaku točku izvan danog pravca postoje (bar) dvije paralele s tim pravcem.

Opisao je i kako možemo zamisliti takvu geometriju: „Svi pravci koji u ravnini izlaze iz jedne točke mogu se, u odnosu na dani pravac iste ravnine, podijeliti u dvije klase — one koji ga sijeku i one koji ga ne sijeku. Pravci koji su na rubu jedne i druge klase pravaca nazvat ćemo paralelnim danom pravcu", št je ilustrirao dijagramom poznatim kao dijagram Lobačevskog. Protivno Gaußvim očekivanjima, ni Bolyaijevi rezultati ni rezultati Lobačevskog nisu privukli veću pozornost. Kao zanimljivost spomenimo i da je János Bolyai potkraj života vjerovao da Gauß izmislio Lobačevskog kako bi smanjio vrijednost njegovih, Bolyaijevih, rezultata. Danas geometriju tipa Bolyai-Lobačevski zovemo hiperboličnom geometrijom. U njoj kroz svaku točku izvan pravca postoji beskonačno mnogo paralela s tim pravcem. Budući da ni Bolyai ni Lobačevski nisu dokazali da postoji geometrija u kojoj vrijede prva četiri Euklidova postulata, ali ne vrijedi peti, ostalo je otvoreno pitanje je li postulat o paralelama stvarno neovisan postulat, a ne teorem. [10, 26, 104].

Godine 1868. talijanski matematičar **Eugenio Beltrami** (1835.–1900.) dao je prvi model neeuklidske (hiperbolične) geometrije. On je u promatrao **pseudosferu** (slika 11.5), rotacionu plohu traktrise oko njezine asimptote.[5] Beltramijev model je geometrija na pseudosferi, ako kao pravce definiramo geodetske linije (najkraće spojnice točaka na plohi). Usprkos nesavršenostima, Beltramijev model hiperbolične geometrije iz 1868. je dao bitan odgovor: Postoji geometrija u kojoj vrijede prva četiri Euklidova postulata, ali ne vrijedi peti. Njemački matematičar **Felix Klein** (1849.–1925.) je 1871. pokazao da u biti postoje tri osnovna tipa dvodimenzionalne geometrije: geometrija tipa Bolyai-Lobačevski, u kojoj pravci imaju po dvije beskonačno daleke točke, Riemannov sferna, u kojoj pravci nemaju beskonačno dalekih točaka (odnosno, imaju dvije imaginarne beskonačno daleke točke), te euklidska, u kojoj svaki pravac ima dvije podudarne (tj. jednu) beskonačno daleke točke. Ta tri tipa geometrije Klein redom naziva hiperboličkom, eliptičkom i paraboličkom. Posljedica Beltramijevog modela i Kleinovih rezultata je da je neeuklidska geometrija konzistentna ako i samo ako je euklidska konzistentna, čime su izjednačene u

[4] Postulat o paralelama je koristio u formulaciji „Za svaku točku izvan danog pravca postoji jedinstvena paralela s tim pravcem", koja je poznata i kao **Playfairov aksiom** jer ga je kao ekvivalentan izvornom postulatu dao škotski matematičar John Playfair(1748.-1819.), no zapravo je tu ekvivalenciju znao još Proklo. Playfair se i pozvao na Prokla, a formulirao ga je ovako: Ne mogu se povući dva pravca kroz jednu točku tako da budu paralelni jednom pravcu, bez da se ta dva pravca podudaraju.

[5] Traktrisa je krivulja koju je prvi analizirao Huygens 1692. Ponekad ju se naziva „krivuljom lijenog psa". Traktrisa je trajektorija točke koja je s drugom pokretnom točkom povezana dužinom fiksne duljine, a ta druga točka se giba duž pravca.



.

Slika 11.5: Model pseudosfere (fotografija snimljena na izložbi „Volim matematiku" u Zagrebu 2015.)

statusu.[6] Na prijelazu 19.ũ 20.št., u sklopu općeg trenda aksiomatizacije matematičkih grana, **David Hilbert** (1862.–1943.) je tradicionalne Euklidove aksiome geometrije u *Grundlagen der Geometrie* zamijenio novim, modernim sustavom aksioma (1899.). Tada je ujedno i dokazao konzistentnost aksioma euklidske geometrije (kako smo rekli, to onda automatski povlači i konzistentnost aksioma neeuklidske geometrije) te dao dokaz nezavisnosti aksioma o paralelama od ostalih euklidskih aksioma [10, 26, 104].

11.4 Moderniziranje algebre

11.4.1 Linearna algebra

Vratimo se malo na područje linearne algebre. Spomenuli smo da je krajem 16. st. S. Stevin prvi opisao paralelogram sila. U isto doba ga je razmatrao i Leonardo da Vinci, a 1636. ga je precizirao, objasnio i poopćio G. P. de Roberval. Otkrićem analitičke geometrije, algebra je postala povezana s geometrijom, no o prvoj eksplicitnoj pojavi **geometrijskih vektora** možemo govoriti tek u 19. stoljeću, nakon što je matematika postala dovoljno apstraktna da se mogao zamisliti račun i s drugim objektima osim brojeva. Podsjećamo i da su se determinante prvi put pojavile krajem 17. stoljeća vezano za rješavanje sustava linearnih jednadžbi (Leibniz, Seki). Podsjećamo i na starokinesku metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, koju je iznova otkrio i razradio Gauß (Gaußova metoda eliminacija). U 19. st. linearna algebra će se odvojiti u zasebnu poddisciplinu.

Möbius je 1827. opisao baricentričke koordinate[7] u ravnini te pritom promatrao usmjerene veličine. Malo nakon toga, 1832., talijanski matematičar **Giusto Bellavitis** (1803.–1880.) je objavio djelo u kojem razlikuje dužine AB und BA. Uveo je i „ekvipolentnost" takvih orijentiranih dužina (dvije orijentirane dužine su ekvivalentne ako su 'jednake' i paralelne, tj. ako predstavljaju isti geometrijski vektor) te njihovo zbrajanje. Još par godina kasnije, Möbius je 1837. prvi put jasno opisao razlaganje vektora s obzirom

[6] Godinu kasnije Klein je počeo proučavati svojstva prostora koja su invarijantna s obzirom na dane grupe transformacija, tj. primijenio je teoriju grupa na geometriju. Ta njegova ideja poznata je kao Erlangenski program (1872.) i omogućila je jedinstven pristup svim trima tipovima geometrije.

[7] Baricentričke koordinate opisuju položaj točke kao mase koje treba postaviti u vrhove fiksnog trokuta tako da ta točka bude centar mase trokuta.

na dvije osi. Stoga možemo reći da su Möbius i Bellavitis utemeljitelji klasične algbre vektora [10, 26, 104].

Prvi objavljeni rezultati o determinantama tehničku spadaju u prethodno poglavlje ove skripte, ali se sadržajno njihov opis bolje uklapa ovdje. Oni potječu od Maclaurina, koji je 1730-ih godina dokazao Cramerovo pravilo za 2×2- i 3×3-sustave. To pravilo je (bez dokaza) 1750. poopćio Švicarac **Gabriel Cramer** (1704.–1752.). U drugoj polovici 18. st. sve je više objavljenih rezultata o determinantama, a francuski matematičar, glazbenik i kemičar **Alexandre-Théophile Vandermonde** (1735–1796) ih je prvi (1771./72.) odvojio od jedine uloge vezane za rješavanje sustava i razmatrao kao funkcije, čija osnovna svojstva je dokazao.[8] Također 1772. je Pierre-Simon Laplace metode za izračunavanje determinanti poboljšao i objavio metodu koju danas nazivamo po njemu, a determinante je nazivao rezultantama (isti naziv je koristio i Leibniz, ali Laplace to vjerojatno nije znao). Suvremeni naziv determinanta potječe od Cauchyja, iz teksta u kojem je (1812.) dao dokaz Binet-Cauchyjevog teorema.[9] Prvu algoritamsku definiciju determinante dao je 1841. **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804.–1851.), a suvremeno ograničavanje determinanti vertikalnim crtama uveo je iste godine engleski matematičar Arthur Cayley. Cayley je zaslužan i za prvu apstraktnu definiciju **matrice**. Naime, iako su determinante korištene od kraja 17. stoljeća, o početku matričnog računa može se govoriti tek početkom 19. st. Konkretno, Gauß je u *Disquisitones Arithmeticae* (1801.) opisao kvadratne forme $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ i slagao njihove koeficijente u kvadratne tablice te koristio operacije koje bismo zvali množenjem matrica i računjanje inverza. Cauchy je 1826. takve tablice nazivao *tableau* i računao im svojstvene vrijednosti te u kontekstu kvadratnih formi dokazao da se svaka realna simetrična matrica može dijagonalizirati. No, apstraktni matrični račun utemeljio je Cayley, a njime je utemeljio i modernu apstraknu algebru. On je 1858. dao apstraktnu definiciju matrica i operacija s matricama te 2×2- 3×3-slučaj **Cayley-Hamiltonovog teorema** (svaka matrica poništava svoj karakteristični polinom). Cayleyev prijatelj, Sir William Rowan Hamilton, je dokazao 4×4-slučaj, dok je opći slučaj nešto kasnije dokazao njemački matematičar Ferdinand Georg Frobenius (1849.–1917.). Drugi Cayleyev prijatelj, engleski matematičar James Joseph Sylvester (1814.–1897.) je pak dokazao razne rezultate o matricama i uveo naziv „matrica". Irski matematičar Sir William Rowan Hamilton je pak poznat i po otkriću kvaterniona. On je 1833. na temelju kompleksne ravnine interpretirao skup kompleksnih brojeva kao dvodimenzionalni realni prostor i pokušao ga poopćiti na trodimenzionalni. No, uočio je da je nemoguće sačuvati sva svojstva te je kao rezultat 1843. dobio četverodimenzionalni realni vektorski prostor **kvaterniona**. Ideju istog dobio je šetajući uz dublinski *Royal Canal*, te je svoju ideju

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

urezao u kamen mosta. Ipak, množenje kvaterniona nije komutativno, dakle oni ne čine polje (što naravno znamo da je i nemoguće po Weierstraßovom rezultatu iz 1863.). Hamilton je odrastao kao čudo od djeteta, već do 13. rođendana znao je 12 jezika, s 15 je čitao Laplacea i Newtona, a sa 17 je našao grešku u *Mécanique céleste*. Djelovao je na *Trinity College* u Dublinu, a poznat je i po rezultatima u mehaničkoj fizici (Hamiltonova mehanika). Privatni život mu nije bio sretan, što je u drugoj polovini života dovelo do problema s alkoholom (umro je od napada gihta). U sklopu svog rada na kvaternionima, Hamilton je bio prvi koji koristi naziv **vektor** (1853.) [10, 26, 84, 104].

[8] Determinanta koju danas nazivamo Vandermondeovom se ne pojavljuje ni u jednom od Vandermondeovih radova.

[9] Iste godine je Jaques Binet (1786.–1856.) dao, manje precizan, dokaz istog teorema.

No, trebalo je proći još malo do moderne definicije **vektorskih prostora**. Njemački matematičar **Hermann Günter Grassmann** (1809.–1877.) je prvo 1844. objavio teško razumljivo, ali originalno djelo *Die lineale Ausdehnungslehre*, čiju popravljenu verziju je objavio 1862. Tu nalazimo apstraktne algebarske operacije i svojstva konačnodimenzionalnih apstraktnih vektorskih prostora (točnije, algebri). Modernu formu je algebri vektora dao američki fizičar, kemičar i matematičar **Josiah Willard Gibbs** (1839.–1903.), a prvu aksiomatsku definicija vektorskih prostora dao je u *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (1888.) talijanski matematičar **Giuseppe Peano** (1858.–1932.).[10] Peano je definirao i zavisne i nezavisne objekte te dimenziju: dimenzija linearnog sustava je maksimalni broj linearno nezavisnih objekata u tom sustavu. Dokazao je da konačnodimenzionalni linearni sustavi imaju bazu i dao primjere beskonačnodimenzionalnih linearnih sustava tj. vektorskih prostora. Ipak, Peanovo djelo je imalo slab utjecaj jer je za 1888. ovakav pristup još bio preapstraktan. Tek početkom 20. st., s nastanak funkcionalne analize (Hahn, Wiener, Banach: normirani prostori) dovodi do potpune moderne apstraktne teorije vektorskih prostora [10, 26, 84, 104].

11.4.2 Nastanak teorije grupa

Neka svojstva grupa[11] korištena su, naravno, davno prije nego su te strukture uvedene, primjerice svojstva algebarskih operacija s brojevima. Također, Eulerov dokaz malog Fermatovog teorema iz 1758. *de facto* koristi grupe ostataka (modulo prostog broja). U drugoj polovici 18. st. su se J.-L. Lagrange i A.-T. Vandermonde bavili su se pitanjem rješivosti opće algebarske jednadžbe

$$x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0$$

u radikalima. Podsjećamo, od 16. st. bilo je poznato da su sve algebarske jednadžbe do uključivo stupnja 4 rješive u radikalima. Većina matematičara su nakon toga vjerovali da će se s vremenom naći rješenja u radikalima i za jednadžbe viših stupnjeva. Lagrange i Vandermonde bili su prvi problemu pristupili razmatrajući *zašto* takva rješenja postoje za jednadžbe stupnjeva do 4. Obojica su primijetili da opća verzija Vièteovih formula znači da su koeficijenti algebarske jednadžbe simetrične racionalne funkcije[12] njezinih n rješenja.[13] Stoga su i sve racionalne funkcije koeficijenata jednadžbe simetrične s obzirom na njena rješenja. S druge strane, rješenje u radikalima su funkcije koeficijanata jednadžbe u kojima se rješenja računaju iz koeficijenata koristeći četiri osnovne ra cunske operacije

[10] Peano je opisao „linearne sustave" kao skupove koji zadovoljavaju sljedeće aksiome: (1) Definirana je ekivalencija $=$ za po dva objekta u sustavu: $(a = b)$ akko $(b = a)$; ako $(a = b)$ i $(b = c)$, onda $(a = c)$. (2) Zbroj dva objekta sustava a i b je definiran, tj. definiran je objekt $a + b$ iz istog sistema i pritom: Ako $(a = b)$, onda $(a + c = b + c)$; $a + b = b + a$; $a + (b + c) = (a + b) + c$, i zajednička vrijednost ta dva zbroja označava se s $a + b + c$. (3) Ako je a objekt u sustavu i m prirodan broj, onda s ma označavamo zbroj m objekata jednakih a. Lako se vidi da za objekte a, b, ... iz sustava i prirodne brojeve m, n, ... vrijedi: Ako $(a = b)$, onda $(ma = mb)$; $m(a + b) = ma + mb$; $(m + n)a = ma + na$; $m(na) = mna$; $1a = a$. Pretpostavljamo i da za svaki realan broj m oznaka ma ima smisla i da i za nju vrijede iste formule. Objekt ma se zove produktom broja m i objekta a. (4) Postoji objekt 0 u sustavu koji ima svojstvo $0a = 0$ za sve elemente sustava; ako $a - b$ znači isto što i $a + (-1)b$, onda je $a - a = 0$; $a + 0 = a$.

[11] Grupa je neprazan skup G opskrbljen binarnom operacijom $*$ koja je asocijativna, ako su u tom skupu jednoznačno rješive sve jednadžbe oblika $a * x = b$.

[12] To znači da im vrijednost ne ovisi o permutaciji varijabli.

[13] Podsjećamo, u to doba osnovni teorem algebre još nije bio dokazan, ali je bilo općeprihvaćeno da jednadžba stupnja n ima n rješenja u nekom dovoljno velikom skupu brojeva.

te korjenovanje. Budući da općenito takvim formulama dobivamo različite vrijednosti za $x_1, x_2, \ldots, x_n$, slijedi da korijeni „ruše" simetriju [10, 26, 40, **?**, 104].

Primjer 45 *Pogledajmo opću (normiranu) kubnu jednadžbu* $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$. *Vietèove formule za nju su:*

$$-a = x_1 + x_2 + x_3; \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad -c = x_1x_2x_3.$$

Pogledajmo primjerice sljedeću racionalnu funkciju koeficijenata:

$$r(a, b, c) = \frac{a}{b - c} = \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3}.$$

Ona je simetrična funkcija rješenja x_1, x_2 *i* x_3*: za svaku permutaciju ta tri rješenja ona ima isti iznos.*

Lagrange je dalje promatrao izraze $\sum_{i=1}^{n} \omega_{i-1}x_i = y$, gdje su $\omega_1 = 1$, ω_2, $\ldots$, ω_{n-1} kompleksni n-ti korijeni od 1. Budući da imamo $n!$ permutacija rješenja $x_1, \ldots, x_n$, izraz y poprima najviše $n!$ različitih vrijednosti. Ako bismo ih sve znali (i ako bi bilo bar n različitih među njima), dobili bismo sustav linearnih jednadžbi čije rješenje je $(x_1, \ldots, x_n)$. Tih (najviše) $n!$ vrijednosti za y su ujedno sigurno rješenja jedne algebarske jednadžbe stupnja $n!$. Lagrange je primijetio da se u svim slučajevima s poznatim rješenjima u radikalima ($n = 1, 2, 3, 4$) jednadžba stupnja $n!$ za y-e može svesti na jednadžbu stupnja manjeg od n rješivu u radikalima, tj. ako jednadžbu stupnja $n!$ možemo svesti na jednadžbu stupnja 4 ili manjeg, onda možemo izračunati y-e, a iz njih dobiti x-eve, traženo rješenje jednadžbe stupnja n u radikalima.

Primjer 46 *Za kubne jednadžbe imamo* $n = 3$*, dakle* $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \overline{\omega_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.. *Tu bi dakle Lagrange gledao izraz*

$$y = x_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x_3.$$

Permutiranjem $\{x_1, x_2, x_3\}$ *taj izraz poprima najviše* $3! = 6$ *različitih vrijednosti* y_i*, koje zadovoljavaju jednadžbu stupnja* 6*:*

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4)(y - y_5)(y - y_6) = 0.$$

Lagrange je uočio da će ta jednadžba uvijek biti oblika

$$y^6 + P(x_1, x_2, x_3)y^3 + Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

a ona se supstitucijom $t = y^3$ *može svesti na kvadratnu. Dakle, za kubne jednadžbe* ($n = 3$) *postoji jednadžba stupnja* $3! = 6$ *za* y*-e koja dade svesti na jednadžbu stupnja* 2*, također rješivu u radikalima.*

Među ostalim, Lagrange je iz ovih razmatranja (1771.) zaključio da ako imamo polinom s n varijabli, te ako te varijable permutiramo na svih $n!$ načina, dobit ćemo neki broj m različitih polinoma, pri čemu je m djeljitelj od $n!$. Bila je to prva verzija **Lagrangeovog teorema teorije grupa**: Red podgrupe konačne grupe G uvijek je djelitelj od reda od G. Prvi koji je ustvrdio da opća jednadžba[14] stupnja 5 nema rješenje u radikalima bio

[14]Naravno da za svaki stupanj postoje jednadžbe koje imaju rješenja u radikalima, primjerice $x^n = 1$.

je 1799. talijanski matematičar **Paolo Ruffini** (1765.–1822.). To je pokušao dokazati koristeći permutacije i pritom *de facto* koristio svojstva **grupa permutacija** (naziva ih *permutazione*). Među ostalim, eksplicitno je koristio zatvorenost *permutazione* s obzirom na kompoziciju (kompozicija dvije permutacije jednog skupa je permutacija istog skupa). Začuđujuće, na taj njegov rad nije bilo reakcija. Stoga je 1801. kopiju knjige poslao Lagrangeu, no nije dobio odgovor. Ponovno ju je poslao s molbom da ga Lagrange upozori ako je što krivo ili beskorisno napravio, no ponovno nije bilo odgovora. Stoga je 1803. objavio novi, kako se nadao razumljiviji dokaz. Taj je rad izazvao samo poneki komentar talijanskih matematičara. Zatim je zatražio recenziju pariškog Nacionalnog instituta te su kao recenzenti imenovani Lagrange, Legendre i Lacroix.[15] Oni su zaključili da u Ruffinijevom tekstu nema ništa bitnog. Stoga je Ruffini zatražio mišljenje i od *Royal Society*. Oni su pak zaključili da se ne slažu sa svime, ali da rezultat smatraju uglavnom dokazanim. Ruffini je zatim 1808. i 1813. dao nove verzije dokaza, no jedini matematičar koji je priznao važnost rezultata i smatrao ga točnim (rupu u dokazu smatrao je minornom) bio je Cauchy 1821. Ipak, svi Ruffinijev pokušaji dokaza imaju rupu [10, 26, 40, 84, 94, 104].

Prvi potpun dokaz nerješivosti opće jednadžbe 5. stupnja u radikalima dao je 1824. norveški matematičar **Niels Henrik Abel** (1802.–1829.). Abel je osim po tome poznat i po iznimnim rezultatima u području matematičke analize. Život mu je bio obilježen siromaštvom. Otac mu je bio teolog i filolog, norveški nacionalist i aktivan u borbi za norvešku nezavisnost od Danske. Majka mu je bila kćer trgovca i vlasnika brodova, Niels je bio drugo od 7 djece. Kad je Niels imao godinu dana, otac mu je nakon smrti svog oca naslijedio mjesto protestantskog svećenika. Do 13. godine Nielsa je podučavao otac, no živili su u siromaštvu u doba ekonomske krize. Problemi obitelji ipak nisu bili samo ekonomski i politički. Prema raznim izvorima, Nielsov otac je bio alkoholičar, a majka optužena za nemoral. 1815. godine Niels i njegov stariji brat poslani su u katedralnu školu u Christianii (danas Oslo). Neinspiriran osrednjom školom, Niels je bio prosječan učenik koji je pokazao nešto talenta za matematiku i fiziku. Kad je učitelj matematike otpušten jer je nasmrt pretukao dječaka, stvari su se promijenile nabolje dolaskom novog učitelja matematike Holmboea. Potican od Holmboea, u roku od godinu dana Abel je bio sposoban čitati djela sveučilišne razine. Sa 16 godina Abel je dokazao binomni teorem za sve realne eksponente (Euler ga je dokazao za racionalne eksponente). Nakon smrti oca (1820.) Abelova se obitelj našla u još težim financijskim uvjetima, no Holmboe je uspio izboriti stipendiju koja je Abelu omogućila završetak škole. U to doba Abel je počeo raditi na pitanju rješivosti opće jednadžbe 5. stupnja u radikalima. Prve rezultate o jednadžbama 5. stupnja (1821.) u kojima je naizgled dokazao rješivost, Abel je predao na objavljivanje Kraljevskom društvu u Copenhagenu, no kad su ga zamolili za konkretan primjer, otkrio je grešku. Diplomirao je 1822. na sveučilištu u Christianii. Na tom je sveučilištu imao jaku podršku profesora astronomije C. Hansteena, čija se žena počela brinuti za Abela kao da joj je vlastito dijete. Pri jednom boravku u Kopenhagenu radi matematičkih kontakata, upoznao je Christine Kemp i s njom se ubrzo zaručio. Po povratku u Christianiu, pokušavao je izboriti financiranje puta u Europu kako bi upoznao velike matematičare Njemačke i Francuske. Nije znao ni njemački ni francuski pa je financiranje odgođeno za dvije godine, dok ne nauči te jezike. Abel se vratio radu na jednadžbama 5. stupnja i 1824. dokazao da se ne mogu riješiti u radikalima. Taj je rad objavio na vlastiti račun i na francuskom jeziku, kako bi imao impresivni rezultat za prezentiranje na svom putovanju. 1825. godine Abel dobiva novce za studijski posjet Francuskoj i

[15] Sylvestre Lacroix (1765.–1843.), francuski matematičar, poznat po udžbenicima iz geometrije i analize.

Njemačkoj. Posjetio je Berlin, gdje se sprijateljio s Augustom Crelleom, matematičarem amaterom koji je osnovao jedan od najznamenitijih matematičkih časopisa u povijesti: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, poznat kao *Crelle's Journal*. U tom je časopisu Abel među inim objavio jasniju verziju svog dokaza o nerješivosti jednadžbe 5. stupnja u radikalima (1827.). Za vrijeme boravka u Berlinu, saznao je da je mjesto profesora matematike na sveučilištu u Christianii (jedinom u Norveškoj) dobio Holmboe, koji bi mjesto bio odbio radi Abela, da mu nisu zaprijetili da ako on odbije, mjesto dobiva stranac. S druge strane, u Berlinu nije bilo mogućnosti za stalno mjesto u iduće četiri godine te se Abel našao u ozbiljnim egzistencijalnim problemima. Ostao je u Berlinu i dalje se bavio tad još nedovoljno rigorozno postavljenim osnovama matematičke analize. Nakon što je čuo da Gauß nije bio zadovoljan dobivanjem njegova rada o jednadžbama petog stupnja, Abel odustaje od ideje puta u Göttingen. Nije poznato zašto je Gauß imao takav stav prema Abelovom radu, jer je sigurno da ga nije pročitao — pismo je nađeno neotvoreno nakon Gaußove smrti. Mogući su razlozi da je sâm to dokazao ili pak da je takav dokaz smatrao nebitnim, što je vjerojatnije. Nakon Berlina, Abel je posjetio Pariz, gdje je nezainteresirano primljen. Prema njegovim riječima *„Francuzi su mnogo rezerviraniji prema strancima nego Nijemci"*, a *„Cauchy je lud [...] iako je trenutno on jedini koji zna kako se treba postupati u matematici"*. U Parizu je napisao važno djelo o eliptičkim integralima, koje su trebali recenzirati Cauchy i Legendre. Legendre je tvrdio da je prestar i da ne vidi čitati rukopis, te je posao prepustio Cauchyju. Abel je ostao u Parizu, zlovoljan, zabrinut — i gladan: mogao si je priuštiti samo jedan obrok dnevno. Zdravlje mu slabi i u lošem stanju vraća se u Berlin 1826. Tu posuđuje novce i nastavlja raditi na eliptičkim funkcijama. Abelovi rezultati o eliptičkim funkcijama postat će temelj svih budućih istraživanja u tom području. Crelle je Abela nagovarao da ostane u Berlinu dok mu ne nađe posao, no Abel se odlučio vratiti kući. U svibnju 1827. stiže u Christianiu i dobiva mali kredit od sveučilišta, koji mu se odbija od svih budućih plaća. Da bi zaradio malo novca, Abel podučava djecu, a zaručnica se zapošljava kao guvernanta u Frolandu. Situacija se malo popravlja kad Abel dobiva Hansteenovo mjesto na sveučilištu i vojnoj akademiji, nakon što je Hansteen dobio velike novce za istraživanje Zemljinog magnetskog polja u Sibiru. 1828. godine Abel saznaje za Jacobijeve rezultate o transformacijama eliptičkih integrala i pokazuje da se ti rezultati mogu dobiti kao posljedica njegovih. Ubrzo objavljuje i nekoliko novih rezultata na tu temu, te on i Jacobi postaju znameniti: Legendre ih naziva najvećim analitičarima toga doba. U to se doba Abel počinje baviti i pitanjem koje će nekoliko godina kasnije riješiti Galois: Koje su algebarske jednadžbe rješive u radikalima? Zdravlje mu je ipak bilo previše narušeno siromašnim životom. Saznaje da je njegovo pariško djelo o eliptičkim funkcijama zagubljeno (zanimljivo je da je Cauchy zagubio i Galoisove radove) i ponovno piše glavne rezultate: rad od dvije stranice nazvan *Jedan teorem*. Za Božić putuje zaručnici u Froland te se ozbiljno razboljeva nakon jedne vožnje sanjkama. Za to saznaje Crelle, koji opet pojačava trud da mu nađe mjesto. Crelle uspijeva, nalazi mjesto profesora u Berlinu, no pismo s dobrom vijesti stiže dva dana nakon Abelove smrti od tuberkuloze koju je „zaradio" tijekom svog boravka u Parizu. Nakon njegove smrti, Cauchy traži zagubljeni članak i nalazi ga 1830. Štampan je 1841., no ponovno nestaje — i ponovno je pronađen tek 1952. u Firenzi. Godine 1830. pariška Akademija znanosti dodjeljuje *Grand Prix* Abelu iJacobiju za izvanredna dostignuća. Na natječaj za tu nagradu svoj rad je poslao i Galois, no taj je rad izgubljen i nije ušao u izbor [10, 26, 40, 84, 104].

Spomenuti **Évariste Galois** (1811.–1832.) je svojim radom na (ne)rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima utemeljio **teoriju grupa**. Rođen je u doba vrhunca

Napoleonove vladavine, a roditelji su mu bili republikanski nastrojeni. Do dvanaeste godine podučavala ga je majka, a zatim je pohađao internat. U doba Galoisova školovanja Francuska je ponovno bila kraljevina. Prve dvije godine Galois je bio dobar đak, a onda je 1826. pao razred jer mu rad u retorici nije bio zadovoljavajući. 1827. mu je dozvoljeno da upiše tečaj matematike, koja ga je ubrzo tako očarala da ostaloj nastavi više nije posvećivao pažnju. Učitelji su ga smatrali čudnim, bizarnim, originalnim i zatvorenim. Zanimljivo je da su ga kritizirali zbog originalnosti, a Galois je postao jedan od najoriginalnijih matematičara u povijesti. 1828. se pokušao upisati na *École Polytéechnique*, ali zbog nedovoljne pripremljenosti nije uspio. Vrativši se u svoj internat sve se više bavi pitanjem rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima. Početkom 1829. objavio je prvi znanstveni rad, a zatim je na recenziju predao još dva na temu rješivosti algebarskih jednadžbi. Kao recenzent imenovan je Cauchy, koji je te radove zagubio, i nikad više nisu pronađeni. Doba nakon ponovne uspostave kraljevine u Francuskoj obilježeno je jakim političkim kretanjima i sukobima republikanaca i rojalista. 2. srpnja 1829. se ubio Galoisov otac, a razlog je bio kleveta upućena na račun obitelji od strane političkih protivnika. U potresenom stanju Galois je nekoliko tjedana kasnije opet pokušao položiti prijemni ispit za *École Polytéchnique* i ponovno nije uspio. Za taj je pokušaj vezana poznata anegdota: navodno je Galois iznerviran nedovoljno preciznim pitanjima ispitivača, kad je shvatio da usprkos svoje genijalnosti neće položiti ispit, bacio spužvu u lice dotičnog ispitivača. Nakon tog ponovnog neuspjeha, Galois je odabrao *École Normale*. Tokom 1830. predao članak za nagradu Akademije znanosti. Taj je članak predan na recenziju Fourieru, koji je ubrzo zatim umro. I ovom članku nakon toga je izgubljen svaki trag. Početkom 1830. Galois je objavio tri članka iz teorije eliptičkih krivulja, a u ljetu saznaje da njegov rad nije bio niti razmatran za nagradu te da je nagrada dodijeljena Jacobiju i Abelu. Tako je Galois postao uvjeren da je problem sustav koji onemogućava genijalne pojedince. U srpnju 1830. u Francuskoj dolazi do revolucije, kralj mora bježati iz zemlje, a u Parizu dolazi do uličnih pobuna. Direktor *École Normale* zabranio je studentima izlazak na ulice i zaključao ih u školi. Na to je Galois reagirao pismom u studentskom listu. Iako ga je potpisao, urednik je da ga zaštiti pismo objavio anonimno. Direktor škole je usprkos tome saznao tko je autor i optuživši ga za anonimni napad izbacio Galoisa sa škole. Galois se tada pridružio Nacionalnoj gardi, republikanskoj grani milicije. Kad je pobuna smirena, novi je kralj Lous-Philippe 31. prosinca 1830. ukinuo Nacionalnu gardu. Početkom 1831. Galois je za život zarađivao privatnom podukom. Potaknut od Poissona, predao je treću verziju svog rada o algebarskim jednadžbama Akademiji 17. siječnja 1831. Krajem 1830. godine nekoliko pripadnika Nacionalne garde bilo je zatvoreno pod optužbom da su htjeli svrgnuti vlast, a pušteni su na slobodu 9. svibnja 1831. Proslavi oslobađanja prisustvovao je i Galois te je te večeri podigao čašu i držeći bodež u ruci izrekao zdravicu kralju koja je protumačena kao prijetnja. Na suđenju 15. lipnja se Galois branio izjavom da je tekst bio „Louis-Philippeu, ako izda”, ali da su riječi nestale u galami. Galois je pušten na slobodu i oslobođen optužbe. No, boravak na slobodi nije dugo trajao: na dan Bastille 14. srpnja uhapšen je zbog nošenja zabranjene uniforme Nacionalne garde, puške, nekoliko pištolja i bodeža. Ovaj put je osuđen i zatvoren u zatvor Saint-Pelagie. Tokom boravka u zatvoru saznao je da je njegov posljednji članak odbijen, s argumentom da je stil izlaganja nejasan i nedovoljno razrađen. Ipak, Poissonovo izvješće poticalo je Galoisa da izda potpuniji prikaz svojih rezultata. Tokom boravka u zatvoru Galois radi matematiku, ali i pokušava samoubojstvo koje su spriječili drugi zatvorenici. Kad je u ožujku 1832. izbila epidemija kolere u Parizu, zatvorenici i među njima Galois prebačeni su u pansion Sieur Faultrier, koji je bio zatvor otvorenog tipa. Tu se zaljubio u Stephanie, kćer liječnika. Ta njegova

jedina ljubavna priča kratko je trajala: kad je pušten iz zatvora 29. travnja Stephanie se distancirala. Ubrzo zatim izazvan je na dvoboj. Povod dvoboja je bio vezan za Stephanie, ali nije jasno je li se radilo samo o ljubavnim razlozima (izazvali su ga njezin stric i navodni zaručnik) ili se, kako većina povjesničara smatra, zapravo radilo o političkim motivima. Postoje i mišljenja da se namjerno dao navesti u dvoboj, tj. da se u biti radilo o insceniranom samoubojstvu. Bilo kako bilo, Galois je noć prije dvoboja, siguran da ga neće preživjeti, proveo pišući dva pisma. Prvo je pismo upućeno kolegama republikancima i u njemu govori kako je u sukob upleten protiv svoje volje. Drugo pismo upućeno je prijatelju i poznato kao Galoisov „matematički testament" u kojemu se mogu naći temelji teorije grupa. Galois tu kaže: *... ako u takvoj grupi imamo supstitucije S i T, onda je u njoj i supstitucija ST.* Ipak, nigdje nije eksplicitno definirao grupe. Ostavljajući zbog nedostatka vremena mnoga mjesta nedokazana, Galois je tu noć zapisao pregled svih svojih rezultata. U dvoboju u jutro 30. svibnja ranjen je u trbuh, a protivnik i sekundant ga napuštaju. Teško ranjenog nalazi ga jedan seljak te Galois umire u bolnici 31. svibnja. Pogreb je trebao biti održan 2. lipnja, ali je večer prije policija razbila sastanak koji su smatrali uvodom u demonstracije koje su trebale biti održane na pogrebu. Tridesetero prisutnih je uhapšeno, a pogreb je održan dan kasnije na javnom groblju. Danas ne postoji trag mjestu gdje je Galois pokopan. Galoisove su papire skupili brat i prijatelj i poslali ih, kako je bila Galoisova želja, Gaußu i drugim matematičarima. Ti su spisi došli do Josepha Liouvillea (koji je najpoznatiji je po dokazu egzistencije transcendentnih brojeva) 1843., koji ih je izdao 1846. [10, 26, 40, 84, 104].

Galois se bavio pitanjem: Kako za danu algebarsku jednadžbu utvrditi ima li rješenja u radikalima? Shvatio je da je odgovor na to pitanje vezan za strukturu grupe koja se danas naziva Galoisovom grupom G jednadžbe (odnosno polinoma). To je podgrupa grupe permutacija svih njezinih korijena. Pojednostavljeno rečeno, u Galoisovoj grupi G se nalaze one permutacije korijena, koje ne mijenjaju nijednu racionalnu funkciju koeficijenata (uočimo utjecaj Lagrangea i Ruffinija!). Dvije godine prije nego su Liouvilleovim izdanjem postali poznati Galoisovi rezultati, dakle 1844., Cauchy je objavio djelo o grupama permutacija u kojem je definirao red permutacije, uveo cikličku notaciju, itd. Umjesto naziva grupa koristio je naziv *systeme des substitutions conjugués* (sustav konjugiranih supstitucija) [10, 26, 40, 84, 104].

Prvu apstraktnu definiciju **grupe** dao je 1854. Cayley. On je uz to uveo i „tablicu množenja" grupe (Cayleyevu tablicu) i dao razne primjere uključivo grupa matrica i kvaterniona, no taj njegov tekst je imao slab utjecaj. Jordan je od 1860ih preferirao izraz grupa, koji je ubrzo postao prihvaćen. Jordan je ujedno prvi razmatrao grupe simetrija, tj. grupe koje se sastoje od svih izometrija koje fiksiraju određeni objekt (1868./9.) i započeo njihovu klasifikaciju. Poticaj za proučavanje simetrija i njihovih grupa došao je iz kristalografije, u kojoj je na prijelazu 18./19. st. uočila važnost simetrija kristala.[16] Nakon toga je Cayley objavio još radova o grupama, među ostalim je dokazao da se stvarno sve grupe mogu povezati s grupama permutacija: **Cayleyev teorem** je rezultat da je svaka grupa izomorfna nekoj simetričnoj grupi [10, 24, 26, 104].

[16] Zanimljivo, prva matematička definicija simetrije (i to samo zrcalne) potječe tek iz 1794. (Legendre).

11.5 Nekoliko zanimljivosti iz teorije brojeva u 19. stoljeću

Njemački matematičar belgijskog porijekla **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805.–1859.) već se s 12 godina zaljubio u matematiku i sav je džeparac trošio na kupnju matematičkih knjiga. Studirao je u Parizu, djelovao u Berlinu i Göttingenu. Oženio se Rebeckom Mendelssohn. Bio je prijatelj Jacobija i kad se Jacobi uslijed siromašnih prilika razbolio i bio prisiljen ići u Italiju (1843.) uspio je za njega ishoditi financijsku pomoć. Za vrijeme posjeta Montreuxu 1858. prilikom jedne konferencije doživio je srčani udar. Teško bolestan vratio se u Göttingen. Dok je bio bolestan žena mu umire od kapi te je ubrzo zatim i on umro. Opisan je ovako: „On je dosta visok, štrkljast čovjek s brkovima i bradom koji postaju sijedi i pomalo grubim glasom te dosta nagluh. Bio je neopran, sa šalicom kave i cigarom. Jedna od mana mu je zaboravljanje vremena, vadio je svoj sat, vidio da je prošlo tri, i onda istrčao bez da završi rečenicu." Osim po doprinosima analizi, najpoznatiji je po rezultatima u teoriji brojeva. Njegov prvi članak (1825.), kojim je odmah postao poznat, sadrži dokaz velikog Fermatovog teorema za slučaj $n = 5$, točnije jednog od dva podslučaja. Naime, ako je $x^5 + y^5 = z^5$, pokazuje se da jedan od brojeva x, y, z mora biti paran i jedan djeljiv s 5. Stoga treba razmatrati slučaj kad je neki od x, y i z djeljiv s 10 te slučaj kad nijedan nije djeljiv s 10. Drugi slučaj dokazao je iste godine Legendre. Kasnije je Dirichlet veliki Fermatov teorem za $n = 14$. Dokazao je i Gaußovu hipotezu da u aritmetičkom nizu u kome su prvi član i diferencija međusobno relativno prosti brojevi ima beskonačno mnogo prostih brojeva, uveo je Dirichletov red $\sum_n a_n n^{-s}$, a bavio se analitičkom i algebarskom teorijom brojeva [10, 26, 104].

Osvrnimo se ovdje kratko na daljnu povijest dokaza velikog Fermatovog teorema. U Dirichletovo je doba već bilo poznato da ga je dovoljno dokazati za eksponent 4 (Fermat, Euler) i za proste eksponente. Prvi značajniji generalni pristup potječe od francuske matematičarke **Sophie Germain**, koja je svoje radove morala objavljivati pod pseudonimom Monsieur Le Blanc (1776.–1831.). Ona je 1805. dokazal da teorem vrijedi za određenu klasu prostih eksponenata, koji se danas njoj u čast nazivaju brojevima Sophie Germain. Kroz 19. st. dokazani su mnogi pojedinačni slučajevi te je do početka 20. st. dokazan za sve eksponente manje od 100 kao i da vrijedi za beskonačno mnogo prostih eksponenata. Tada se razvoj teorije brojeva sve više počeo odmicati od ovog problema, te se sve do početka 1980-ih godina napredak sastojao uglavnom u računalnim provjerama. Sredinom 1980-ih je njemački matematičar Gerhard Frey (1944.–) uočio da se ovaj teorem može dobiti iz jedne naizgled s njime potpuno nepovezane hipoteze (iz graničnog područja algebarske topologije i teorije brojeva), poznate pod nazivom Shimura-Taniyama-Weil-ova hipoteza. Veze između tih rezultata uspostavili su sam Frey, te britanski matematičari Richard Taylor (1962.–) i Andrew Wiles (1953.–). Andrew Wiles je 1995. konačno dokazao i zadnji potrebni korak.

Vjerojatno najpoznatiji danas otvoreni matematički problem (i jedan od sedam milenijskih problema) je **Riemannova hipoteza**. Riemann je naime uočio da Eulerov produkt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,\mathsf{prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

vrijedi za sve kompleksne brojeve s s realnim dijelom većim od 1, te da je tako definirana holomorfna funkcija koja se može proširiti do holomorfne funkcije ζ na $\mathbf{C} \setminus \{1\}$. Uočio je da ta funkcija ima beskonačno mnogo trivijalnih nultočki (to su negativni parni brojevi) te

da su to jedine nultočke s negativnim realnim dijelom. Također, dokazao je da ne postoje ni nultočke ζ-funkcije s realnim dijelom većim od 1. Promatrajući vezu između funkcija ζ i Γ Riemann je postavio do danas nedokazanu hipotezu: Sve netrivijalne nultočke od ζ imaju realni dio jednak 1/2 [10, 26, 104].

Nekoliko važnih rezultata u teoriji brojeva, za koje je opseg ovog kolegija premali da bismo ih opisali, dao je na prijelazu 18./19. st. i Lagrange. No, još su poznatiji njegovi doprinosi u matematičkoj an analizi.

11.6 Formaliziranje matematičke analize

Talijansko-francuski matematičar **Joseph-Louis Lagrange** (1736.–1813.) poznat je osim po doprinosima algebri, matematičkoj analizi i teoriji brojevi također i po doprinosima matematičkoj fizici (klasična mehanika i Lagrangeove jednadžbe). Rođen je u Torinu, kršten kao Giuseppe Lodovico Lagrangia. Pradjed mu je bio konjički oficir francuske vojske i već odmalena je Lagrange preferirao tu stranu svoje obitelji. Otac mu je bezusjpješnim spekulacijama izgubio puno novca, a Lagrange je kasnije rekao: „Das sam bio bogat, vjerojatno se ne bih bio posvetio matematici." Tijekom studija prava otkrio je interes za matematiku i fiziku, no matematiku je uglavnom naučio sam i sa samo 19 godina dobio profesuru matematike na Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu. Uz podršku d'Alemberta, 1766. je dobio Eulerovo mjesto na berlinskoj Akademiji. Godinu kasnije se oženio, no nije imao djece, a žena mu je umrla 1783. U Berlinu je boravio 20 godina i svojim radovima osvojio mnoge velike znanstvene nagrade. Zbog zdravstvenih problema, nakon smrti Friedricha Velikog prihvatio je poziv pariške Akademije i preselio 1787. u Pariz. Osnovni stav da je jedan od glavnih principa svakog mudrog čovjeka prilagoditi se zakonima države u kojoj živi ma koliko nerazumni bili pomogao mu je da bez većih problema preživi Francusku revoluciju. Ponovno se oženio 1792., mladom kćerkom kolege. 1790-ih je predavao i na znamenitim francuskim visokim školama *École Polytechnique* i na *École Normale*, no nije ostao zabilježen kao dobar predavač. U doba Napoleona postao je grof, a dva dana prije smrti dobio je orden Velikog križa.

Krajem 18. st., Lagrange pokušavao je rigorozno definirati **derivacije**. Prema Lagrangeu, infinitezimalni račun treba svesti na algebru redova potencija. Za njega je račun s redovima podjednako algebra kao račun s konačnim algebarskim izrazima, analogno tome što je račun se beskonačnim decimalnim razvojima i dalje aritmetika (usp. Newton). Prema Lagrangeu, temeljno svojstvo derivacije je

$$f(x+i) = f(x) + i\,f'(x) + i\,V,$$

ako se i za svaki D može izabrati dovoljno malen da V bude između $-D$ i D. Iz toga je izveo **teorem srednje vrijednosti**, koji u izvornoj formulaciji glasi: Za svaki D može se naći i sa svojstvom

$$i\,(f'(x) - D) < f(x+i) - f(x) < i\,(f'(x) + D).$$

Koristeći ovaj teorem Lagrange je dokazao razne tvrdnje o derivacijama, primjerice vezu predznaka f' i rasta odnosno pada od f. U *Théorie des fonctions analytiques* (1797.) objavio je rezultat za kojeg je mislio da ga je korektno dokazao, a to je da se svaka funkcija (koju, u duhu Eulera, gleda kao analitički izraz) može zapisati u obliku

$$f(x+h) = f(x) + p(x)\,h + q(x)\,h^2 + r(x)\,h^3 + \ldots, \tag{11.1}$$

za sve do na eventualno konačno mnogo vrijednost x. Na temelju toga, Lagrane derivaciju od $f(x)$ definira kao $p(x)$, drugu derivaciju kao pola $q(x)$ itd. Lagrange je pisao fx, $f'x$, $f''x$ za funkciju, njenu prvu i drugu derivaciju. Prednost njegovog pristupa je očigledna: Izbjegao je fizikalne argumente i kvocijente infinitezimalnih veličina. Također, sad su i derivacije također funkcije. No, kako je malo kasnije uočio Cauchy, tvrdnja o mogućnosti razvoja svake funkcije u red potencija nije točna [11, 26, 28, 49, 104, 105].

Dakle, da funkcije općenito nisu određene svojim razvojima u redove potencija, je pokazao **Augustin-Louis Cauchy** (1789.–1857.). Cauchyev kontraprimjer za Lagrangeovu tvrdnju je Cauchyeva funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ona posjeduje sve derivacije u 0, ali njezin Maclaurinov razvoj je nulfunkcija, tj. ona se sa svojim razvojem u red potencija podudara samo u jednoj točki. Cauchy je ujedno, 1821., dao i prvu zadovoljavajuće dobru definiciju limesa, kojom D'Alembertova definicija derivacije postaje korektna. Cauchyjeva definicija limesa glasi:

> Ako se slijed vrijednosti koje se pripisuju nekoj varijabli neograničeno približava nekoj vrijednosti, tako da na kraju razlika do nje bude toliko mala, koliko želima, posljednja se vrijednost zove **graničnom vrijednošću** ostalih vrijednosti.

Cauchy dalje kaže da su infinitezimalne veličine one kojima je limes 0. Preciznu definiciju derivacije je formulirao 1823.: **Derivacija** $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je, ako postoji, limes kvocijenta $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kad h teži u 0. Cauchy je također pokušao popraviti starije definicije funkcije tako da budu uključene i implicitno zadane funkcije. Cauchyjeva definicija funkcije iz 1821. glasi:

> Ako su varijabilne veličine tako povezane, da ako je zadan iznos jedne, iz njega možemo odrediti iznose ostalih, općenito te različite veličine izražavamo preko te jedne, koju nazivamo nezavisnom varijablom; ostale pak veličine, koje su izražene preko nezavisne varijable, zovu se funkcijama te varijable.

Vidimo da je ipak i kod Cauchyja funkcija još uvijek poistovjećena s formulom. Kod Cauchyja možemo naći i definiciju **neprekidne funkcije** u suvremenom smislu, kao funkcije kod koje beskonačno mali prirast varijable izaziva beskonačno mali prirast funkcije, pri čemu nije jasno misli li na običnu ili uniformnu neprekidnost [11, 26, 87, 49, 104, 105].[17]

Često se kaže da je Cauchy uveo $\varepsilon - \delta$-jezik u analizu. To nije sasvim točno, iako se njegove definicije i dokazi lako prevedu na taj jezik. Jedini dokaz u kojem stvarno koristi ε i δ je njegov dokaz teorema srednje vrijednosti, koji u Cauchyjevoj formulaciji glasi: Ako je $f(x)$ neprekidna na $[x, x+a]$, onda je $\min_{[x,x+a]} f'(x) \leq \frac{f(x+a)-f(x)}{a} \leq \max_{[x,x+a]} f'(x)$. Cauchy dokaz započinje ovako: dNeka su δ, ϵ dva jako mala broja; prvi se bira tako da za sve iznose i manje od δ i sve iznose x omjer $(f(x+i)-f(x))/i$ uvijek bude veći od $f'(x)-\epsilon$ i manji od $f'(x)+\epsilon$... No, argumenti tipa $\varepsilon - \delta$ mogu se naći i ranije, primjerice kod Lagrangea, a slične definicije (npr. neprekidne funkcije) i dokaze s argumentima stila $\varepsilon - \delta$ nalazimo u isto vrijeme i kod českog matematičara **Bernarda Bolzana** (1781.–1848.). Bolzanovi su doprinosi postali poznati tek u drugoj polovici 19. st. [11, 26, 44, 49, 104].

[17] „Funkcija $f(x)$ je neprekidna funkcija varijable x unutar dviju danih granica, ako se za svaki x između njih brojčani iznos razlike $f(x+\alpha) - f(x)$ skupa s α beskonačno smanjuje."

Cauchyjeve prve godine života bile su obilježene Francuskom revolucijom. Nakon iste je obitelj živjela u Parizu, a česti su im gosti bili Lagrange i Laplace. Svoje prvo nastavničko mjesto Cauchy je dobio 1815. na *École Polytechnique*, na kojoj je i studirao. Već 1816. postao je poznat (rješenjem jednog Fermatovog problema iz teorije brojeva). Brzo je napredovao. 1820-ih je postavio moderne temelje matematičke analize i utemeljio kompleksnu analizu. Poznat je po lošim odnosima s kolegama te radikalno, gotovo fanatično, katoličkim stavovima. Niels Henrik Abel je o njemu rekao: *Cauchy je lud i tu se ne može ništa učiniti, no trenutno je on jedini koji zna kako raditi matematiku.* Cauchy je zagubio radove mnogih matematičara ili ih dugo zaboravljao, a nerijetko je tuđe rezultate objavio pod svojim imenom. Cijelog života je konzistentno podržavao dinastiju Bourbon, tako da je 1830.–1838. bio u dobrovoljnom egzilu. Nakon tog doba su mu zbog stavova odbijene mnoge pozicije. Sveučilišnu je poziciju dobio natrag tek 1848. Jedan je od najproduktivnijih matematičara u povijesti — objavio je 789 matematičkih radova [84].

Cauchyjev suvremenik, **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768.–1830.) poznat je po razvoju teorije trigonometrijskih redova i fizikalnim rezultatima. On je uveo i oznaku $\int_a^b$ za određene integrale. U sklopu naše teme zanimljiva je Fourierova definicija funkcije iz 1822., u kojoj se već nazire oslobađanje od funkcije kao formule:

> Općenito funkcija $f(x)$ predstavlja niz vrijednosti ili ordinata, od kojih je svaka proizvoljna. Za beskonačno mnogo danih iznosa apscise x postoji jednako mnogo ordinata $f(x)$. Sve one imaju brojčane iznose, pozitivne, negativne ili nula. Ne pretpostavljamo da te ordinate poštuju neko opće pravilo; one slijede jedna za drugom na bilo koji način i svaka je dana kao da je jedina.

Teorijom Fourierovih redova bavio se i Dirichlet, koji je 1837. dao gotovo modernu definiciju neprekidne funkcije, koju je lako prilagoditi u opću definiciju funkcije (ne dajemo ju doslovno kao prethodne):

> Neka x poprima vrijednosti između a i b. Ako svakom x-u odgovara samo po jedan konačan y, tako da se postepeno mijenja kako se x postepeno mijenja, y je neprekidna funkcija od x. Dirichlet dalje jasno kaže da ne treva pstojati jedinstveno pravilo, štoviše da ovisnost ne mora biti iskaziva matematičkim operacijama.

Neprekidnoj funkciji kod Dirichleta odgovara neka neprekidna krivulja od a do b. Sličnu je definiciju (također uz zahtjev neprekidnosti) dao Lobačevski 1838. Poznat je i Dirichletov primjer funkcije koja ima prekid u svakoj točki (1829.): To je kod njega funkcija koja ima vrijednost c u svakom racionalnom, a vrijednost $d \neq c$ u svakom iracionalnom broju [11, 28, 87, 105].

Matematičku analizu je konačno potpuno modernizirao njemački matematičar **Karl Weierstraß** (1815.–1897.). Već u gimnaziji istakao se matematičkim znanjem, no po želji oca upisao je studij prava, financija i ekonomije u Bonnu. Rastragan između studija i ljubavi prema matematici, nije pohađao nikakva predavanja, nego proveo 4 godine pijući i mačujući se i na vlastitu ruku proučavajući matematičke tekstove. Zatim je odlučio postati matematičar, a jedan obiteljski prijatelj je uvjerio oca da mu dopusti studirati matematiku u Münsteru. 1841. postao je gimnazijski učitelj, što je uz predavanje matematike uključivalo i fiziku, botaniku, geografiju, povijest, njemački, kaligrafiju i gimnastiku. Od 1850. patio je od vrtoglavica (velik dio kasnijeg života morao je predavati sjedeći), ali i od nezadovoljstva neispunjavajućim poslom. Jednim člankom iz 1854. postaje poznat i stječe počasni doktorat sveučilišta u Königsbergu. S vremenom je dobio i mjesto

u Berlinu, a njegova su predavanja privlačila studente iz cijelog svijeta. Privatno je 1870.–1874. podučavao rusku matematičarku Sofiju Vasiljevnu Kovalevskaju i s njom je do njene rane smrti 1891. ostao u kontaktu, ali je zatim spalio svu njihovu koresponednciju. Kao i ona, umro je od upale pluća. Weierstraß je dao suvremenu definiciju limesa:

> Funkcija $f(x)$ ima limes L u $x = x_0$, ako za svaki pozitivni ϵ postoji δ tako da je $|f(x) - L| < \epsilon$ za sve x za koje je $0 < |x - x_0| < \delta$.

Weierstraß koristi oznaku lim, ali je pisao npr. $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.[18] Za analizu, ali i topologiju važno je i da je 1877. Weierstraß rigorozno dokazao teorem kojeg je 1817. ne toliko rigornozno dokazao Bolzano, **Bolzano-Weierstraßov teorem**: Svaki ograničen beskonačan $S \subseteq \mathbb{R}$ posjeduje gomilište.[19] Spomenimo i da je Weierstraß 1872. otkrio primjer neprekidne funkcije koja nigdje nije derivabilna [11, 26, 87, 104, 105].

Sad dakle imamo dobre definicije limesa i derivacije i neprekidnosti. No, što je s integralima? Za suvremenu definiciju integrala zaslužan je već spominjani njemački matematičar **Bernhard Riemann** (1826.–1866.). Riemann je već u školi pokazao interes za matematiku. Otac mu je bio luteranski svećenik pa je po njegovoj želji počeo studirati teologiju u Göttingenu, no kasnije je prešao na matematiku. Predavao mu je, među ostalima, Gauß. Kasnije se prebacio u Berlin, gdje su mu profesori bili Steiner, Jacobi i Dirichlet. Mentor doktorata bio mu je Gauß, ali su veći utjecaj na njega imali fizičar Weber i matematičar Listing te je tako stekao solidne osnove fizike i topologije. U povijesti matematike posebno je poznato Riemannovo habilitacijsko predavanje *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*O hipotezama, koje čine temelje geometrije*), koje je održao 10. lipnja 1854. Predavanje se sastojalo od dva dijela. U prvom se bavio problemom definicije n-dimenzionalnog prostora i opisao pojam kojeg danas nazivamo Riemannovom mnogostrukošću (ili prostorom). U njegovoj ideji, radi se o plohi koja je lokalno aproksimativno euklidska ravnina, ali biće koje živi u njoj bi moglo uočiti zakrivljenost plohe kroz odstupanja od Pitagorinog poučka. U drugom dijelu predavanja, Riemann je postavio temeljna pitanja o vezi geometrije sa stvarnim svijetom. Taj je dio bio previše ispred svog vremena, te ga je čini se razumio samo prisutni Gauß, koji se oduševio s time. Einsteinovim otkrićem opće teorije relativnosti Riemannove ideje su potvrđene i postale temeljem moderne fizike. Uz geometriju i topologiju ostavio je velike rezultate u realnoj i kompleksnoj analizi te teoriji brojeva. Karijeru je proveo u Göttingenu, a umro je mlad od tuberkuloze. Riemannu je cilj bio odrediti nužne uvjete za mogućnost razvoja funkcije u Fourierov red i tako je otkrio potrebu preciziranja pojma **integrala**. On $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ opisuje kao limes zbroja

$$\delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n),$$

ako svi $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ teže u nulu i ako je taj limes neovisan o izboru x_i ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$) i $\varepsilon_i > 0$ [11, 26, 104].

Povijest matematičke analize završavamo modernom definicijom **funkcije**. Vidjeli smo da su tijekom 19. st. otkrivene su mnoge neobične funkcije (Cauchyjeva, Dirichletova, Weierstraßova, ...), što je ukazivalo na potrebu poboljšanja definicije funkcije, jer takve funkcije nisu zadovoljavale starije definicije. Zbrku unutar koncepta funkcije prvi je razjasnio njemački matematičar **Hermann Hankel** (1839.–1873.), koji je 1870. dao

[18] Oznaku $\lim_{x \to x_0}$ je čini se prvi put upotrijebio 1905. engleski matematičar Leathem, a popularizirao ju je 1908. Godfrey Harold Hardy (1877.–1947.).

[19] Gomilište je $p \in S$ takav da postoji niz $(p_n)_n$ u S kojemu je p limes.

sljedeću definiciju: „Funkcija se zove y od x ako svakom iznosu promjenjive veličine x unutar nekog intervala odgovara određeni iznos y, neovisno o tome ovisi li y o x na cijelom intervalu po istom pravilu o x ili ne, neovisno o tome može li se ta ovisnost opisati matematičkim operacijama ili ne." Usprkost toga, Poincaré 1899. je rekao: „Prije, kad se našla nova funkcija, to je bilo s praktičnim ciljem. Danas se izmišljaju da se pokaže da je argumentacija naših predaka bila kriva". Modernu „školsku" definiciju funkcije naposlijetku je 1923. dao francuski matematičar **Édouard Goursat** (1858.–1936.): „Za y kažemo da je funkcija od x, ako svakom iznosu x odgovara jedan iznos y. Takva se veza iskazuje formulom $y = f(x)$." [11, 26, 87, 104, 105].

11.7 Formaliziranje teorije vjerojatnosti i nastanak statistike

Formiranje vjerojatnosti kao matematiÄŤke grane zapoÄŤelo je 1713. s objavom *Ars conjectandi* Jacoba Bernoullija, no završilo je 99 godina kasnije prvim sustavnim djelom na tu temu. Bila je to *Théorie Analytique des Probabilités* (1812.) znamenitog znanstvenika, **Pierre-Simon Laplacea** (1749.–1827.). Laplace je, prema želji oca, trebao naći zvanje u crkvi. Tijekom studija teologije u Caenu otkrio je ljubav prema matematici. Odlučio je odustati od studija i otići u Pariz (1768.), a jedan od njegovih profesora dao mu je pismo preporuke za d'Alemberta. On je brzo uočio Laplaceove sposobnosti te mu je pomogao i u usmjeravanju matematičkog rada i u nalaženju radnog mjesta. Tako je ubrzo Laplace dobio mjesto profesora matematike na vojnoj školi. Prvi Laplaceovi matematički radovi bili su iz područja diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi te primjena u mehanici i fizikalnoj astronomiji. Tokom 1770-ih reputacija mu je stalno rasla, a Laplace je usavršavao svoje matematičke tehnike i sve se više usmjeravao prema dva područja na kojima će dati svoje najvažnije rezultate: teoriji vjerojatnosti i nebeskoj mehanici. Godine 1780. počeo je surađivati sa znamenitim kemičarem Lavoisierom[20], te se tako počeo baviti i teorijom topline. Zajedno su utvrdili kemijsku ekvivalenciju disanja i izgaranja drvenog ugljena. Kako mu je ugled rastao, tako su Laplaceu rasle i ambicije te je već 1771. pokušao biti izabran u Francusku Akademiju znanosti. Te je godine prednost dana Vandermondeu, a iduće Cousinu kojeg je Laplace smatrao bitno slabijim matematičarem od sebe te ga je to prilično naljutilo. 1773. godine Laplace je izabran za pridruženog člana Akademije, punopravan član postaje 1785. U doba pred Francusku revoluciju, Laplace je radio kao ispitivač pri Kraljevskom artiljerijskom odreduc i tu je 1785. godine ispitao i propustio šesnaestogodišnjeg Napoleona Bonapartea. Godine 1787. je dovršio dokaz stabilnosti Sunčeva sustava. Za vrijeme Revolucije, Laplace je 1790. bio član komisije za standardizaciju mjera koja je radila na uvođenju metričkog i decimalnog sustava. To je bila jedina komisija Akademije koja je smjela nastaviti rad i nakon što je strahovlada 1793. ukinula Akademiju. Ipak, ubrzo zatim su iz komisije izbačeni kako Laplace, tako i neki njeni drugi članovi (među inim Lavoisier i Coulomb). Naime, strahovlada je zahtijevala da članovi komisije budu zaslužni po „svojim republikanskim vrlinama i mržnji prema kraljevima". Iako je, za razliku od Lavoisiera i mnogih drugih kolega, uspio izbjeći sudbinu giljotineovo doba je bilo teško za Laplacea. Kad je skupa s Lagrangeom trebao konstruirati kalendar po želji revolucionarne vlade, iako je znao da su njihove ideje suprotne astronomskim podacima, odlučio je ne suprotstavljati se političkoj dogmi. Slično

[20]Antoine Lavoisier, (1743.–1794.), otac moderne kemije, prepoznao je i imenovao kisik i vodik, dao prvu verziju zakona sačuvanja masa i odbacio flogistonsku teoriju.

se konformistički složio s podjelom pravoga kuta na sto dijelova. Tokom 1795. Laplace je predavao (ne samo) teoriju vjerojatnosti na novoosnovanoj učiteljskoj školi *École Normale*. Kao osobna karakteristika Laplacea osobito je uočljiv njegov politički oportunizam, tako da je paralelno sa svojom znanstvenom karijerom uspio u burnim francuskim vremenima prijelaza 18. u 19. stoljeće održati se i na mnogim visokim pozicijama. Najpoznatije Laplaceovo djelo je *Traité de Mécanique Céleste* (1799–1825). Radi se u biti o upotpunjenju Newtonova djela *Philosophiae naturalis principia mathematica*. U *Mécanique Céleste* Laplace obrađuje opća pravila ravnoteže i kretanja krutih tijela, tekućina i plinova, zakon univerzalne gravitacije, kretanja centara gravitacije pojedinih tijela Sunčeva sustava, nebesku mehaniku, nastanak plime i oseke i drugo, a djelo sadrŹli i znamenitu Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za potencijal. U matematici *Mécanique Céleste* uočljiv je utjecaj dva velika Laplaceova suvremenika: Lagrangea i Legendrea. Iako jako značajno djelo, *Mécanique Céleste* je teška za čitanje, a mnogi su detalji neobjašnjeni. Tu se prvi put pojavljuje formulacija „Lako se vidi“ koja je kasnije postala popularna u matematičkim tekstovima, a Laplace ju je koristio na više mjesta gdje je bio uvjeren u točnost svojih rezultata, ali ih nije znao — ili htio — obrazložiti. Kako je Napoleonova moć rasla, Laplace se sve više odricao ranijih republikanskih načela. Kad je 1799. Napoleon postao prvi konzul, Laplace je postao ministar unutarnjih poslova, no za to se pokazao neprikladnim te je smijenjen već nakon šest tjedana. Napoleon je kasnije ironično komentirao, aludirajući na Laplaceove uspjehe u infinitezimalnom računu, da je Laplace „unio duh beskonačno malog u državnu upravu". Usprkos neuspjehu na mjestu ministra unutarnjih poslova, Laplace je dobio mjesto u Senatu. U predgovoru trećem dijelu *Méchanique céleste* Laplace piše da je od svih u tom djelu iznesenih istina, autoru tj. njemu, najvrednija njegova predanost mirotvorcu Europe. Tu je posvetu u kasnijim izdanjima, nakon što je Napoleon izgubio vlast, uklonio. 1805. godine dobiva orden Legije časti, a 1806. postaje plemić s titulom *Comte de l'Empire*. Kao senator, 1814. je glasovao za smjenu Napoleona i povratak dinastije Bourbona. Kako ju na to slijedilo znamenitih sto Napoleonovih dana, Laplace se našao u neugodnoj poziciji te je napustio Pariz do konačnog Napoleonova poraza. Nakon toga ostao je vjeran dinastiji Bourbona, ali nepopularan u političkim krugovima. 1817. godine kralj Louis XVIII imenovao ga je markizom. Svoje je zadnje političke prijatelje izgubio 1826., kada je odbio potpisati Akademijin dokument podrške slobodi novina. Unatoč izvanrednim znanstvenim rezultatima, Laplace se nije istaknuo u međuljudskim odnosima. S vremenom je postajao sve manje skroman oko svojih dostignuća i sve više je ignorirao druge ljude oko sebe. Tako je nakon posjeta Akademiji 1780. – 81. Lexell komentirao kako je Laplace dao do znanja da se smatra najboljim matematičarem u Francuskoj. Prema svojim dobročiniteljima iz mladosti i kasnijim političkim prijateljima ponašao se nezahvalno i s prezirom. Ipak, imao je nezavisan karakter i otvoreno iskazivao svoje mišljenje, a osobito potkraj života pokazao se i velikodušnim: u jednom je slučaju zadržao svoj rezultat od objavljivanja kako bi jedan njegov učenik mogao dobiti potpunu zaslugu za istraživanje [84].

Laplaceova *Théorie Analytique des Probabilités* sadrži sve klasične probleme vjerojatnosti i njihovu povijest, ali i proširenja mnogih starijih rezultata. Njeno drugo izdanje (1814.) je poznato po 153 strane dugom predgovoru, koji je postao poznat i bivao odvojeno tiskan kao *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Cilj mu je široj publici približiti vjerojatnosni račun. Značajan je i filozofski aspekt vjerojatnosti: Prema Laplaceu, slučajnost nije ništa drugo do naziv za događaje kojima još ne znamo objasniti uzrok. Za njega je svemir deterministički i inteligencija (**Laplaceov demon**) koja bi znala sve podatke o trenutnom stanju, mogla bi matematički opisati sva buduća stanja. Danas znamo da to

nije moguće, zbog temelja teorije kaosa i prirode fizikalnih mjerenja: Nijedno mjerenje nije sasvim egzaktno, a već male greške u početnim uvjetima mogu izazvati velike razlike u proračunatim efektima [11, 26, 104].

Prvi dio *Théorie Analytique des Probabilités* je posvećen matematičkoj analizi, a drugi započinje s prvi put suvremeno formuliranom **klasičnom definicijom vjerojatnosti**:

> Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ako ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi za nas jednako vjerojatni.

Laplace zatim dokazuje osnovna pravila računa vjerojatnosti. U *Théorie Analytique des Probabilités* nalazi se i **Bayesov teorem**, koji je ime dobio po **Thomas Bayesu** (1702.–1761.), koji se prvi bavio pitanjima uvjetne vjerojatnosti i formulirao varijantu tog teorema, kojeg danas iskazujemo ovako: Za događaje A i B vrijedi

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

U *Théorie Analytique des Probabilités* nalazimo i znameniti **Buffonov problem** iz geometrijske vjerojatnosti, nazvan po **Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon** (1707.–1788.), koji ga je prvi opisao 1777.:

> Ako u ravnini imamo mrežu paralelnih jednako razmaknutih pravaca, razmaka a, te ako na ravninu bacimo iglu duljine l, kolika je vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca?

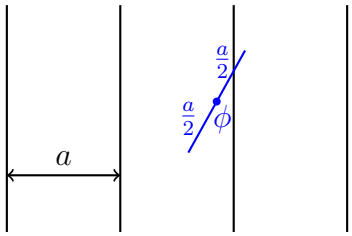
Rješenje ćemo opisati samo za slučaj $l = a$, ali slično se rješava i opći slučaj. Pogledajmo skicu na slici 11.6. Vidimo da će igla sjeći jedan pravac točno ako je $\frac{a}{2}\sin\phi < a$. Dakle, ako su kutovi ϕ uniformno distribuirani unutar $[0, \pi]$, tražena je vjerojatnost omjer površine ispod krivulje $y = \frac{1}{2}\sin\varphi$ između 0 i π te pravokutnika $[0, \pi] \times [0, \frac{1}{2}]$, tj.

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{2}{2}}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Laplace je primijetio da se ta formula može upotrijebiti za statističko-eksperimentalno računanje vrijednosti π.[21] Laplace je također, rekli smo to već, generalizirao de Moivreov centralni granični teorem na Bernoullijeve pokuse kod kojih je vjerojatnost uspjeha bilo koji $p \in [0, 1]$. U *Théorie Analytique des Probabilités* je Laplace također detaljno opisao metodu najmanjih kvadrata te dao i razne primjene vjerojatnosti na statistička pitanja [11, 26, 104].

No, izraz **statistika** se u to doba još uvijek koristio u starom, tradicionalnom smislu opisa općih činjenica, odnosno podataka, o nekoj državi. Moderni smisao tom izrazu dao je belgijski matematičar i astronom, utemeljitelj primjena statistike u društvenim znanostima, **Lambert Adolphe Jaques Quetelet** (1796.–1874.). Quetelet je primijetio da se u većim ljudskim populacijamama mnoge stvari pojavljuju s velikom pravilnošću i često s normalnom raspodjelom. Tako je uočio i da je godišnjih broj ubojstava u Francuskoj gotovo konstantan, te da su čak i omjeri brojeva upotrijebljenih ubojitih sredstava gotovo konstantni, što je otvorilo pitanje pitanje odnosa slobodne volje i društvenog determinizma?! Quetelet je razvio i statističke metode za analize raznih tipova podataka,

[21] Dosad najbolji tako ostvareni rezultat ostvario je Lazzerini 1901. s 3408 bacanja: 6 decimala.



Slika 11.6: Buffonov problem

a 1853. je organizirao prvi međunarodni statistički kongres. S druge strane, ako se ljudsko društvo može gledati kao cjelina i statistički analizirati, to je još prirodnije za molekule u plinovima. James Clerk Maxwell (1831.–1879.) i Ludwig Boltzmann (1844.–1906.) su tako oko 1860. utemeljili statističku termodinamiku [11, 26, 104].

Francuski fizičar i matematičar **Siméon-Denis Poisson** (1781.–1840.) je svom kratkom životu napisao je oko 300 matematičkih radova, posebno iz teoriji vjerojatnosti i matematičke fizike. Glavno vjerojatnosno djelo mu je *Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile* (1837.), u kojem daje Poissonovu distribuciju za opis vjerojatnosti da se neki slučajni događaj dogodi u određenom vremenskom (ili prostornom) intervalu ako je vjerojatnost da se dogodi mala, ali broj pokusa velik: Za $n \to \infty$ i $p \to 0$, ako uz to $pn \to \lambda$, je vjerojatnost k uspjeha u vremenoskom intervalu unaprijed definirane duljine, u kojem se prosječno dešava λ uspjeha, aproskimativno $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Od Poissona potječe i naziv „zakon velikih brojeva", a sam je dokazao dvije varijante tog zakona [11, 26, 104].

Sir Francis Galton (1822.–1911.), Darwinov rođak, utemeljitelj je regresijske analize. Bio je poznat po sklonosti skupljanju svakakvih podataka, od temeprature čaja do atraktivnosti žena. Utemeljio je *Anthropometric Laboratory*, u kojeg je svatko mogao doći mjeriti svoje fizičke karakteristike, a rezultati tih mjerenja su uvelike potvrdili Queteletove pretpostavke. Usporedbom promjera sjemenki dviju generacija jedne biljke dobio je korelacijski dijagram i otkrio vezu koju je prvo nazvao reverzijom, a kasnije **regresijom**: Medijan promjera potomaka većeg sjemenja bio je manji nego medijan promjera roditelja i obrnuto. U takve korelacijske dijagrame ucrtavao je pravce koji su najbolje opisivali trendove (usp. metodu najmanjih kvadrata), a njihove koeficijente smjera je uzimao kao indekse korelacije među dvjema varijablama (što je gotovo pa moderni koeficijent korelacije). Bio je uvjeren u sveprisutnost normalne razdiobe te je skupa s Amerikancem C. S. Peircem i Nijemcem W. Lexisom autor tog naziva. Poznatao je i Galtonovo pomagalo za vizualizaciju binomne razdiobe (Galtonova ploča – *quincunx*) [11, 92].

Otac modernog statističkog testiranja,[22] engleski matematičar Karl Pearson (1857.–1936.) je najzaslužniji za popularizaciju normalne razdiobe. Ipak, rekao je (1923.):

> Prije više godina nazvao sam Laplace-Gaußovu krivulju normalnom, no dok tim nazivom izbjegavamo međunarodno pitanje prvenstva, on ima manu, da navodi ljude na mišljenje da su drugačije razdiobe frekvencija na ovaj ili onaj način abnormalne.

Spomenimo ovdje i jednu anegdotu vezanu uz normalnu raspodjelu. Henri Poincaré je krajem 19. stoljeća sumnjao u svog pekara u Parizu. Bio je uvjeren da mu pekar

[22] U povijesti statistike Peorson je ostao zabilježen kao otac χ^2-testa te matematičkog utemeljenja koeficijenta korelacije.

namjerno prodaje kruh manje mase od deklariranih 1 kg. Stoga je Poincaré tijekom godinu dana svako jutro prvo prije jela izvagao kupljeni kruh. Ako ga pekar ne vara, očekivana raspodjela izmjerenih masa trebala je biti približno normalna, s maksimumom za 1 kg. Rezultat je bio da je raspodjela masa stvarno izgledala kao normalna, no najveći broj kruhova i prosjek njihovih masa bio je oko 0,95 kg, a ne 1 kg. Prema anegdoti, Poincaré je zaključio da ga pekar vara za oko 50 g dnevno te je pekara prijavio pariškim vlastima, koje su pekara oštro upozorile. Nakon toga je Poincaré htio provjeriti je li bilo koristi od upozorenja pa je nastavio vagati kruh. Nakon još godine dana dobio je raspodjelu uočljivo nagnutu udesno (većina kruhova imala je masu veću od prosjeka) te je zaključio da se pekar nije popravio, nego mu je sad namjerno davao što veće kruhove da ne bi opet bilo prigovora. Poincaré je ponovno uložio „prigovor potrošaća“, no nije poznato što je s njim dalje bilo. Što mislite, je li Poincaréov pristup bio smislen? Od Poincaréa potječe i poznati citat o normalnoj razdiobi: „Svatko je u nju toliko uvjeren, rekao mi je jednog dana gospodin Lippmann, jer eksperimentalci smatraju da se radi o matematičkom teoremu, a matematičari, da je eksperimentalno potvrđena činjenica.” [6, 11, 92].

Za kraj ovog kratkog izleta u povijest statistike spomenimo i poznatu priču o uvođenju studentove razdiobe. Englez William Sealy Gosset (1876.–1937.) studirao je kemiju i matematiku u Oxfordu, ali se 1899. zaposlio u pivovari *Guiness* u Dublinu. Tu se bavio raznim statističkim pitanjima i kontaktirao Pearsona (koji ga je i posjetio). Kako bi iz malih uzoraka mogao dobiti zaključke u svrhu kontrole kvalitete razvio je t-test, odnosno distribuciju koja je danas poznata kao studentova t-raspodjela. Razlog neobičnog imena bila je zabrana objavljivanja tvorničkih tajni, te je Gosset svoje rezultate objavio kao „student” [84].

Glavni problem s teorijom vjerojatnosti tijekom druge polovice 19. st. bila je cirkularnost klasične definicije vjerojatnosti (pretpostavka je da su sve mogućnosti jednako vjerojatne). Taj problem razriješio je 1933. ruski matematičar **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (1903.–1987.) aksiomatizicijom teorije vjerojatnosti [11, 26, 104].[23] Kolmogorovljevi aksiomi pisani su po uzoru na aksiome teorije mjere i teorije skupova. Nastanku teorije skupova i formalnim temeljima matematike posvećujemo zadnji odjeljak u ovoj skripti.

11.8 Temelji matematike: Teorija skupova i matematička logika

Već u antici su se idejom beskonačnosti bavili ne samo filozofi i teolozi, nego i matematičari (Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshaustije). Posebno, Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo potonju smatrao realno mogućom. U srednjem vijeku tom su se temom bavili npr. Toma Akvinski (13. st.) i T. Bradwardine (14. st.), koji je smatrao da su kontinuirane veličine sastavljene od beskonačno mnogo istovrsnih

[23]Kolmogorovljevi aksiomi vjerojatnosti u izvornoj verziji glase ovako: Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ familija podskupova od Ω (te podskupove Kolmogorov naziva slučajnim događajima). Ako je $\mathcal{F}$ „polje skupova“takvo da je $\Omega \in \mathcal{F}$, da postoji funkcija P, koja svakom $A \in \mathcal{F}$ pridružuje nenegativni broj $P(A)$, vjerojatnost događaja A, tako da vrijedi

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ za disjunktne $A, B \in \mathcal{F}$ i
- $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, wenn $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, $A_n \in \mathcal{F}$ za sve n i $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

onda je Ω s $\mathcal{F}$ i P prostor vjerojatnosti.

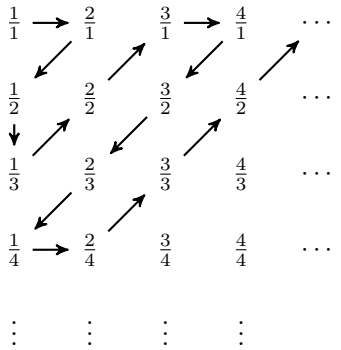
kontinuiranih veličina. Razlikovao je dva tipa beskonačnosti: katetičnu (odgovara našem pojmu transfinitnog, tj. onom što već otpočetka nedostaje ograničenost) i sinkatetičnu (odgovara našem pojmu infinitnog, tj. onom što iz konačnog nastaje neograničenim rastom). Spomenuli smo i prvu pojava osnovnog svojstva beskonačnih skupova, a to je da je beskonačan skup ekvipotentan nekom svom pravom podskupu, kod Galilea, koji je tako primijetio da za beskonačne veličine vrijede druga pravila nego za konačne, iz čega je vidljivo da prihvaća egzistenciju beskonačnih skupova. Ipak, do 19. st. mnogi će matematičari smatrati da beskonačni skupovi ne postoje ili, kao Bošković, paradoksima argumentirati nemogućnost beskonačnosti. Takve prividne paradokse, koji proizlaze iz krive pretpostavke da pravi podskup beskonačnog skupa ima manje elemenata od čitavog skupa, istraživao je na temelju više primjera već spomenuti češki matematičar **Bernhard Bolzano** (1781.–1848.). Tako je našao više primjera beskonačnih skupova s bijekcijom na neki pravi podskup, npr. $\langle 0, 1\rangle \sim \langle 0, 2\rangle$. Bolzanov tekst *Paradoxien des Unendlichen* objavljen je posthumno 1851., a u njemu se po prvi put pojavljuje pojam „skup" [1, 2, 11, 104].

No, pravi poticaj utemeljenju teorije skupova je došao vezano za preciziranje uvjeta konvergencije trigonometrijskih redova. Njima se u početku svoje karijere bavio njemački matematičar **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845.–1918.). Rođen u St. Petersburgu. Kad je imao 11 godina, obitelj se odselila u Njemačku. Studirao je matematiku u Zürichu i u Berlinu. U Berlinu su mu među profesorima bili Weierstraß i Kronecker. Doktorirao je 1867. s temom iz teorije brojeva. Isprva je radio u školi za djevojčice, a onda se 1869. zaposlio na sveučilištu u Halleu. Tu ga je za matematičku analizu zainteresirao **Heinrich Edouard Heine** (1821.–1881.), poznat po uvođenju pojma uniformne neprekidnosti funkcije, Heineovoj definiciji neprekidnosti funkcije i Heine-Borelovom teoremu (podskup $\mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen). U doba kad je Cantor došao u Halle bavio se pitanjem jedinstvenosti reprezentacije funkcije svojim Fourierovim redom. Cantor je tako provjeravajući razne uvjete tipa „konvergira do na ... skup" počeo razmatrati precizniji opis linearnog kontinuuma realnih brojeva. Cantor je 1870. definirao realne brojeve kao klase ekvivalencije Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva i dokazao bijekciju s točkama pravca. Pritom je definirao i mnoge topološke pojmove (okolina, gomilište skupa, ...). Tako se Cantor počeo pomalo detaljnije posvećivati skupu $\mathbb{R}$ i općenito beskonačnim skupovima. Naravno, potrebu preciznije definicije skupa realnih brojeva nije primijetio samo on. Godine 1872. sprijateljio se s **Richardom Dedekindom** (1831–1916), koji se također bavio definiranjem realnih brojeva. Od njega potječe moderna, precizna definicija kontinuuma $\mathbb{R}$ putem **Dedekindovih rezova**. Skup racionalnih brojeva je naravno lako definirati kao skup svih brojeva koji su kvocijenti dva cijela broja, a Dedekindovi rezovi (1872.) omogućuju preciznu definiciju iracionalnih brojeva kao rezova u skupu $\mathbb{Q}$. Rez u skupu racionalnih brojeva činei njegova particija na dva skupa A i B (dakle, $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$) pri čemu A nema najveći element, svi elementi od A su manji od svih elemenata u B ($\forall x \in A\ \forall y \in B$ $x < y$). Svaki takav rez definira po jedan iracionalan broj, primjerice $\sqrt{2}$ je broj definiran rezom $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ [1, 2, 11, 93, 96, 104].

Tijekom 1873. Cantor je dokazao ekvipotentnost skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Pritom je za definiciju ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) koristio svojstvo koje je očigledno za konačne skupove: Dva skupa su ekvipotentna (imaju jednako mnogo elemenata) ako postoji bijekcija s jednog na drugi. Primijetimo ovdje da je skup ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ako i samo ako ako se sve njegove elemente može poredati u niz.[24] Skupovi ekvipotentni s $\mathbb{N}$ nazivaju se **prebrojivim skupovima**, a njihov kardinalni broj označava se s $\aleph_0$ (alef-nula), pri čemu i naziv i oznaka potječu iz kasnijih Cantorovih tekstova. Iste godine Cantor je dokazao i prebrojivost skupa $\mathbb{Q}$. Naime, da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv može se dokazati pomoću dijagrama



iz kojeg se vidi da se svi pozitivni racionalni brojevi mogu poredati u niz. To je i dovoljno, jer $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$, a $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{Q}^-$ su očito ekvipotentni. Stoga, ako smo $\mathbb{Q}^+$ zapisali kao niz x_1, x_2, x_3, ..., onda se $\mathbb{Q}^-$ može zapsisati kao niz $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, ..., pa je i $\mathbb{Q}$, po analognom principu kao gore opisanom za $\mathbb{Z}$, u bijekciji s $\mathbb{N}$, dakle prebrojiv. Ove se ideje obično prepričavaju kao Hilbertov hotel, kojeg je David Hilbert opisao na jednom predavanju 1924., a priča je postala popularna 1947. knjigom G. Gamowa *One, Two, Three ... Infinity*). Cantor je 1873. dalje dokazao i da je skup svih algebarskih brojeva[25] prebrojiv [1, 6, 11, 96, 104].

Stoga je razumno pitanje:

Jesu li možda svi beskonačni skupovi prebrojivi?

Krajem 1873. Cantor je dokazao (a 1874. u *Crelle's Journal* objavio) da je odgovor na to pitanje *ne*, odnosno da postoje beskonačni skupovi s različitim brojevima elemenata. Cantor je naime dokazao:

Teorem 13 (Neprebrojivost skupa $\mathbb{R}$) *Skup $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan s $\mathbb{N}$.*

Taj dokaz smatra se utemeljenjem **teorije skupova**. Ubrzo su Cantorovi rezultati postali kontroverzni. Naime, tek 1844. je J. Liouville dokazao da transcendentni brojevi postoje, a 1873. je Hermite dokazao da je e transcentdentan. No, iz Cantorovog rezultata slijedi da iracionalnih brojeva ima neprebrojivo mnogo je ako je A prebrojiv podskup neprebrojivog skupa B (primjerice, $B = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{A}$ skup svih algebarskih brojeva), onda je $B \setminus A$ (ovdje: skup svih transcendentnih brojeva) neprebrojiv. Naime, ako bi on bio prebrojiv, onda bi $B = A \cup (B \setminus A)$ bio unija dva prebrojiva skupa, a to je — analogno kao u dokazu prebrojivosti skupa $\mathbb{Z}$ — prebrojiv skup pa bismo dobili kontradikciju. Kontroverznosti Cantorove „naivne“ teorije skupova doprinijeo je i njegov dokaz da su dužina, kvadrat i kocka ekvipotentni (1877.). Poznato je da ja sam pritom izjavio *Vidim, ali ne vjerujem!*.

[24] Podsjetimo se, nizovi su funkcije s domenom $\mathbb{N}$.

[25] Podsjećamo, realan broj je algebarski ako je rješenje neke polinomijalne jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima.

Taj dokaz, ako se prihvati, prirodno otvara pitanje ima li dimenzija onda smisla?[26] U članku 1877. Cantor je precizirao pojam ekvipotentnosti, dokazao da su prebrojivi skupovi (po broju elemenata) najmanji beskonačni skupovi i dr. Kontroverzi oko Cantorovih rezultata najviše je doprinijeo tadašnji izdavač *Crelle's Journal*-a, **Leopold Kronecker** (1823.–1891.). Posljednji spomenuti članak objavio je tek nakon intervencije Dedekinda i Weierstraßa. Glavni razlog Kroneckerovog protivljenja bilo je njegovo konstruktivističko uvjerenje, po kojem se priznaju samo dokazi postojanja nekog matematičkog objekta koji daju eksplicitni način konstrukcije tog objekta u konačno mnogo koraka.[27] Za razliku od toga, Cantorovi dokazi bili su nekonstruktivni (npr. dokazivo postoji neprebrojivo mnogo iracionalnih brojeva, ali se iz dokaza ne može eksplicitno dobiti niti jedan od njih). U razdoblju 1879.–1884. Cantor je u časopisu *Mathematische Annalen* objavio šest članaka s detaljnim opisom svoje teorije skupova. Tu je uveo i dobro uređene skupove, ordinalne brojeve i njihovu aritmetiku. Najmanji beskonačni ordinalni broj ω je broj koji opisuje $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem [1, 2, 11, 84, 96, 104].

Godine 1894. Cantor je doživio prvi napad depresije. Neki su ga pripisivali sukobu s Kroneckerom, no vjerojatnije je da je bio uzrokovan općim problemima u međuljudskim odnosima i matematičke brige, posebno neuspješni pokušaji dokaza **hipoteze kontinuuma**. Naime, kardinalni broj $\aleph_0$ skupa $\mathbb{N}$, je prema spomenutom članku iz 1877. najmanji beskonačni kardinalni broj, a prema članku iz 1874. kojim je utemeljena teorija skupova on je manji[28] od kardinalnog broja $\mathfrak{c}$ skupa $\mathbb{R}$. Razumno je pitanje postoji li koji kardinalni broj između ta dva. Cantor je postavio hipotezu kontinuuma da takvog nema, tj. da je najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$, u oznaci to je $\aleph_1$, jednak $\mathfrak{c}$. Budući da je uspio dokazati i da je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, hipoteza kontinuuma obično se zapisuje formulom

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

U to doba Cantor je imao poteškoća i s dobivanjem mjesta u Berlinu te su se napadi depresije počeliponavljati. Ipak, 1895.–97. objavio je dvodijelni pregled svoje teorije skupova s proširenjima. Najpoznatiji rezultat te druge Cantorove faze je [1, 2, 11, 84, 96, 104]:

Teorem 14 (Osnovni Cantorov teorem teorije skupova) *Svaki skup ima manje elemenata nego njegov partitivni skup.*

Dokaz je kratak i lagan. Neka je A neki skup i $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup, tj. skup svih podskupova od A. Funkcija $x \mapsto \{x\}$ je očito injekcija s A u $\mathcal{P}(A)$, dakle skup A nema više elemenata nego $\mathcal{P}(A)$. Pretpostavimo da postoji bijekcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Onda je f surjekcija. Neka je $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Očito je $M \in \mathcal{P}(A)$. Zbog surjektivnosti postoji $a \in A$ takav da je $f(a) = M$. Tada je ili $a \in M$ ili $a \notin M$. Ako $a \in M$, po definiciji skupa M vrijedi $a \notin f(a) = M$ i obrnuto, ako $a \notin M$, onda po definiciji skupa M slijedi $a \in M$. Dakle, u oba slučaja dobili smo kontradikciju te je dokazan osnovni teorem teorije skupova.

Trivijalna posljedica ovog teorema je da postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti: $\aleph_0$ je manji od kardinalnog broja a[29] od $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, koji je manji od

[26] To je razriješio 1912. otac moderne topologije, nizozemski matematičar Jan Brouwer (1881.–1966.). On je dokazao da između prostora različite (konačne) dimenzije doduše postoji bijekcija, ali ne i neprekidna, tj. neprekidnost omogućava razlikovanje dimenzije.

[27] U tom duhu je i poznati Kroneckerov citat *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* („Bog je stvorio cijele brojeve, a sve ostalo je djelo čovjeka").

[28] Kardinalni broj a skupa A je manji ili jednak kardinalnom broju b skupa B ako postoji injekcija s A u B. Ako je $a \leq b$ i $a \neq b$, onda je $a < b$.

[29] Zapravo je $a = \mathfrak{c}$.

kardinalnog broja b od $B = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, koji je manji od kardinalnog broja c od $C = \mathcal{B}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, ... Tehnika dokaza osnovnog teorema teorije skupova poznata je pod nazivom **dijagonalni argument**, posebno kad se koristi njezina varijanta za dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva. Naime, dok prvi Cantorov dokaz neprebrojivosti $\mathbb{R}$ koristi drugačiju tehniku, 1891. dao je novi dokaz koji je danas uobičajen dokaz te tvrdnje [1, 2, 11, 84, 96, 104].

Dokaz teorema 13 koristeći dijagonalni argument. Dokazujemo ekvipotentnost $\mathbb{R}$ i $\langle 0, 1\rangle$.[30] Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\langle 0, 1$ prebrojiv. Onda se svi brojevi iz $\langle 0, 1\rangle$ mogu nabrojati kao niz $(x_n)_n$. Neka su svi članovi tog niza dani u svom decimalnom zapisu (taj je jedinstven ako zahtijevamo beskonačno mnogo nenul znamenki). Primjerice:

$$x_1 = 0{,}\underline{7}528752\ldots$$

$$x_2 = 0{,}5\underline{0}38567\ldots$$

$$x_3 = 0{,}11\underline{9}3453\ldots$$

$$x_4 = 0{,}255\underline{3}602\ldots$$

$$\vdots$$

Konstruiramo broj $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots \in \langle 0, 1\rangle$, za koji je $a_i = 9$ uvijek osim ako je i-ta znamenka od x_i jednaka 9, u kom slučaju uzimamo $a_i = 8$ (gore: $x = 0{,}9989\ldots$). Tada je x_0 očito u $\langle 0, 1\rangle$, ali nije u nizu jer se od svakog člana niza razlikuje u bar po jednoj znamenci, dakle smo dobili kontradikciju s pretpostavkom.

1890-ih godina Cantor se pokušao pomiriti s Kroneckerom te ga je pozvao na prvi sastanak *Deutsche Mathematische Vereinigung* 1891. Kronecker nije mogao doći na taj sastanak zbog smrti supruge, a ubrzo zatim je i sam umro. Godine 1896. Cantoru je umrla majka, a 1899. mlađi brat i najmlađi sin. S vremenom su se napadi depresije sve češće pojavljivali i počeo se sve ekscentričnije ponašati. Tako je u svojim „mračnim" fazama bio skloniji baviti se filozofijom i teorijom da je Roger Bacon napisao Shakespeareove drame, nego matematikom. Objavio je i radove o toj teoriji, a kad je 1911. kao ugledan znanstvenik bio pozvan na 500. obljetnicu sveučilišta St. Andrews u Škotskoj govorio je uglavnom o teoriji Shakespeare-Bacon. Nakon što je u razdoblju 1900.–1910. često zbog boravaka u sanatorijima bio odsutan s posla, povukao se u mirovinu 1913. Posljednje godine života proveo je slabo ishranjen zbog ratnih uvjeta, a umro je od srčanog udaru u sanatoriju u Halleu 1918. [1, 2, 11, 84, 96, 104].

Giuseppe Peano je prvi koji je eksplicitno spomenuo korištenje tvrdnje poznate pod nazivom **aksiom izbora**, koju je implicitno već ranije koristio Cantor: Za bilo kakvu familiju[31] međusobno disjunktnih skupova postoji skup koji sa svakim skupom te familije ima točno po jedan zajednički element. Peano je također uveo simbol $\in$ za „je element skupa" te znakove $\cap$ i $\cup$ za presjek i uniju skupova (1888./9.). S druge strane, u Cantorovo doba već je bila utemeljena matematička logika, za što su najzaslužniji Englezi De Morgan i Boole. **Augustus De Morgan** (1806.–1871.) je rođen u Indiji jer mu je otac tamo bio oficir. Od djetinjstva je bio slijep na desno oko. Od 1828. bio je profesor na *University College* u London, a kasnije suosnivač i prvi predsjednik *British Mathematical Society*. Posebno je poznato njegovo djelo *Formal logic; or, the calculus of inference* (1847.) u kom je pokušao razviti simboličku logiku unutar klasične silogističke logike. On nije

[30] Interval $\langle 0, 1\rangle$ je ekvipotentan s $\mathbb{R}$, bijekcija je primjerice $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$.

[31] Uobičajen termin kad se govori o skupu čiji elementi su skupovi je da je to familija skupova.

razvio algebru logike, nego „samo" simboličku reprezentaciju logike. De Morganove zakone također je formulirao, ali su bili poznati još William of Ockhamu u srednjem vijeku. De Morgan je također je također prvi koji je dao naziv **matematičkoj indukciji** i detaljno ju opisao 1838., no sama metoda bila je poznata već ranije. **George Boole** (1815.–1864.) je do na osnovnu školu bio je autodidakt, ali je svejedno s 19 godina uspio otvoriti školu u Lincolnu, a kasnije 1849. postati profesor matematike na *Queens College* u Corku (Irska). Supruga mu je bila nećakinja Sir George Everesta po kom je nazvan Mt. Everest. Imali su 5 kćeri, od kojih je jedna (također bez formalnog matematičkog obrazovanja) klasificirala pravilne poliedre u četverodimenzionalnom prostoru. Ne temeljima engleske logičke tradicije i tadašnjih rasprava svojim *The Mathematical Analysis of Logic* (1847.) i *An Investigation in the Laws of Thought* (1854.) utemeljio je logičku algebru. Cilj mu je bio algebarske oznake odvojiti od njihove numeričke interpretacije pa je ovo i velik doprinos apstraktizaciji algebre. Kod njega xy znači rezultat odabira x iz neke klase a, pa y iz x, univerzum je označavao s 1, klasu bez objekata s 0, $x + y$ je rezultat odabira iz dviju disjunktnih klasa, a $1 - x$ je komplement od x. Dao je i osnovna pravila takve algebre, npr. $xx = x$. Njih koristi u daljnjim dokazima, npr. dokaz isključenja kontadikcije se izvodi iz $xx = x$: $xx = x$ povlači $x - xx = 0$ što povlači $x(1 - x) = 0$ [2, 11, 104].

Na Svjetskom matematičkom kongresu u Parizu 1900.[32] Hilbert je formulirao 23 problema, za koje je smatrao da su najvažniji neriješeni matematički problemi toga doba, a prvi od njih je bilo pitanje hipoteze kontinuuma. Hilbert 1920. je formulirao Hilbertov program, koji je u osnovi istraživanje korektnosti osnova matematike: zahtijeva potpunu formalizaciju matematike i uvodi ideju metamatematike koja služi opravdanju same matematike. Na prijelazu 19. u 20. stoljeće otkriveno je i nekoliko paradoksalnih rezultata koji proizlaze iz Cantorove naivne teorije skupova. Najpoznatiji među njima su **Burali-Fortijev paradoks** (klasa svih ordinalnih brojeva nije skup, 1897.), **Cantorov paradoks** (klasa svih skupova nije skup, 1899.) i **Russellov paradoks** ($A = \{x : x \notin x\}$ nije skup, 1902.). Tako se postavilo pitanje je li možda ipak Kronecker bio u pravu? No, u to doba teorija skupova već je imala velike posljedice na druge matematičke discipline (npr. postala je temelj teorije mjere) te ju se nije moglo jednostavno odbaciti. Stoga su se matematičari počeli baviti pitanjem kako spriječiti paradokse. Prva ideja je bila da možda potječu od aksioma izbora.[33] **Ernst Zermelo** (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su su pokazali da je aksiom izbora ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti. **Bertrand Russell** (1872.–1970.) je s Alfred North Whiteheadom (1861–1947) izdao *Principia Mathematica* (prvo izdanje 1910.) s ciljem svođenja čitave matematike na logiku, no ni to nije pomoglo. Rješenje je, naravno, aksiomatizacija teorije skupova. Prvi prijedlog aksioma teorije skupova dao je 1908. Zermelo. Taj prvi sustav aksioma doradili su drugi matematičari sve dok 1922. nije dobiven danas uobičajeni sustav aksioma (poznat kao **Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova**). On s jedne strane onemogućuje pojavu paradoksâ, a s druge strane omogućuje korištenje svih Cantorovih rezultata teorije skupova. Tom sustavu se danas u pravilu kao aksiom dodaje aksiom izbora za kojega je 1940. **Kurt Gödel** (1906.–1978.) dokazao da se ne može opovrgnuti koristeći ostale aksiome teorije skupova, a 1963. je Paul Cohen pokazao da je aksiom izbora nezavisan od ostalih aksioma teorije skupova. Za kraj napomenimo da i hipotezu kontinuuma nije moguće ni dokazati ni opovrgnuti koristeći Zermelo-Fraenkelov sustav aksioma (bilo sa bilo bez aksioma izbora). Završavamo

[32] Zapravo ih je na kongresu naveo deset i onda kasnije dopunio popis. Neki su i danas nerazriješeni.

[33] Iz aksioma izbora primjerice slijedi paradoks Banacha i Tarskog: Kugla se može rastaviti na konačno mnogo dijelova iz kojih se mogu sastaviti dvije kugle jednakog volumena.

ovo putovanje kroz povijest matematike s neostvarivošću Hilbertovog programa. Ona je posljedica Gödelovih teorema nepotpunosti (1931.).[34] [2, 1, 11, 40, 96, 104]

„Iz raja kojeg nam je stvorio Cantor neće nas nitko moći istjerati" (D. Hilbert)
„Bit matematike je u njezinoj slobodi" (G. Cantor)



Potpuna modernizacija matematike ...

desila se tijekom 19. i početkom 20. stoljeća. C. F. Gauß i neovisno od njega J.-R. Argand su početkom 19. st. dali prve dokaze osnovnog teorema algebre i prve opise kompleksne ravnine (iako ju je zapravo prvi osmislio C. Wessel 1799.). Radovima Gaußa i njegovih studenata J. B. Listinga te F. Möbiusa počela se razvijati i geometrijska topologija. (nezavršeno!!!)

[34]Prvi teorem nepotpunosti u osnovi tvrdi u svakom aksiomatskom sustavu koji sadrži bar Peanovu aritmetiku postoji formula koja se ne može ni dokazati ni opovrgnuti, a drugi teorem nepotpunosti kaže da se konzistentnost Peanove aritmetike ne može dokazati unutar nje same.

Bibliografija

[1] Aczel, A. D., *Die Natur der Unendlichkeit*. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2002.

[2] Anglin, W. S., Lambek, J., *The Heritage of Thales*. Springer Verlag, New York, 1995.

[3] Arač, I., *Girolamo Cardano*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2022. https://dabar.srce.hr/object/pmf:11107

[4] Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-Zvi, R., *Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics*. For the learning ofmathematics, 3(1) 30—37, 1982. https://flm-journal.org/Articles/6FAFDB941F710C1E323C3DBE0C9B85.pdf

[5] Bagni, G. T., *Infinite series from history to mathematics education*. Coleccioón Digital Eudoxus, 2009. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8024217

[6] Bellos, A., *Alex's Adventures in Numberland*. Bloomsbury Publishing, London, 2010.

[7] Borić, M., *Getaldić, Descartes i analitička geometrija*. Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine, 38(2) (2012.) 167–196. https://hrcak.srce.hr/97798

[8] Brückler, F. M., *Matematički dvoboji*. Školska knjiga, Zagreb, 2011.

[9] Brückler, F. M. *Matematički božićni poklon s posljedicama*. Hrvatska revija, 3 (2012) 86–90

[10] Brückler, F. M., *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.

[11] Brückler, F. M., *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.

[12] Brückler, F. M., *Marin Getaldić, matematički demon*. Dubrovnik (Matica hrvatska) 29 (2018) 61–69

[13] Brückler, F. M., *π prije nego se za njega znalo*. Osječki matematički list 21(2) (2021.) 151–161. https://hrcak.srce.hr/clanak/394554

[14] Brückler, F. M., *Điudžang suanšu – Devet poglavlja umijeća računanja*. Osječki matematički list 22(1) (2022.) 91–105. https://hrcak.srce.hr/clanak/403998

[15] Brückler, F. M., *Nekoliko povijesnih dokaza Pitagorinog poučka*. Osječki matematički list 22(2) (2022.) 171–183. https://hrcak.srce.hr/clanak/423031

[16] Brückler, F. M., *Kratka povijest prijateljskih brojeva*. Osječki matematički list 23(1) (2023.) 73–81. https://hrcak.srce.hr/clanak/448028

[17] Brückler, F. M., *Helena geometrijska iliti cikloida*. Osječki matematički list 24(1) (2024.) 75–86. https://hrcak.srce.hr/file/465551

[18] Brückler, F. M., *Eudoksova metoda iscrpljivanja*. Osječki matematički list 24(2) (2024.) 133–146. https://hrcak.srce.hr/clanak/492045

[19] Brückler, F. M., *Broj π od Al-Hvarizmija do danas*. Osječki matematički list 25(1) (2025.) 77–88. https://hrcak.srce.hr/clanak/492946

[20] Brückler, F.M., *Kratka povijest redova*. Osječki matematički list 25(2) (2025.) 179–196. https://hrcak.srce.hr/clanak/497361

[21] Brückler, F. M., Stilinović, V.. *Teaching arithmetic in the Habsburg Empire at the end of the 18th century – A textbook example*. Historia Mathematica 40(3) (2013) 309–323. https://doi.org/10.1016/j.hm.2013.03.002

[22] Brückler, F. M., Stilinović, V., *An early appearance of nondecimal notation in secondary education*. The Mathematical Intelligencer 42 (2020) 50–54. 10.1007/s00283-019-09960-1

[23] Brückler, F. M., Stilinović, V., *The Tradition of Large Integers in Historical Arithmetical Textbooks*. The Mathematics Enthusiast 21(1) (2024) 54–70. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1617

[24] Brückler, F. M., Stilinović, V., *From Friezes to Quasicrystals: A History of Symmetry Groups*. U: Bharath Sriraman (ur.), Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice, 1823–1863. Springer, 2025.

[25] Brückler, F. M., Stilinović, V., *Mackay's Triangles: A Forgotten Independent Discovery of an Aperiodic Tiling*. The Mathematical Intelligencer 48 (2026) ??–??. https://link.springer.com/article/10.1007/

[26] Burton, D. M., *The History of Mathematics: An Introduction* (6th Ed.). McGraw-Hill, 2006.

[27] Bütüner, S. Ö., Baki, A., *The use of history of mathematics in the mathematics classroom: An action study*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 8(2) (2020) 92-–117. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1255535.pdf

[28] Cajori, F., *A History of Mathematical Notations*. Dover publications, 1993.

[29] Cammann, S., *The Evolution of Magic Squares in China*. Journal of the American Oriental Society 80(2) (1960) 116–124. https://doi.org/10.2307/595587

[30] Chace, A. B., Manning, H. P., Archibald, R. C. (ur.), *The Rhind Mathematical Papyrus*. Mathematical Association of America, 1927.

[31] Chrisomalis, S., *The Comparative History of Numerical Notation*. PhD thesis, McGill Univ., 2003. https://escholarship.mcgill.ca/downloads/8w32r774p.pdf

[32] Clark, K. M., *Logarithms: The Early History of a Familiar Function*. MAA, 2010. https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function

[33] Crossley, J. N., Henry, A. S., *Thus spake al-Khwarizmi: A translation of the text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5*. Historia Mathematica 17(2) (1990) 103–131. https://doi.org/10.1016/0315-0860(90)90048-I.

[34] Dejić, M., Mihajlović, A. M., *History of Mathematics and Teaching Mathematics*. Teaching Innovations 27(3) (2014) 15–30. 10.5937/inovacije1403015D

[35] Doz, D., *Using the History of Mathematics as a Motivational Factor in Teaching Math*. 2021. https://doi.org/10.46793/NNU21.471D

[36] Ebrahim, A., *The Prehistoric Origins of Mathematics*. 2023. https://mathscitech.org/articles/mathematics-prehistory

[37] Erleblebici, İ, Brückler, F. M., *Dva velika matematičara 18. stoljeća: Bošković i Gelenbevî*. Osječki matematički list 26(1) (2026) 39–53. https://hrcak.srce.hr/344802

[38] Erlichson, H., *Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time*. Eur. J. Phys. 20 (1999) 299–304. https://mecheng.iisc.ac.in/suresh/me256/GalileoBP.pdf

[39] Ernest, P., *The History of Mathematics in the Classroom*. Mathematics in School 27(4) (1998) 25–31. https://www.jstor.org/stable/30211871

[40] Eschenburg, J.-K., *Sternstunden der Mathematik*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.

[41] Euler, L., *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne, 1748. https://archive.org/details/bub_gb_jQ1bAAAAQAAJ/page/n5/mode/2up

[42] Faustmann, G., *Classroom experiences with the history of mathematics*. Proceedings of the History and Pedagogy of mathematics, 275—285, 2010. https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF11026.pdf

[43] Fauvel, J., *Using History in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics 11(2) (1991) 3–6. https://www.jstor.org/stable/40248010

[44] Felscher, W., *Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta*. The American Mathematical Monthly 107(9) (2000) 844–862. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ma1/jirkavesely/Felscher.pdf

[45] Fernández, J., *Reflexions on Leibniz' Proof of the Fundamental Theorem of Calculus*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405

[46] Ferzola, A. P., Kung, S. H., *Euler and Differentials*. The College Mathematics Journal, 25(2) (1994) 102–111. https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973590

[47] Friberg, J., *A remarkable collection of Babylonean mathematical texts*. Notices of the AMS 55(9) (2008) 1076–1086. https://www.ams.org/notices/200809/tx080901076p.pdf

[48] Furinghetti, F., *Teacher education through the history of mathematics*. Educational Studies in Mathematics 66(2) (2007) 131–143. https://www.researchgate.net/publication/227242260_2007_-_Teacher_education_through_the_history_of_mathematics

[49] González-Velasco, E. A., *Journey through Mathematics*. Springer, New York, 2011.

[50] Gorroochurn, P., *Some Laws and Problems of Classical Probability and How Cardano Anticipated Them*. Chance 25(4) (2012) 13–20. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09332480.2012.752279

[51] Göktepe, S., Özdemir, A. S., *An example of using history of mathematics in classes*. European Journal of Science and Mathematics Education 1(3) (2013) 125–136. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1108226.pdf

[52] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. I*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[53] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. II*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[54] Heiede, T., *Why teach history of mathematics?*. The Mathematical Gazette 76(475) (1992) 151–157. http://jnsilva.ludicum.org/Sherlock/whyHM.pdf

[55] Hobson, E.W., *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614*. Cambridge Univ. Press, 1914.

[56] Høyrup, J., *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* . Springer, 2002.

[57] Hughes, B. B., *Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi's al-jabr*. Mediaeval studies 48 (1986) 211–263, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:163292644

[58] Imhausen, A. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. The Mathematical Intelligencer 28, 19–27 (2006). https://doi.org/10.1007/BF02986998

[59] Kahr, B., *Et Tu, Crystallographer? Murder Charges Against Close-Packing Pioneers Evaluated*. Crystal Growth & Design 11(1) (2011) 4-11. 10.1021/cg101301y

[60] Karpinski, L. C., *The Algebra of Abu Kamil*. The American Mathematical Monthly 21(2) (1914) 37–48. https://www.jstor.org/stable/2972073

[61] Karpinski, L. C., *Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. Macmillan, New York, 1915.

[62] Karpinski, L. C., *The History of Arithmetic*. Rand McNally & Company, Chicago & New York, 1925.

[63] Konforowitsch, A. G., *Guten Tag, Herr Archimedes*. Verlag Harri Deutsch, 1996.

[64] Lam, L. Y., *Zhang Qiujian Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujian). An Overview*. Archive for History of Exact Sciences 50 (1997) 201-–240. https://www.jstor.org/stable/41134109

[65] La Nave, F., Mazur, B., *Reading Bombelli*. The Mathematical Intelligencer 24 (2002) 12–21. https://link.springer.com/article/10.1007/BF03025306

[66] Lerman, S. (ur.), *The Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, 2020.

[67] Letson, B., Schwartz, M., *The Regiomontanus Problem*. Mathematics Magazine 90(4) (2017) 259–266. https://www.jstor.org/stable/10.4169/math.mag.90.4.259

[68] Lim, Y. S., Chapman, E., *Effects of using history as a tool to teach mathematicson students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms*. Educational Studies in Mathematics 90(2) (2015) 189–212. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-015-9620-4

[69] Liu, P. H., *Connecting Research to Teaching: Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?*. The Mathematics Teacher 96(6) (2003) 416–421. https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/96/6/article-p416.xml

[70] Medić, D., *Povijest brojeva i njihove notacije*. Diplomski rad, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

[71] Nahin, P. J., *An Imaginary Tale - the Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

[72] Nauenberg, M., *Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of calculus*. 2011. https://arxiv.org/abs/1111.6145

[73] Neugebauer, O., *Mathematische Keilschrift-Texte*. Springer-Verlag, 1972.

[74] Newton, I. (ur. Colson, J.), *The method of fluxions and infinite series; with its application to the geometry of curve-lines*. London, 1736.

[75] Özdemir, A. S., Göktepe, S., Kepçeoğlu, I. *Using mathematics history tostrengthen geometric proof skills*. Procedia-Social and Behavioral Sciences 46 (2012) 1177–1181. https://openaccess.marmara.edu.tr/bitstreams/827a9bcf-06a1-43c1-9492-648c52fc0737/download

[76] Panagiotou, E. N., *Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms*. Sci. & Educ. 20 (2011) 1–35. 10.1007/s11191-010-9276-5

[77] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into Curriculum: What are the Chances and Constraints?*. International Electronic Journal of Mathematics Education 7(1) (2012) 3–20. https://www.iejme.com/download/integrating-history-of-mathematics-into-curriculum-what-are-the-chances-and-consti pdf

[78] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?*. Journal of Curriculum and Teaching 2(2) (2013) 37–46. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1157766.pdf

[79] Pazwash, H., Mavrigian, G., *The Contributions of Karaji—Successor to al-Khwarizmi*. The Mathematics Teacher 79(7) (1986) 538–541. https://www.jstor.org/stable/27965055

[80] Przytycki, J. H., *History of Knot Theory*. 2007. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0703096

[81] Reynolds, B. E., *The Algorists vs. the Abacists: An Ancient Controversy on the Use of Calculators*. The College Mathematics Journal, 24(3) (1993) 218—223. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973531

[82] Roegel, D., *Napier's ideal construction of the logarithms*. 2012. https://locomat.loria.fr/napier/napier1619construction.pdf

[83] Schell-Gelasch, A. (ur.), *Hands on History, A Resource for Teaching Mathematics*. The Mathematical Association of America, 2007.https://maa.org/wp-content/uploads/2024/10/NTE72.pdf

[84] School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, *MacTutor History of Mathematics Archives*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ (zadnji pristup: lipanj 2026.)

[85] Schrader, D. V., *The arithmetic of the medieval universities*. Math. Teach. 60 (1967) 264–278. https://doi.org/10.5951/MT.60.3.0264

[86] Siadat, M. V., Tholen, A., *Omar Khayyam: Geometric Algebra and Cubic Equations*. Math. Horizons 28(1) (2020) 12–15. 10.1080/10724117.2020.1770495

[87] Siu, M. K., *Concept of function - its history and teaching*. U: Learn from the masters!, Kristiansand 1988 (Math. Assoc. America, Washington DC, 1995), 105–121.

[88] Shen, K., Crossley, J. N., Wah-Cheung Lun, A., Liu, H., *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford Univ. Press, 1999.

[89] Smith, D.E., Karpinski, L.C., *The Hindu-Arabic Numerals*, 2007. https://www.gutenberg.org/files/22599/22599-h/22599-h.htm (pristupljeno 11.4.2025.)

[90] Şahin, Ö., Danaci, D., *Investigating the effect of history-of-mathematicsactivities on middle-grade students' mental computation and opinions: an action research*. International Journal of Mathematical Education in Science andTechnology, 1–38, 2020. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1857859

[91] Songa, S., Song, J., *A Note on the History of the Gambler's Ruin Problem*. Communications for Statistical Applications and Methods 20(2) (2013) 157–168. http://dx.doi.org/10.5351/CSAM.2013.20.2.157

[92] Stahl, S., *The evolution of the normal distribution*. Math. Magazine 79(2) (2006) 96–113. https://doi.org/10.2307/27642916

[93] Stilwell, J., *Mathematics and its history*. Springer Verlag, 2001.

[94] Struik, D. J. (ur.), *A source book in mathematics, 1200–1800*. Princeton Univ. Press, 1986.

[95] Šikić, Z., *Kako je stvarana novovjeka matematika*. Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[96] Tait, W., *Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory*. 2001. https://www.researchgate.net/publication/2411389_Cantor's_Grundlagen_and_the_Paradoxes_of_Set_Theory

[97] Tinsley, A. C., *Nicole Oresme and the Revival of Medieval Mathematics*. Mathematical Association of America, 2023. (pristupljeno 15. 1. 2026.)

[98] Tropfke, J., *Geschichte der Elementar-Mathematik, Erster Band: Rechnen*. Berlin & Leipzig: Walter de Gruyter & Co., 1921.

[99] Van Brummelen, G., *The mathematics of the heavens and the earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press, 2009.

[100] Van Der Waerden, B. L., *A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1985.

[101] Walicki, M., *The history of mathematical logic (vastly abbreviated and horribly simplified)*. 1997. http://citeseerx.ist.psu.edu/index

[102] Winterrink, J., *The Apollonius Tangency Problem*. Pi Mu Epsilon Journal 6(10) (1979) 582–592. https://www.jstor.org/stable/24337480

[103] Wußing, H., *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer, Leipzig, 2008.

[104] Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise 2. Von Euler bis zur Gegenwart. Springer, Berlin (2009)

[105] Youschkevitch, A. P., *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Archive for History of Exact Sciences 16(1) (1976) 37–85. https://link.springer.com/article/10.1007/BF00348305

Kazalo

+, 96
−, 96
:, 131
< i >, 106
=, 106
$\aleph_0$, 176
·, 131
$\dot{x}$, 129
∈, 178
∞, 127
∫, 131, 134
$\int_a^b$, 168
dx, 131, 132
ω, 177
π, 127, 172
π, 8, 11, 46, 53, 56, 61, 67, 68, 74, 122, 132, 146, 148
$\sqrt{2}$, 175
×, 110
ζ-funkcija, 165
Ćin Điušao, 70
Ṯābit ibn Kurra, 81, 82
Elementi, 16
Almagest, 61, 85, 91
Devet poglavlja umijeća računanja, 67–69
Elementi, 15, 17, 27, 34, 38, 84, 91, 106, 116, 122
Flos, 92
I Čing, 65
I-Ching, 131
La Géométrie, 121, 122
Palimpsest, 52
Pascaline, 116, 131
mouseion, 38, 47, 59
prosthaphaeresis, 107
quadrivium, 16, 89
quipu, 1
četverokut, Lambertov, 146
četverokut, Saccherijev, 145
žetoni, 1
Abū al-Vafā Būzdžānī, 82
Abū Kāmil, 82
Abū Kāmil Šujā, 81
abacisti, 90
abakus, 64, 66, 90
abdžad, 78
Abel, Niels Henrik, 162, 168
Abu Kamil Šuja, 92
Adelard iz Batha, 91
adicijski teorem, 62
Akademija, 23, 32, 89
aksiom, 38, 39
aksiom o paralelama, 157
aksiom izbora, 178, 179
aksiom, Arhimedov, 34, 35, 53
aksiom, Playfairov, 156
aksiomi teorije skupova, Zermelo-Fraenkelovi, 179
al-Batānī, 82
Al-Hayṭam, 83
Al-Hvārizmī, 78–80, 82, 90, 91, 98
Al-Hvarizmi, 92
Al-Hwārizmī, 84
Al-Kāšī, 86
al-Kāšī, 86
Al-Kaši, 105
al-Karadžī, 82, 84
al-Ma'mun, 77
al-Mahani, 119
al-Tūsī, Nasīr, 85
al-Tusi, Nasir, 116
al-Tusi, Nasir al-Din, 145
Al-Uklidisi, 78, 105
Albategnius, 82
Alberti, Leone, 97
Aleksandar Makedonski, 23, 33, 72
Aleksandar Veliki, 35, 38
Aleksandrija, 38
alfabet, grčki, 15
algebra, 7, 11, 79, 81, 82, 84, 92, 96–98, 102, 105, 122

algebra, linearna, 157
algebra, logička, 179
algorism, 79, 90
algoristi, 90
algoritam, 79
algoritam, Euklidov, 20, 45, 46
algoritam, Fibonaccijev, 6
algoritam, Hornerov, 70
Alhazen, 83, 146
Alhazenov problem, 116
Alkuin iz Yorka, 90
Almagest, 78
Anaksagora iz Klazomena, 26
analitička geometrija, 49
analiza, kompleksna, 168
Antifont, 26, 34
antiprizma, 104
Apolonije iz Perge, 35, 48, 78, 83, 119
Apolonijev problem, 51
Argand, Jean-Robert, 151, 152
Arhimed iz Sirakuze, 34, 35, 52–57, 59, 69, 78, 104, 105, 119
Arhimedov teorem o krugu, 53
Arhimes iz Sirakuze, 55
Arhita iz Tarenta, 30, 34
Aristarh sa Samosa, 59
Aristotel, 1, 17, 23, 33, 38, 174
aritmetika, 4, 10, 16, 17, 73, 78, 89
aritmetika, teorijska, 16
aritmetika, u Egiptu, 4
Aryabhata I., 73

Bürgi, Joost, 110
Bachet, Claude Gaspar, 113
Barrow, Isaac, 128, 129
Barrowljev diferencijalni trokut, 128
Baselski problem, 139
Bayes, Thomas, 172
Bayesov teorem, 172
Bellavitis, Giusto, 157
Beltrami, Eugenio, 156
Berkeley, George, 133
Bernoulli, Daniel, 137, 143
Bernoulli, Jacob, 55, 117, 122, 134, 139, 142, 170
Bernoulli, Johann, 133, 134, 137, 139
beskonačnost, 147, 175
Bhaskara I., 83
Bhaskara II., 75, 76
bijekciju, 103
Binet, Jaques, 158
binomna raspodjela, 115
Bošković, Josip Ruđer, 175
Bošković, Ruđer Josip, 63, 146
Boethius, Anicius Manlius Severinus, 16, 89
Boltzmann, Ludwig, 173
Bolyai, Farkas, 155
Bolyai, J'anos, 155
Bolyai, János, 156
Bolzano, Bernard, 167
Bolzano, Bernhard, 133
Bombelli, Rafael, 100, 102
Borel, Émile, 179
Bradwardina, Thomas, 174
Brahe, Tycho, 82, 103, 107
Brahmagupta, 74, 75, 92
Briggs, Henry, 109
broj, 1, 19
broj, euklidski, 122
broj, Fermatov, 114
broj, Fibonaccijev, 91
broj, iracionalan, 19, 20, 106, 138, 146–148
broj, iracionalni, 72
broj, kompleksan, 100, 102, 123, 141, 151–153, 158
broj, Mersenneov, 114
broj, negativan, 66, 74, 82, 92, 102, 106
broj, neparan, 17
broj, paran, 17
broj, prirodan, 4
broj, prost, 45, 47, 114, 147, 165
broj, racionalan, 92
broj, realan, 106
broj, realni, 102
broj, savršen, 17, 81, 83, 114, 147
broj, složen, 45
broj, Tabitov, 82
broj, transcendentan, 148, 176
broj, transcendentnost, 146
broj, trokutasti, 131
brojevi, figurativni, 17
brojevi, prijateljski, 17, 81, 114, 147
brojevni sustav, akrofonski, 15, 23
brojevni sustav, alfabetski, 60
brojevni sustav, atički, 15, 23
brojevni sustav, babilonski, 9, 10

brojevni sustav, binarni, 131
brojevni sustav, dekadski, 3, 9, 15, 23
brojevni sustav, dekadski pozicijski, 66, 73, 78, 79, 86, 90, 91
brojevni sustav, egipatski, 3
brojevni sustav, grčki, 23
brojevni sustav, pozicijski, 9
brojevni sustav, rimski, 64, 89
brojevni sustav, seksagezimalni, 9, 10
brojka, 1, 3
brojka, arapska, 78
brojka, indoarapska, 96
brojke, štapičaste, 66
brojke, akrofonske, 23
brojke, alfabetske, 78
brojke, brahmanske, 72
brojke, glagoljske, 23
brojke, grčke, 15
brojke, grčke alfabetske, 23
brojke, hijeratske, 4
brojke, hijeroglifske, 3
brojke, indoarapske, 78, 90, 91
brojke, klinaste, 9
brojke, miletske, 23
brojke, rimske, 91
Brunelleschi, Filippo, 97
brzina, 129
Buffonov problem, 172

Cantor, Georg, 178
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 175
Cardano, Girolamo, 99–103, 115, 123
Cauchy, Augustin Louis, 144, 152, 162, 164
Cauchy, Augustin-Louis, 133, 158, 161, 162, 167, 168
Cavalieri, Bonaventura Francesco, 125–127, 132
Cavalierijev princip, 126
Cayley, Arthur, 153, 154, 158, 164
centralni granični teorem, 172
Chevalier de Méré, 115
Chuquet, Nicholas, 96, 107
cikloida, 134
Comfte de Buffon, Georges Louis Leclerc, 172
Cotes, Roger, 139
Cramer, Gabriel, 158
Crelle's Journal, 162

d'Alembert, Jean, 170
D'Alembert, Jean Le Rond, 146
D'Alembert, Jean le Rond, 143, 167
d'Alembert, Jean le Rond, 140
d'Oresme, Nicole, 107, 119
Dürer, Albrecht, 97
Džang Heng, 68
da Vinci, Leonardo, 97
de Fermat, Pierre, 82, 113–116, 119, 124, 129, 142
de Moivre, Abraham, 141
De Morgan, Augustus, 154, 179
de Roberval, Gilles Personne, 126, 157
decimalna točka, 108
Dedekind, Richard, 147, 175, 177
Dedekindov rez, 175
dedukcija, 32, 33, 38
definicija, 38
del Ferro, Scipione, 98
della Francesca, Pierro, 97
Demokrit iz Abdere, 23
derivacija, 128, 129, 141, 167
Desargues, Girard, 118, 119
Descartes, Réné, 82, 114, 115, 117
Descartes, René, 45, 82, 121, 122, 124, 144
Descartes, René, 121
Descartesa, René, 123
Descartesova poliedarska formula, 144
Descartesovo pravilo, 123
Descartesovo pravilo predznaka, 123
determinanta, 123, 157, 158
diferencijal, 132, 140
diferencijalni račun, 134
dijagonalni argument, 178
dimenzija, 159
Diofant Aleksandrijski, 60, 63, 78, 92, 113
Diogenes Laertius, 16
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 168
diskriminanta kubne jednadžbe, 102
Dobro uređen skup je skup s relacijom parcijalnog uređaja koja je potpuna (svaka dva elementa su usporediva) i takva da ne postoji beskonačan padajući niz. Primjerice, $\mathbb{N}$ s uobičajenim uređajem jest dobro uređen, ali $\mathbb{Z}$ nije., 177

dokaz, 33
Dzia Sian, 116

e, 131, 138
Egipat, 3
egipatski zapis razlomka, 6, 53, 64
egipatskih zapis razlomka, 60
ekstremi, 115
ekvipotentnost, 175, 176
elipsa, 49, 51
Eratosten, 25
Eratosten iz Kirene, 47, 48
Eratosten iz Sirakuze, 52
Erlangenski program, 157
Eudoks iz Knida, 53
Eudoks s Knida, 33–35, 38, 44
Euklid, 78, 81
Euklid Aleksandrijski, 38, 39, 42, 51
Euklidov algoritam, 21
Euler, Leonhard, 17, 53, 82, 83, 114, 137–140, 144, 147, 159
Eulerov broj, 138
Eulerov produkt, 147
Eulerova φ-funkcija, 147
Eulerova formula, 139
Eulerova karakteristika, 153
Eulerova poliedarska formula, 144

Fermat, Pierre de, 103, 114
Fermatov zakon optike, 115
Ferrari, Lodovico, 99–101
Fibonacci, 6, 81, 91, 92, 96, 108
Fior, Antonio, 98
fluens, 129
fluksija, 129, 133
forma, kvadratna, 158
formula, Brahmaguptina, 74
formula, de Moivreova, 141
formula, Heronova, 62
formula, Stirlingova, 141
formula, trapezna, 9
formule, Viètеove, 159
Fourier, Jean Baptiste Joseph, 168
Frobenius, Ferdinand Georg, 158
funkcija, 93, 134, 139, 166–168, 170
funkcija, algebarska, 139
funkcija, Cauchyjeva, 167
funkcija, Dirichletova, 168
funkcija, eksponencijalna, 138
funkcija, hiperbolna, 134
funkcija, neprekidna, 139, 167
funkcija, neprkeidna, 168
funkcija, transcendentna, 139
funkcija, Weierstraßova, 169

Gödel, Kurt, 179
Galilei, Galileo, 102, 103, 114, 115, 124, 125, 149, 175
Galileo Galilei, 82
Galois, Évariste, 162–164
Galton, sir Francis, 173
Gauß, Carl Friedrich, 45
Gauß, Carf Friedrich, 148, 152
Gauß, Carl Friedrich, 44, 145, 148, 149, 152, 155–158, 169
Gaußova metoda eliminacija, 68, 149
Geber Hispalensis, 95
geometrija, 7, 11, 16, 18, 72, 82
geometrija, analitička, 93, 114, 119, 121, 157
geometrija, diferencijalna, 152
geometrija, hiperboličn, 146
geometrija, hiperbolična, 155, 156
geometrija, nacrtna, 152
geometrija, projektivna, 118, 119
geometrija, sferna, 39, 59–61, 82, 146
geometrijska algebra, 18, 23–25, 35, 49
Gerard iz Cremone, 91
Gerbert iz Aurillaca, 90
Germain, Sophie, 165
Getaldić, Marin, 119
Gibbs, Josiah Willard, 159
Girard, Albert, 123
Goldbach, Christian, 144
Goldbachova hipoteza, 144
gomilište, 175
Gosset, William Sealy, 174
graf, 144, 153
graf funkcije, 93
granična vrijednost, 167
Grassmann, Hermann Günter, 159
Gregory, James, 132, 134
grupa, 157, 161, 162, 164
grupa permutacija, 164
grupa simetrija, 164
grupa, Galoisova, 164
Gunter, Edmund, 110
Gunterov Ĺˇtap, 110

gusto pakiranje kugli, 104
Guthrie, Francis, 154

Hajjam, Omar, 84, 92, 98, 145
Hamilton, Sir William Rowan, 158
Hamilton, sir William Rowan, 158
Hamilton, William Rowan, 153
Harriot, Thomas, 106, 123, 146
Harun al-Rašid, 77
Heine, Heinrich Edouard, 175
helenizam, 38
helenizam, postklasični, 59
Hermite, Charles, 146
Heron iz Aleksandrije, 62
Heron Aleksandrijski, 12, 60
Heronova metoda, 12, 68, 74
Hilbert, David, 176, 179
Hilbertov hotel, 176
Hiparh iz Nicehe, 60
Hiparh iz Niceje, 59, 61
Hipasus iz Metaponta, 19, 20
hiperbola, 35, 36, 49, 51
Hipija iz Elide, 29
Hipokrat s Hiosa, 27–29, 38, 46, 57
hipoteta kontinuuma, 179
hipoteza kontinuuma, 177
hipoteza, Poincaréova, 154
hipoteza, Riemannova, 165
Hoecke, Giel Vander, 96
Huygens, Christiaan, 83, 116, 117, 124, 131, 134, 142, 156

imaginarna jedinica, 138
indukcija, 33
indukcija, matematička, 81, 82, 179
infinitezimalni račun, 23, 34, 104, 126–129, 131, 132, 134, 140, 141
integracija, parcijalna, 132
integral, 24, 128–130, 132, 134, 169
integral, nepravi, 126
interpolacija, 74, 134
interpolacija, linearna, 108
iracionalnost, 20, 46
iracionalnost, kvadratna, 92
iterativna metoda, 12, 68
Ivan iz Palerma, 92

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 158, 162
Jamblih, 81
Jang Hui, 116
jednadžba, 7, 11, 24, 79, 105
jednadžba 4. stupnja, 97
jednadžba, 4. stupnja, 101
jednadžba, algebarska, 159, 164
jednadžba, diferencijalna, 130, 134, 140, 141
jednadžba, diofantska, 63, 71, 75, 81, 83, 92
jednadžba, kubna, 26, 70, 84, 92, 98–100, 102, 106, 160
jednadžba, kvadratna, 11, 79, 80
jednadžba, Laplaceova, 171
jednadžba, linearna, 7, 25, 67, 79
jednadžba, Pellova, 53, 75
jednadžba, reducirana kubna, 98, 100
Jordan, Marie Ennemond Camille, 153, 164

karakteristika, 109
Karlo Veliki, 89
Kartezijev list, 122
kategorički sud, 33
Kepler, Johannes, 19, 57, 82, 103, 104, 106, 110, 124, 125
Keplerov problem bačve, 104
Keplerova hipoteza, 104, 106
Keplerovi zakoni, 104
Khayyam, Omar, 84, 85, 116
kineski teorem o ostacima, 70
Kirchhoff, Gustav, 153
Klaudije Ptolemej, 61, 62, 73, 78, 102
Klein, Felix, 156
koeficijent, 105
koeficijent korelacije, 173
kombinacija, 76, 117
kombinatorika, 76, 117
kompleksna ravnina, 151
kongruencija, 148
konike, 35, 48, 49, 63, 83, 84, 119, 147
konstrukcije ravnalom i šestarom, 24, 32, 39, 122, 152
konstruktivizam, 177
kontinuum, 23, 147
kontinuum realnih brojeva, 147, 175
kontradikcija, 33
konvergencija, 23, 132
koordinate, polarne, 55
Kopernik, Nikola, 82
korijen, drugi, 96
korjenovanje, 12, 68, 69, 74, 84–86, 96

kosekans, 82
kosinus, 74, 82, 138
kosisti, 97
kost iz Išanga, 1
kost iz Lebomba, 1
kotangens, 82
kriterij konvergencije reda, Leibnizov, 132
krivulja, 129
krivulja, algebarska, 122
krivulja, Gaußova, 149
krivulja, transcendentna, 122
Kronecker, Leopold, 177
kružnica, 51
kružnice, Apolonijeve, 51
krug, 8, 69, 72
Kuća mudrosti, 77, 78, 81
kugla, 54
kut, pravi, 39
kvadrat, magični, 113
kvadratisa, 29
kvadratna iracionalnost, 46
kvadratne iracionalnosti, 34
kvadratura odsječka parabole, 55
kvaternion, 158
kvaternioni, 164

L'Hôpital, François Antoine Marquis de, 134
L'Hôpital, Guillaume FranĂ§ois Antoine, Marquis de, 123
Lagrange, Joseph Louis, 161
Lagrange, Joseph-Louis, 83, 159, 160, 166, 171
Lambert, Johann Heinrich, 134, 145, 146
lančanica, 134
Laplace, Pierre-Simon, 148, 158, 170–172
Laplaceov demon, 171
Laplaceov razvoj, 123
Legendre, Adrien-Marie, 144, 148, 149, 162, 164, 165, 171
Legenre, Adrien-Marie, 162
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 53, 122, 123, 126, 129, 131–134, 157
Leibniz, sir Isaac, 134
Leonardo da Vinci, 157
Leonardo iz Pise, 6, 81, 91, 92, 96
limes, 26, 34, 140, 167, 169
Liouville, Joseph, 176
Listing, Johann Benedict, 152
Liu Hui, 69
Lobačevski, Nikolaj Ivanovič, 156, 168
logaritam, 106–109, 138
logaritam, Bürgijev, 110
logaritam, Briggsov, 109
logaritam, dekadski, 109
logaritam, Napierov, 108, 109
logaritam, prirodni, 131
logaritmar, 110
logika, 33, 91, 131, 178
logika, matematička, 33, 131
logistika, 16
Lucas, Édouard, 91

Möbius, August Ferdinand, 153, 157
Möbiusova traka, 153
Mādhava, 132
Maclaurin, Colin, 134, 158
magični kvadrat, 81, 97
Mahavira, 73
mali Fermatov teorem, 159
mantisa, 109
matematička analiza, 23, 138, 139, 169
matematička fizika, 93, 147
matematička logika, 178
matematika, 33
matematika, numerička, 12, 74
matrica, 68, 158
Maxwell, James Clerk, 173
Menehmo, 35, 48
Menelaj Aleksandrijski, 60
Menelaj iz Aleksandrije, 78
Mengoli, Pietro, 139
Mercator, Nicolaus, 131
Mersenne, Marin, 113, 114
metoda ekshaustije, 34, 46, 53–56, 104, 126, 174
metoda fluksija, 129, 130, 134
metoda najmanjih kvadrata, 147, 148, 172
metoda nedjeljivih veličina, 126
metoda, Heronova, 12, 62, 69, 75
mezolabij, 48
milijun, 96
mirijada, 23, 52
mjesec, 27
mjesec, Hipokratov, 27, 28, 83
mnogokut, 19
mnogokut, pravilni, 19, 44

mnogostrukost, Riemannova, 169
Monge, Gaspard, 152
monom, 82

Napier, John, 107, 109
Napierove kosti, 108
Nave, Hannibal, 98
nepoznanica, 7, 79, 92
Newton, sir Isaac, 53, 55, 122, 128–134, 141, 171
Newtonova metoda, 74
Newtonova metoda tangente, 86
nezavisnost, linearna, 159
Nikomah iz Geraze, 17, 81, 89
niz, 176
niz, Fibonaccijev, 91
normalna raspodjela, 173
notacija, 63, 102
nula, 9, 10, 60, 66, 73, 74, 106
numeriÄŤka matematika, 69, 70
numerička matematika, 68, 70, 86

očekivanje, 117
omjer, 34
omjer zlatnog reza, 20, 21, 42, 97
omjer, trostruki, 47
optimizacija, 62, 95, 104
Oresme, Nicole d', 93, 96
osnovni teorem algebre, 105, 123, 139, 152, 159
osnovni teorem aritmetike, 45, 148
osnovni teorem infinitezimalnog računa, 128, 132, 135
osnovni teorem teorije skupova, 177
Oughtred, William, 110
Ovu tvrdnju o vanjskom kutu trokuta znali su još pitagorejci., 29

Pacioli, Luca, 97
papirus, Moskovski, 3, 4, 7, 8
papirus, Rhindov, 3, 4, 6–8
Papos Aleksandrijski, 147
Papus Aleksandrijski, 29, 57
Papus iz Aleksandrije, 63
Papusov problem, 121
parabola, 35, 49, 50, 55
parabole, 36
paradoks Banacha i Tarskog, 179
paradoks, Burali-Fortijev, 179
paradoks, Cantorov, 179
paradoks, Russellov, 179
paradoksi, Zenonovi, 23
Pascal, Étienne, 116
Pascal, Blaise, 103, 115–117, 131, 142
Pascalov karakteristični trokut, 126, 128, 132
Pascalov trokut, 83, 84, 106, 116
Pascalova oklada, 117
Peano, Giuseppe, 159, 178
Pearson, Karl, 173
Pell, John, 75
permutacija, 65, 76, 117, 161, 164
perspektiva, 97, 118
peti Euklidov postulat, 39
Pitagora sa Samosa, 16, 19
pitagorejci, 8, 16–20, 30, 33, 38, 81, 89, 114
pitagorejske trojke, 72
Pitagorin pouÄŤak, 67, 72
Pitagorin poučak, 7, 17, 18, 27, 81
Platon, 23, 29, 30, 32, 33, 35
platonizam, 32
Platonova tijela, 32
Playfair, John, 156
Plimpton 322, 12, 59
ploha, Riemannova, 153
Poincaré, Jules Henri, 154, 170
Poincaré, Henri, 173
Poisson, Siméon-Denis, 118, 173
poliedar, 19, 104
poliedar, pravilni, 19, 32, 47
poliedar, zvjezdasti, 104
poliedri, polupravilni, 57
polinom, 82, 106
popločavanje, pravilno, 19
postulat, 38, 39
postulat Lobačevskog, 156
postulat o paralelama, 39, 61, 83, 84, 145–147, 155, 156
potenciranje, 107
poučak o kosinusima, 86
poučak, kosinusov, 42
poučak, Pitagorin, 12, 17, 61, 62, 169
poučak, Talesov, 62
pravci, paralelni, 39
pravilo, Cramerovo, 123, 158
pravilo, L'Hôpitalovo, 134

princip homogenosti, 25, 84, 98, 105, 119, 121
princip poluge, 53, 54
problem bodova, 115
problem brahistohrone, 134
problem duplikacije kocke, 25
problem kocaka, 115
problem kockareve propasti, 142
problem kvadrature kruga, 25–28
problem mostova u gradu Königsbergu, 144
problem trisekcije kuta, 25, 28, 30, 57, 102
problem udvostručenja kocke, 25, 29, 30, 35, 36, 48
problem, delijski, 25
problem, Heronov, 62
problem, Regiomontanusov, 95
problemi, Hilbertovi, 179
produkt, Eulerov, 165
program, Hilbertov, 179, 180
projekcija, stereografska, 59
Proklo, 15–17, 35, 61, 156
proporcionala, srednja, 44
proporcionalnost, 34, 67
prostor, Riemannov, 169
prostor, vektorski, 159
pseudosfera, 156
Ptolemej Aleksandrijski, 86

Quetelet, Lambert Adolphe Jaques, 172

raÄŤunanje, 10
račun pogreške, 103, 139, 147, 149
račun, varijacijski, 140
računanje, 1, 4
računarstvo, 131
racionalnost, 46
raspodjela, binomna, 116, 117
razdioba, binomna, 142
razdioba, normalna, 142, 173, 174
razdioba, Poissonova, 173
razdioba, studentova, 174
razlomak, 4, 5, 19, 60, 91, 92
razlomak, decimalni, 78, 105
razlomak, jedinični, 5, 60
razlomci, decimalni, 86
razmjer, 34
Recorde, Robert, 106
red, 23, 93, 130, 131, 139, 147
red potencija, 130–132, 134, 166, 167
red, binomni, 130, 138
red, geometrijski, 23, 56, 93, 131, 140
red, Gregory-Madhavin, 132
red, harmonijski, 94
red, Leibnizov, 132
red, Mercatorov, 131
red, Taylor, 132
red, Taylorov, 134
red, trigonometrijski, 168, 175
Regiomontanus, Johann Müller, 95, 96
regresija, 173
relativno prosti brojevi, 45
res-census terminologija, 92
res-census-terminologija, 96, 97
Riccati, Vincenzo, 134
Riemann, Bernhard, 153, 169
rješenja u radikalima, 100
rješenje jednadžbe u radikalima, 159, 160, 164
rješenje u radikalima, 98, 99, 162
Robert iz Chestera, 74, 91
rovaš, 1
Rudolff, Christoff, 96
Rudolff, Christoph, 96
Ruffini, Paolo, 161
rukopis Bakhshali, 73, 74
Russell, Bertrand, 179

Saccheri, Girolamo, 145
Schreiber, Heinrich, 96
sedam milenijskih problema, 165
sekans, 82
Seki, Takakazu, 157
Seki, Takakazu Shinsuke, 123
silogizam, 33
simbol, Legendreov, 148
simbolika, 95–97, 102, 105, 106, 121, 129, 131, 132, 134
simetrija, 164
sinus, 60, 73, 74, 82, 108, 138
skolastika, 91
skup, 175
skup realnih brojeva, 175, 178
skup, beskonačan, 103, 175
skup, neprebrojiv, 176
skup, prebrojiv, 176
sličnost, 44
spirala, Arhimedova, 54, 55, 114

spirala, Fermatova, 114, 122
spirala, logaritamska, 122
spirala, Teodorova, 30
sredina, aritmetička, 139, 149
srednje geometrijske propoercionale, 34
srednje geometrijske proporcionale, 29, 30, 35, 48
St. Petersburški paradoks, 143
stablo, 153
statistika, 172
Stevin, Simon, 86, 104, 108, 157
Stifel, Michael, 106–108, 110, 116
Stirling, James, 142
stomahion, 52
Suiseth, Richard, 93
sulbasutre, 72
sumjerljivost, 19–21, 34, 46
sumjerljivost, kvadratna, 46
Sun Dzi, 70
sustav linearnih jednadžbi, 68, 123, 149
sustav, koordinatni, 121
Sylevester, James Joseph, 158
Sylvester, James Joseph, 6, 153, 154

t-test, 174
tablice tetiva, 59
Tales iz Mileta, 16, 33
Talesov poučak, 16
tangens, 82
tangenta, 115, 124, 125, 128, 132
Tartaglia, Niccolò Fontana, 98, 99
tautologija, 33
Taylor, Brook, 134
težišište, 53
Teetet Atenski, 30, 32, 34
Teetet iz Atene, 38
Teodor iz Kirene, 30
Teon iz Smirne, 25
teorem o četiri boje, 154
teorem o prostim brojevim, 148
teorem srednje vrijednosti, 166, 167
teorem, binomni, 83, 86, 117, 161
teorem, Bolzano-Weierstraßov, 169
teorem, Brahmaguptin, 74
teorem, Cayley-Hamiltonov, 158
teorem, Cayleyev, 164
teorem, centralni granični, 142
teorem, Desargues, 119
teorem, Euklidov, 45
teorem, Eulerov, 147
teorem, Fibonaccijev, 6
teorem, Kroneckerov, 17
teorem, mali Fermatov, 114, 147
teorem, Menelajev, 60
teorem, mertonski, 93
teorem, Papusov, 63
teorem, Pascalov o mističnom heksagramu, 118
teorem, Ptolemejev, 62
teorem, Tābitov o prijateljskim brojevima, 81
teorem, Talesov, 12
teorem, veliki Fermatov, 113, 114, 147
teorem, Wilsonov, 83
teorija brojeva, 16, 45, 70, 72, 81, 83, 113, 114, 147, 148, 165
teorija brojeva, analitička, 147
teorija grafova, 144, 153
teorija omjera i razmjera, 34
teorija skupova, 103, 147, 176, 177
teorija uzlova, 152
teorija vjerojatnosti, 116
tetiva, 73
tetive, 59–62, 73
Thabit ibn Kurra, 114
tijela, Arhimedova, 57
tijela, Platonova, 103
tijelo, Arhimedovo, 97, 104
tijelo, Platonovo, 97
točka, 39
točka, stacionarna, 104
topologija, 143, 152–154, 169, 175
topologija, geometrijska, 152, 153
Torricelli, Evangelista, 126, 128
Torricellijeva truba, 126
traktrisa, 156
tri klasična problema, 25, 27, 122
trigonometrija, 12, 59, 60, 73, 82, 85, 86, 95, 107, 108
trigonometrija, sferna, 60, 82
trisektrisa, 29, 30
trojka, pitagorejska, 7, 12, 17
trojno pravilo, 67
trokut, sferni, 60, 146

Ulug-beg, 86

uzao, 152

van Ceulen, Ludolph, 86
van Roomen, Adriaan, 51
van Roomen, Adrian, 106
van Schooten, Frans, 116
Vandermonde, Alexandre-Théophile, 158, 159
varijacija, 65
varijacijski račun, 134
vektor, 105, 158
vektor, geometrijski, 157
veliki Fermatov teorem, 165
Viète, François, 51
Vièteove formule, 105
Viète, François, 105, 106, 123
vjerojatnost, 103, 115–118, 141, 142, 171
vjerojatnost, uvjetna, 172
von Lindemann, Ferdinand, 122, 146

Wallis, John, 127, 130, 145, 151
Weierstraß, Karl, 133, 152, 168, 177
Wessel, Caspar, 151
Wiles, Andrew, 165
Wilson, John, 83

YBC 7289, 12

zadatak 100 ptica, 70
zadatak sto ptica, 81, 90, 91
zajednička mjera, 20
zakon kvadratnog reciprociteta, 147, 148
zakon velikih brojeva, 173
zakon velikih brojeva, Bernoullijev, 118
zakoni klasične logike, 33
Zenon iz Eleje, 23
Zenonovi paradoksi, 174
Zermelo, Ernst, 179
zlatni rez, 20, 21, 91
znanstvena notacija, 109