Financijsko modeliranje

Vanja Wagner

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
E-mail adresa: wagner@math.hr

Sadržaj

Ovo su materijali za kolegij Financijsko modeliranje, bazirani na skripti prof.dr.sc. Zorana Vondračeka iz kolegija *Financijsko modeliranje 1* i *Financijsko modeliranje 2*. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molimo da na njih ukažu putem maila. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja.

Posljednja izmjena napravljena je 12. studenoga 2025.

POGLAVLJE 0

Uvod

0.1. Cilj kolegija

Osnovni cilj kolegija je uvesti jednostavne modele financijskog tržišta u diskretnom i neprekidnom vremenu, te objasniti vjerojatnosne metode za precizan matematički opis i razumijevanje tih modela. Kolegij je podijeljen u 3 glavna dijela:

(i) **Dinamički (diskretni) modeli financijskih tržišta**
Opisujemo općeniti višeperiodni model financijskog tržišta (u kojem se promatra evolucija tržišta u konačno mnogo vremenskih trenutaka). Uvodimo osnovne pojmove: financijska imovina, portfelj, arbitraža, nearbitražna cijena, martingalna mjera, potpunost tržišta. Dokazujemo fundamentalne teoreme financijskih tržišta koji daju vezu između arbitraže/potpunosti i martingalne mjere. Promatramo izvedene vrijednosnice, te određivanje nearbitražne cijene i pripadnog replicirajućeg portfelja. Promatramo osnovni višeperiodni model financijskih tržišta zvan Cox-Ross-Rubinsteinov model. Podsjećamo se teorije (diskretnih) supermartingala, uvodimo vremena zaustavljanja i Snellov omotač slučajnog procesa, specijalno Markovljevog lanca. Primjenjujemo matematičku teoriju na problem određivanja nearbitražnih cijena američkih opcija u CRR modelu.

(ii) **Brownovo gibanje i Itôv račun**
Definiramo Brownovo gibanje i promatramo njegova osnovna svojstva. Uvodimo pojam Itôvog integrala, prvo za jednostavne, zatim za opće integrande. Uvodimo pojam Itôvog procesa i dokazujemo Itôvu formulu. Osnovni primjer je geometrijsko Brownovo gibanje.

(iii) **Black-Scholesov model**
Uvodimo model preko odgovarajuće stohastičke diferencijalne jednadžbe za kretanje cijene dionice. Promatramo parcijalne diferencijalne jednadžbe u BSM modelu. Dokazujemo Girsanovljev teorem (o promjeni vjerojatnosti), te analiziramo potpunost modela preko teorema o reprezentaciji martingala. Određivanje cijena i zaštita (hedging) europskih i egzotičnih izvedenica u BSM modelu.

Predavanja prate skriptu Z.Vondraček: *Financijsko modeliranje.* Osnovnu literaturu za kolegij čine sljedeće publikacije:

- W. A. Baxter, A. Rennie, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapmann & Hall, 1996.
- M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
- S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, 1997.

- S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, 2004.

0.2. Osnovni elementi financijskog tržišta

Financijska tržišta općenito su kompleksna, no mi ćemo usklopu ovog kolegija promatrati osnovi model koji se u načelu sastoji od dvije vrste financijskih imovina – rizične i nerizične.

Kao **rizičnu imovinu** uzet ćemo dionicu, obzirom da njena cijena neprestano fluktuira, uglavnom na nepredvidiv način. Stoga ulaganje u dionice u sebi nosi rizik.

Pod **nerizičnom imovinom** smatrat ćemo financijski instrument koji donosi siguran, predvidiv povrat. To je najjednostavnije modelirati novcem u banci (npr. na štednoj knjižici) uloženim uz fiksnu kamatnu stopu.

Zašto investitori ulažu u rizičnu imovinu? Zato što očekuju veći povrat nego kod nerizične imovine, te su stoga spremni preuzeti rizik.

Osim dionica i novca u banci, promatrat ćemo i **opcije**, odnosno izvedene vrijednosne papire (izvedenice, engl. derivative securities, derivatives). Otkud ime izvedeni vrijednosni papiri? Zato što je njihova vrijednost, odn. cijena, izvedena iz vrijednosnice na koju su napisani. Na primjer, vrijednost opcije na dionicu izvedena je iz vrijednosti dionice (što ne znači da ne ovisi i o drugim faktorima).

Što je u stvari opcija? Opcija je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti ili prodati neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) po unaprijed dogovorenoj cijeni. Osnovno svojstvo opcije je da vlasnik opcije **ne** mora kupiti (odn. prodati) imovinu. U ugovoru sudjeluju dvije strane – prodavatelj (pisac) opcije, t.j. osoba koja izdaje opciju, te kupac opcije, t.j. osoba koja postaje vlasnik opcije.

Uobičajeniji **ugovor** između dvije strane je tzv. *forward* ugovor. Po tom ugovoru se jedna od strana obavezuje prodati (ili kupiti) od druge strane neku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. U ovom slučaju stranka je obavezna na prodaju (ili kupnju) i ne može odustati od ugovora. Dakle, za razliku od opcije, kod forwarda ne postoji opcija odustajanja.

Primjer 0.2.1. Cijena jedne dionice Kraša KRAS na dan 29.9.2022. iznosila je $S_0 = 690.00$ Kn.
Call opcija (*opcija poziva*) s *danom dospijeća* 29.12.2022. (engl. *maturity*) i *cijenom izvršenja* $K = 695.00$ Kn (engl. *strike price, exercise price*) je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na kupnju (od pisca opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 29.12.2022. po cijeni od $K = 695.00$ Kn.
Put opcija (*opcija ponude*) s *danom dospijeća* 29.12.2022. i *cijenom izvršenja* $K = 695.00$ Kn je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na prodaju (piscu opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 29.12.2022. po cijeni od $K = 695.00$ Kn. Neka je S_T cijena jedne dionice Kraša na dan dospijeća 29.12.2022.
Pozicija kupca (odn. vlasnika) call opcije na dan dospijeća 29.12.2022.

- ako je cijena $S_T > K = 695.00$, na primjer, $S_T = 705.00$ Kn, vlasnik opcije će iskoristit svoje pravo i kupiti (od pisca) jednu dionicu Kraša za 695.00 Kn, te je istog trenutka prodati na tržištu za tržišnu cijenu od $S_T = 705.00$ Kn. Na taj način će kupac ostvariti profit od $S_T - K = 705.00 - 695.00 = 10.00$ Kn.

- ako je cijena $S_T \le K = 695.00$ Kn, na primjer, $S_T = 685.00$ Kn, vlasnik opcije ne koristi svoje pravo, jer na tržištu dionicu može kupiti jeftinije od cijene dospijeća.
- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $\max(S_T - K, 0) = \max(10, 0)$.

Pozicija pisca call opcije na dan dospijeća 29.12.2022. je suprotna od kupčeve:

- ako je cijena $S_T > K = 695.00$, na primjer, $S_T = 705.00$ Kn, pisac opcije mora prodati dionicu Kraša za $K = 695.00$ kn, dok je tržišna vrijednost $S_T = 705.00$ Kn, te prema tome gubi 10.00 Kn.
- ako je cijena $S_T \le K = 695.00$ Kn, kupac ne koristi ugovor, te pisac ne gubi ništa.
- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $-\max(S_T - K, 0) = -\max(10, 0)$.

Zaključak: budući da vlasnik opcije može samo dobiti ugovorom, a pisac opcije samo izgubiti, jasno je da pisac mora od kupca tražiti premiju za pravo koje opcija daje. Ta premija je cijena opcije koju kupac mora platiti piscu na dan izdavanja opcije.
Osnovno pitanje: kolika je pravedna (racionalna) cijena opcije?

0.3. Osnovne ideje određivanja cijene opcija

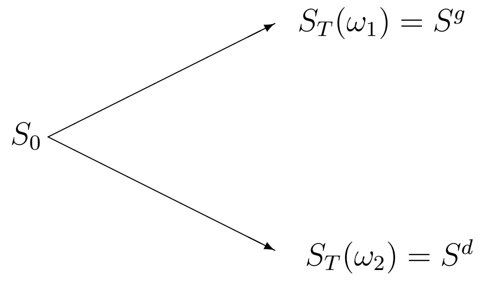
Sada ćemo na vrlo jednostavnom modelu objasniti osnovnu ideju određivanja pravedne cijene opcija. Da bismo to mogli učiniti, uvodimo sljedeće pretpostavke o financijskom tržištu (tzv. tržište *bez trenja*):

- sve stranke imaju isti pristup relevantnim informacijama,
- ne postoje troškovi transakcija (trgovanje je besplatno),
- sva financijska imovina je beskonačno dijeljiva i likvidna,
- kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje.

Vratimo se na Primjer 0.2.1: $S_0 = 690.00$, $K = 695.00$, $T = 3$ mjeseca. Pretpostavimo da je kamatna stopa za 3 mjeseca fiksna i iznosi 1%. To znači da jedna kuna uložena danas za tri mjeseca daje 1.01 Kn. Stavimo $r = 0.01$. Da bismo mogli odrediti cijenu call opcije, moramo na neki način modelirati slučajno kretanje cijene dionice Kraša. Predlažemo najjednostavniji mogući model, za koji je jasno da nije realan. Bez obzira na to, model je ilustrativan i poučan, a pokazat ćemo tokom kolegija da se može poopćiti tako da zadrži jednostavno svojstvo, ali postaje puno realniji.

Pretpostavke: nakon tri mjeseca, $T = 3$, cijena jedne dionice Kraša može porasti i iznosit će $S^g = 705.00$ Kn, ili može pasti i iznosit će $S^d = 685.00$ Kn. Reći ćemo da se dogodio elementarni događaj ω_1 ako je cijena jednaka S^g, odnosno da se dogodio ω_2 ako je cijena jednaka S^d. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Cijena dionice nakon tri mjeseca S_T je slučajna i vrijedi

$$S_T(\omega_1) = S^g = 705.00\,,$$
$$S_T(\omega_2) = S^d = 685.00\,.$$



Dakle, $S_T : \Omega \to \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla. Naravno, u trenutku $t = 0$ (t.j. sada), ne znamo da li će se dogoditi ω_1 ili ω_2 (odnosno koje je pravo stanje svijeta).

Izračunajmo vrijednost C_T call opcije u trenutku T. Uočimo da ta vrijednost ovisi o tome da li se dogodio ω_1 ili ω_2. Dakle, $C_T : \Omega \to \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla i vrijedi:

$$\begin{aligned} C_T(\omega_1) &= S_T(\omega_1) - K = S^g - K = 705.00 - 695.00 = 10.00\,, \\ C_T(\omega_2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Uočimo da možemo pisati $C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Također, C_T koji smo gore izračunali je vrijednost opcije u kunama nakon tri mjeseca. Zbog vremenske vrijednosti novca, sadašnja vrijednost opcije nakon tri mjeseca je $(1+r)^{-1}C_T$. Tu vrijednost zvat ćemo diskontirana vrijednost. Dakle

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r}C_T(\omega_1) &= \frac{1}{1+0.01} \times 10 = 9.9\,, \\ \frac{1}{1+r}C_T(\omega_2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Jedna od mogućih ideja određivanja cijene opcija je izračunati očekivanje njezine diskontirane vrijednosti. Za računanje očekivanja potrebno je odrediti vjerojatnosti elementarnih događaja. Postoje dva načina kako se to može učiniti. Jedan je statistički, po kojem se vjerojatnosti procjenjuju iz povijesnih podataka. Takvu vjerojatnost možemo zvati objektivnom. Drugi način određivanja vjerojatnosti je subjektivan, po kojem investitori procjenjuju vjerojatnosti na subjektivan način (korištenjem informacija unutar i izvan tržišta). Na primjer, na tržištu na kojem se očekuje pad cijena dionica (bear market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.2 \qquad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.8\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 1.98\,.$$

Dakle, investitoru koji predviđa pad tržišta (uz subjektivnu procjenu vjerojatnosti kao gore), opcija vrijedi 1.91 Kn (odnosno, toliko je spreman platiti za nju). Na tržištu na kojem se očekuje rast cijena dionica (bull market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.8 \qquad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.2\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 7.92\,,$$

odnosno četiri puta više. Jasno je da će se na takav način dvije strane u ugovoru koje imaju suprotna očekivanja o tržištu teško dogovoriti o cijeni opcije. Međutim, za izgradnju pouzdanog modela financijskog tržišta, mora biti zagarantirana jedinstvenost cijene izvedenih vrijednosnica. To se može postići primjenom **replicirajućeg portfelja**.

Objasnimo detaljno što je to replicirajući portfelj. Pretpostavimo da investitor može trgovati sa dvije financijske imovine – dionicama Kraša i novcem u banci (t.j., može uložiti novac u banku ili ga posuditi iz banke). Označimo sa ϕ^1 broj dionica Kraša koje investitor posjeduje (ili kupi) u trenutku $t = 0$ (zbog pretpostavke o beskonačnoj djeljivosti ϕ^1 može biti proizvoljan realan broj). Neka je ϕ^0 iznos novca koji investitor u trenutku $t = 0$ ima u banci (ϕ^0 može biti negativan – novac posuđen iz banke). Uređen par $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{R}^2$ zovemo portfelj u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost $V_0(\phi)$ takvog portfelja ϕ? Očito je

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = \phi^0 + 690\phi^1\,.$$

Kolika je vrijednost $V_T(\phi)$ portfelja ϕ u trenutku $t = T$? Budući da je cijena dionice Kraša slučajna, to će i vrijednost portfelja biti slučajna varijabla, $V_T(\phi) : \Omega \to \mathbf{R}$. Vrijedi:

$$V_T(\phi) = \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T\,.$$

Preciznije

$$\begin{aligned} V_T(\phi)(\omega_1) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_1) = 1.01\phi^0 + 705.00\phi^1\,, \\ V_T(\phi)(\omega_2) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_2) = 1.01\phi^0 + 685.00\phi^1\,. \end{aligned}$$

Kažemo da portfelj ϕ replicira call opciju ako vrijedi $V_T(\phi) = C_T$, t.j., vrijednost portfelja jednaka je vrijednosti call opcije.

Pitanje: da li postoji replicirajući portfelj za našu call opciju? Odgovor je pozitivan što se lako i vidi. Zaista, replicirajući portfelj ϕ mora zadovoljavati sljedeće dvije jednakosti: $V_T(\phi)(\omega_1) = C_T(\omega_1)$ i $V_T(\phi)(\omega_2) = C_T(\omega_2)$. To možemo napisati kao

$$\begin{aligned} 1.01\phi^0 + 705.00\phi^1 &= 10.00\,, \\ 1.01\phi^0 + 685.00\phi^1 &= 0\,. \end{aligned}$$

To je sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1. Rješavanjem slijedi:

$$\phi^0 = -339.11\,, \qquad \phi^1 = \frac{1}{2} = 0.5\,.$$

Dakle, portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$ replicira call opciju, odnosno portfelj ϕ i call opcija imaju jednaku vrijednost u trenutku $t = T$. Prema tome, portfelj ϕ i call opcija moraju imati jednaku vrijednost i u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$? Računamo:

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = -339.11 + 690 \times 0.5 = 5.89\,.$$

Međutim, to znači da je i vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka upravo $C_0 = 5.89$.

Pogledajmo malo detaljnije princip na kojem se zasniva određivanje cijene opcije pomoću replicirajućeg portfelja.

Pretpostavimo da je pisac uspio prodati razmatranu opciju za iznos $C_0 > 5.89$, na primjer za $C_0 = 7.42$ Kn. Za 5.89 Kn odmah kupi portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$, t.j., iz banke posudi 339.11 Kn, i kupi 0.5 dionica Kraša po cijeni od 690.00 Kn (uočite da mu za to treba $0.5 \times 690.00 = 345$ Kn. Međutim, 345=339.11+5.89). Razliku od 7.42-5.89=1.53 Kn stavi u banku uz kamatu 1% (ili u džep). U vremenu T vrijednost portfelja $V_T(\phi) = C_T$, te je pisac u stanju točno pokriti obavezu iz ugovora. U međuvremenu, 1.53 Kn u banci naraslo je na $1.53 \times 1.01 = 1.55$ Kn. Na taj način je pisac opcije ostvario nerizičan profit od 1.55 Kn.

Obratno, pretpostavimo da je kupac uspio kupiti opciju za iznos $C_0 < 5.89$, na primjer, za $C_0 = 4.42$ Kn. Istog trenutka kupac prodaje portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$ za 5.89 Kn ("short sell"), a razliku od 5.89-4.42=1.47 Kn uloži u banku uz kamatu od 1% (ili stavi u džep). U trenutku T, vrijednost opcije koju posjeduje C_T jednaka je vrijednosti portfelja $V_T(\phi)$ kojeg je prodao. Stoga ima dovoljan iznos da isplati vrijednost portfelja ϕ kojeg je prodao. Time je na nuli, osim 1.47 Kn u banci koje su narasle na $1.47 \times 1.01 = 1.485$ Kn, što je nerizičan profit.

Iz gornjeg razmatranja se vidi da jedina cijena opcije koja niti piscu niti kupcu ne omogućava nerizičan profit mora biti jednaka 5.89 Kn. Portfelj koji donosi nerizičan profit naziva se **arbitraža** (ili mogućnost arbitraže). Ekonomski je opravdano pretpostaviti da na tržištu ne postoje mogućnosti arbitraže. Slijedi da je nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu ekonomski princip pomoću kojeg smo odredili cijenu opcije. Što onda vjerojatnost radi u ovoj priči? Uloga vjerojatnosti ima tehnički karakter. Objasnimo to malo detaljnije.

Pokušajmo naći vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_1\}) = p^*$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_2\}) = 1 - p^*$, takvu da je očekivana (uz vjerojatnost $\mathbf{P}^*$) diskontirana vrijednost dionice u trenutku T jednaka sadašnjoj vrijednosti S_0. Dakle, zahtijevamo

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{1}{1+r} S_T \right] = S_0 \,,$$

t.j.,

$$p^* \frac{1}{1.01} \times 705.00 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 685.00 = 690.00 \,.$$

Rješavanjem slijedi $p^* = 0.595$. Uočimo da je $\mathbf{E}^*[S_T] = (1 + r)S_0$, t.j., upravo onoliko koliko bismo imali u trenutku T da smo novac uložili u nerizičnu imovinu (dakle u banku). Stoga vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ zovemo vjerojatnost neutralna na rizik – očekivani (uz $\mathbf{P}^*$) povrat na dionicu jednak je nerizičnom povratu od 1%.

Kakve to veze ima sa cijenom opcije? Izračunajmo očekivanu (uz $\mathbf{P}^*$) diskontiranu vrijednost opcije u trenutku $t = T$:

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{1}{1+r} C_T \right] = p^* \frac{1}{1.01} \times 10 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 0 = 5.89 \,.$$

Međutim, to je upravo cijena opcije C_0 koju smo gore dobili konstrukcijom replicirajućeg portfelja. U kolegiju ćemo pokazati da to nije slučajno, te zašto računanje očekivanja (uz vjerojatnost neutralnu na rizik) diskontirane vrijednosti opcije daje cijenu opcije u trenutku $t = 0$. Uočite da je drugi postupak brži i jednostavniji.

POGLAVLJE 1

Višeperiodni modeli u diskretnom vremenu – dinamički modeli

1.1. Opis modela: imovine, strategije i arbitraža

Promatramo diskretni model financijskog tržišta na kojem se trguje u konačno mnogo vremenskih perioda, odnosno u trenucima $t = 0, 1, \ldots, T$. Pretpostavit ćemo da slučajne vrijednosti u modelu mogu poprimiti najviše konačno mnogo različitih vrijednosti, stoga ćemo financijski model gradit na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je prostor elementarnih događaja konačan, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$. Za σ-algebru $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup od Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi elementarni događaji mogući, odnosno da je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.

Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dan nam je i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Podsjetimo se, takvu familiju σ-algebri $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\}$ zovemo **filtracija**. O σ-algebri $\mathcal{F}_t$ mislimo kao o informaciji o stanju na tržištu koja nam je dostupna u trenutku t. Informacija se prirodno povećava s vremenom (nema gubitka informacija), stoga je odabrana famislija neopadajuća. Zbog jednostavnosti, običaj je pretpostaviti da je informacija $\mathcal{F}_0$ u trenutku $t = 0$ trivijalna, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Također ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, t.j., na kraju imamo potpunu informaciju.

Promotrimo prvo dva tipa osnovne imovine - gotovinu (nerizičnu imovinu) i dionicu (rizičnu imovinu). Pretpostavit ćemo da se financijsko tržište sastoji se od $d + 1$ financijske imovine - 1 nerizične (gotovina) i d rizičnih (d nezavisnih dionica). Cijenu i-te financijske imovine u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ označavamo sa S_t^i. Dakle, gornji indeks označava o kojoj se imovini radi, dok donji indeks pokazuje vremenski trenutak.

Nerizičnu imovinu (npr., novac u banci) označavamo kao 0-tu financijsku imovinu. Pretpostavljamo da je vrijednost nerizične imovine deterministička, te da se ukamaćuje po kontastnoj kamatnoj stopi $r > 0$. Tada je uz početnu vrijednost novca $S_0^0 = 1$, vrijednost novca u trenutku t jednaka $S_t^0 = (1 + r)^t$ (jednostavno diskretno ukamaćivanje po stopi r).

Cijene rizičnih financijskih imovina (npr., dionica) $i = 1, ..., d$ modeliramo kao slučajne varijable S_t^i, $t = 0, \ldots, d$. Prirodno je pretpostaviti da cijena S_t^i ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t, odnosno o informaciji do trenutka t. Matematički to formuliramo tako da ćemo pretpostaviti da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$. To znači da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\{S_t^i \leq x\} \in \mathcal{F}_t$$

(ekvivalentno, $\{S_t^i < x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i \geq x\} \in \mathcal{F}_t$, obzirom da se nalazimo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru, $\{S_t^i = x\} \in \mathcal{F}_t$).

Označimo s $S_t := (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$ vektor cijena svih imovina u trenutku t. Tada je $S_t : \Omega \to \mathbf{R}^{d+1}$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor. Uočimo, slučajni proces $S^i = (S_t^i\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ je **adaptiran** u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$.

NAPOMENA 1.1.1. Pojam nerizične imovine može se poopćiti, tako da S_t^0 ne bude nužno degenerirana slučajna varijabla. Općenito možemo pretpostaviti da je 0-ta imovina lokalno nerizična. To znači da u trenutku $t-1$ znamo njenu vrijednost u trenutku t, $t = 1, 2, \dots, T$. Formalno, to znači da je S_t^0 $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva, odnosno da je slučajni proces $S^0 = (S_t^0, t = 0, 1, \dots, T)$ **predvidiv** u odnosu na filtraciju $\mathbf{F}$.

Kada imamo različite investicijske projekte ili isplate u različitim vremenskim trenutcima, jedini način da ih objektivno usporedimo je da sve isplate preračunamo na zajedničku osnovu — sadašnju vrijednost. Uvedimo oznaku $\beta_t := 1/S_t^0$. Koeficijent β_t interpretiramo kao diskontni faktor od vremena t do vremena 0: ako u trenutku $t = 0$ uložimo u banku β_t eura, u trenutku t imat ćemo točno 1 euro. Ako u trenutku t imamo isplatu u iznosu K, onda je njena sadašnja vrijednost (u trenutku 0), u oznaci $\widetilde{K}$, jednaka

$$\widetilde{K} = \beta_t K = (1+r)^{-t} K.$$

Sve ostale financijske imovine na tržištu bit će izvedenice ovih $d+1$ odnosvnih financijskih imovina. Najjednostavnija takva izvedenica je financijska imovina čija je vrijednost linearna kombinacija vrijednosti osnovnih financijskih imovina – nazivamo ju **portfelj**. Recimo da u trenutku $t = 0$ investiramo u osnovne financijske imovine, pri čemu smo uložili u $\phi^i \in \mathbf{R}$ jedinica i-te imovine. Time smo kreirali jedan portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbf{R}^{d+1}$. Pri tom, primijetimo da definicija portfelja dozvoljava da je $\phi^i < 0$. Na primjer, ako je $\phi^0 < 0$ znači da smo iz banke **posudili** $|\phi^0|$ novčanih jedinica. Pretpostavka $\phi^i < 0$ za neki $i = 1, 2, \dots, d$, odgovara **short sale** dionice i.

Uočite da u svakom trenutku trgovanja možemo kreirati novi portfelj i time optimizirati naše ulaganje obzirom na nove dostupne informacije na tržištu. Označimo s ϕ_1 portfelj koji smo kreirali u trenutku 0: $\phi_1 = (\phi_1^0, \phi_1^1, \dots, \phi_1^d)$. U trenutku $t = 1$, saznamo nove cijene dionica S_1^i i naše ulaganje u tom trenutku ima vrijednost $\phi_1 \cdot S_1 = \phi_1^0 S_1^0 + \ldots + \phi_1^d S_1^d$. U trenutku $t = 1$ dopušteno nam je rebalansirati portfelj i zamijeniti ga nekim drugim portfeljom koji označimo s $\phi_2 = (\phi_2^0, \phi_2^1, \dots, \phi_2^d)$. O čemu će ovisiti taj novi portfelj? O cijenama financijskih imovina u trenutku $t = 1$. Budući da su te cijene slučajne, i to tako da su $\mathcal{F}_1$ izmjerive, to će općenito i portfelj ϕ_2 biti $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor u $\mathbf{R}^{d+1}$. U trenutku $t = 2$ saznamo nove cijene S_2^i, te rebalansiramo portfelj, itd.

DEFINICIJA 1.1.2. **Strategija trgovanja** (ili dinamički portfelj) je predvidiv slučajni proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d), t = 1, 2, \dots, T)$ s vrijednostima u $\mathbf{R}^{d+1}$. **Vrijednost portfelja** u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$ je slučajna varijabla

$$V_t(\phi) := \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i \,.^1$$

Primijetimo da je $V_t(\phi)$ slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$ (kao linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$-izmjerivih slučajnih varijabli). Dakle, $V(\phi) = (V_t(\phi), t = 1, 2, \dots, T)$ je adaptiran slučajni proces.

[1]Ovdje $\cdot$ označava skalarni produkt u $\mathbf{R}^{d+1}$.

Po definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što se saznaju cijene imovina u trenutku t, a prije rebalansa portfelja. Primijetimo da nismo definirali vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$. Po definiciji stavljamo $V_0(\phi) := \phi_1 \cdot S_0$. Ta definicija nije formalno u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \ldots, T$. Alternativno, možemo definirati portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi_0 = \phi_1$. Tada možemo staviti $V_0(\phi) = \phi_0 \cdot S_0$ što je u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \ldots, T$. Od sada nadalje koristimo konvenciju da je $\phi_0 = \phi_1$.

Uočimo, diskontirana vrijednost portfelja u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$ je slučajna varijabla

$$\widetilde{V}_t(\phi) := \beta_t V_t(\phi) = \phi_t \cdot \widetilde{S}_t \,,$$

gdje je $\widetilde{S}$ diskontirani vektor cijena odnosvnih financijskih imovina u trenutku t.

Od posebnog zanimanja će nam biti strategije u kojima nema vanjskih ulaganja ili izljeva sredstava u trenutcima rebalansiranja. Takve strategije se rebalansiraju na sljedeći način:

- u trenutku t saznamo cijene $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$ i vrijednost portfelja (strategije) postaje $\phi_t \cdot S_t$;
- prilagođavamo svoju financijsku poziciju tako da biramo novi portfelj ϕ_{t+1} i to tako da sredstva za kupovinu tog novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti portfelja ϕ_t koja je $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$;
- dakle, vrijednost (u trenutku t) novog portfelja ϕ_{t+1}, koja je $\phi_{t+1} \cdot S_t$, mora biti jednaka vrijednosti starog portfelja ϕ_t koja je $\phi_t \cdot S_t$.

Definicija 1.1.3. Strategija ϕ je **samofinancirajuća** ako za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$ vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \,. \tag{1.1.1}$$

Napomena 1.1.4. Jednakost (1.1.1) ekvivalentna je sa

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} - \phi_t \cdot S_t \,,$$

odnosno, uz oznaku $\Delta S_{t+1} := S_{t+1} - S_t$,

$$\phi_{t+1} \cdot \Delta S_{t+1} = V_{t+1}(\phi) - V_t(\phi) \,. \tag{1.1.2}$$

Desna strana je razlika vrijednosti portfelja ϕ u trenucima $t+1$ i t. Lijeva strana je dobitak (gubitak) ostvaren promjenom cijena od trenutka t do trenutka $t+1$. Dakle, strategija je samofinancirajuća ako i samo ako je dobitak (gubitak) ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina (a ne, npr., dodatnim investiranjem ili povlačenjem novca iz portfelja - konzumacija).

Definiramo s $G(\phi) = (G_t(\phi)\,,\, t = 1, 2, \ldots, T)$,

$$G_t(\phi) := \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j \,.$$

slučajni proces koji zovemo **proces dobitka**. Uočimo da je adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbf{F}$.

Propozicija 1.1.5. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Strategija ϕ je samofinancirajuća.

(ii) Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)\,.$$

(iii) Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \widetilde{G}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j\,.$$

DOKAZ. Iz Napomene 1.1.4, ϕ je samofinancirajuća ako i samo ako vrijedi jednakost (1.1.2.
(i)$\Rightarrow$ (ii) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t}(V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j$.
(ii)$\Rightarrow$ (i) Iz $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j$ za sve $t = 1, 2, \ldots, T$, slijedi $V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) = \phi_t \cdot \Delta S_t$.
(i)$\Leftrightarrow$(iii) Vrijedi $\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t$ ako i samo ako je $\phi_t \cdot \widetilde{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \widetilde{S}_t$. Sada je dokaz isti kao dokaz ekvivalencije (i) i (ii). □

NAPOMENA 1.1.6. Uočimo da za svaki predvidiv proces $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d), 0 \le t \le T)$ i za svaku $\mathcal{F}_0$-izmjerivu slučajnu varijablu V_0[2] postoji jedinstven predvidiv proces $(\phi_t^0, 0 \le t \le T)$ takav da je strategija $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ samofinancirajuća i vrijedi $V_0(\phi) = V_0$. To se jednostavno vidi iz Propozicije 1.1.5 uz

$$\begin{aligned}
\phi_t^0 &:= V_0 + \sum_{j=1}^{t}(\phi_j^1 \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\widetilde{S}_j^d) - \phi_t^1 \widetilde{S}_t^1 - \cdots - \phi_t^d \widetilde{S}_t^d \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^{t-1}(\phi_j^1 \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\widetilde{S}_j^d) - \phi_{t-1}^1 \widetilde{S}_{t-1}^1 - \cdots - \phi_{t-1}^d \widetilde{S}_{t-1}^d\,.
\end{aligned}$$

Uočite da je iz drugog reda vidljivo da je slučajna varijabla ϕ_t^0 $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.

Gornja propozicija nam omogućava da samofinancirajuće strategije po potrebi zadajemo predvidim nizom slučajnih vektora $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)\,,\, 0 \le t \le T)$, uz danu početnu vrijednost portfelja V_0.

DEFINICIJA 1.1.7. Strategija ϕ je **dopustiva**, ako je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_t(\phi) \ge 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dopustiva strategija ϕ je **arbitraža** (arbitražna strategija), ako je

$$V_0(\phi) = 0 \;\text{ i }\; \mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Uočimo da iz dopustivosti od ϕ imamo $V_T(\phi) \ge 0$. Arbitražu interpretiramo na sljedeći način: bez rizika od gubitka, arbitražna strategija s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit. Ekonomski razlozi nalažu nam da promatramo samo modele financijskih tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Za financijsko tržište kažemo da ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. To možemo izreći na sljedeći ekvivalentan način: neka je Γ konveksni konus (bez ishodišta) svih pozitivnih varijabli,

$$\Gamma = \{X : \Omega \to [0, \infty) : \exists \omega' \in \Omega,\; X(\omega') > 0\}.$$

Ako tržište ne dopušta arbitražu, za svaku dopustivu strategiju ϕ za koju je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zaista, kada bi za dopustivu strategiju ϕ vrijedilo $V_0(\phi) = 0$ i $\widetilde{V}_T(\phi) \in \Gamma$, tada bi bilo i $V_T(\phi) \in \Gamma$, što znači da je ϕ arbitraža. Naravno, vrijedi i obrat: ako za svaku dopustivu

[2] Kada je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je $V_0 \in \mathbf{R}$.

strategiju ϕ takvu da je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $V_T(\phi) \notin \Gamma$, tada tržište ne dopušta arbitražu. Uočimo, također, da je $V_T(\phi) \notin \Gamma$ ekvivalentno s $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$.

Pojam arbitraže možemo definirati i za samofinancirajuće strategije koje nisu nužno dopustive: kažemo da je samofinancirajuća strategija ϕ arbitraža, ako je $V_0(\phi) = 0$, $V_T(\phi) \geq 0$ i $\mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$. Jasno je da ako niti jedna samofinancirajuća strategija nije arbitraža, tada niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. Postavlja se pitanje da li vrijedi i obrat. Naime, ako tržište ne dopušta arbitražu (t.j., niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža), da li se može dogoditi da postoji samofinancirajuća strategija koja je arbitraža. Da bismo odgovorili na to pitanje, prisjetimo se prvo procesa dobitka G, odnosno procesa diskontiranog dobitka $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G}_t(\phi) = \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{t} \phi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i .$$

Uočimo da zbog $\Delta \widetilde{S}_t^0 = 0$, vrijednosti ϕ_t^0 nisu bitne za vrijednost od $\widetilde{G}$.

Lema 1.1.8. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada za svaki predvidiv proces* $(\phi^1, \ldots, \phi^d) = ((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)\, , 0 \leq t \leq T)$ *vrijedi*

$$\widetilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, t.j., $\widetilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$. Tada ne može biti $\widetilde{G}_t(\phi) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$, jer bi tada (nadopunjena) strategija ϕ (koju dobijemo iz Napomene 1.1.6) bila arbitraža. Dakle, postoji $s \in \{1, \ldots, T-1\}$ takav da $\widetilde{G}_s(\phi)$ nije nenegativan. Definiramo

$$t_0 = \max\{s \, : \, \mathbf{P}(\widetilde{G}_s(\phi) < 0) > 0\} .$$

Znamo da mora biti $t_0 \leq T-1$, i vrijedi $\mathbf{P}(\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0) > 0$, i $\widetilde{G}_s(\phi) \geq 0$ za $t_0 < s \leq T$. Definirajmo novu strategiju ψ na sljedeći način:

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \phi_j & j > t_0 . \end{cases}$$

Po strategiji ψ do (uključivo) trenutka t_0 uopće ne trgujemo, a od trenutka t_0 nadalje ne trgujemo za one ω za koje je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) \geq 0$, dok za ω koje je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) < 0$ slijedimo strategiju ϕ. Budući da je $\widetilde{G}_{t_0}(\phi)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-izmjeriva i ϕ je predvidiv, dobivamo da je i slučajni niz ψ također predvidiv.

Izračunajmo diskontirani proces dobitka $\widetilde{G}(\psi)$ za strategiju ψ. Ako je $j \leq t_0$, tada je očito $\widetilde{G}_j(\psi) = 0$ (jer $\psi_k = 0$, $k = 0, \ldots, j$). Za $j > t_0$ imamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_j(\psi) &= \sum_{k=1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= \sum_{k=t_0+1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \sum_{k=t_0+1}^{j} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \\
&= 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \left[\sum_{k=1}^{j} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) - \sum_{k=1}^{t_0} (\phi_k^1 \Delta \widetilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \widetilde{S}_k^d) \right] \\
&= 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} (\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)) .
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\widetilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & j \le t_0 \\ 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi)<0\}}(\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)), & t_0 < j \le T. \end{cases}$$

Slijedi da je $\widetilde{G}_j(\psi) \ge 0$, za sve $j \in \{0, 1, \dots, T\}$, te

$$\widetilde{G}_T(\psi) = 1_{\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi)<0\}}(\widetilde{G}_T(\phi) - \widetilde{G}_{t_0}(\phi)) > 0$$

na $\{\widetilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}$. Dakle, ψ je dopustiva strategija koja je arbitraža. Kontradikicija. □

Pretpostavimo sada da je ϕ samofinancirajuća strategija za koju je $V_0(\phi) = 0$. Tada je $\widetilde{V}_T(\phi) = \widetilde{G}_T(\phi)$ i po Lemi 1.1.8, $\widetilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zato vrijedi i $V_T(\phi) \notin \Gamma$. Dakle, niti jedna samofinancirajuća strategija ne može biti arbitraža.

1.2. Martingali i mogućnost arbitraže

U ovom odjeljku uvest ćemo pojam martingalne mjere i dokazati 1. fundamentalni teorem koji nam daje karakterizaciju modela financijskih tržišta bez arbitraže u terminima martingalne mjere. Mali podsjetnik na osnovne pojmove uvjetnog očekivanja i martingala prezentiran je u na samom početku u malom fontu. Kao i do sada, promatramo konačan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, te vrijedi $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$. Dodatno, na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ imamo i filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$.

Podsjetimo se definicije uvjetne vjerojatnosti i uvjetnog očekivanja s obzirom na događaj pozitivne vjerojatnosti. Neka je $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Tada definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbf{P}_A : \mathcal{F} \to [0, 1]$ formulom

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A) := \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Uvjetno očekivanje slučajne varijable $X : \Omega \to \mathbf{R}$ u odnosu na događaj A, je očekivanje od X s obzirom na (uvjetnu) vjerojatnost $\mathbf{P}_A$:

$$\mathbf{E}[X|A] = \mathbf{E}_A[X] := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}_A(\{\omega\}).$$

Jednostavno se vidi da je

$$\mathbf{E}[X|A] = \frac{\mathbf{E}[X1_A]}{\mathbf{P}(A)}.$$

Podjsetimo se sada definicije uvjetnog očekivanja s obzirom na σ-podalgebru od $\mathcal{F}$.

Definicija 1.2.1. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$. **Uvjetno očekivanje od X s obzirom na $\mathcal{G}$** je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ t.d. je

$$\mathbf{E}[1_A\,\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[1_A X] \tag{1.2.1}$$

za sve $A \in \mathcal{G}$.

Napomena 1.2.2. Pokaže se da je gornja definicija dobra, odnosno da je slučajna varijable za koju vrijedi jednakost (1.2.1) g.s. jedinstvena. Drugim riječima, ako za $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y vrijedi

$$\mathbf{E}[1_A Y] = \mathbf{E}[1_A X]$$

za sve $A \in \mathcal{G}$ tada je $Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s.

Promotrimo vezu uvjetnih očekivanja obzirom na događaj i obzirom na σ-algebru. Ako je σ-algebra $\mathcal{G}$ određena atomima $A_1, A_2, \dots, A_k$, tada je

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) := \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}[X|A_j]1_{A_j}(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathbf{E}[X1_{A_j}]}{\mathbf{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega)\,.$$

Drugim riječima, ako je $\omega \in A_j$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbf{E}[X|A_j]$.

Napomena 1.2.3. Podsjetimo se osnovnih svojstava uvjetnog očekivanja:

(i) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
(ii) $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[X]$.
(iii) Ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada vrijedi $\mathbf{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$.
(iv) Uvjetno očekivanje je linearno: za slučajne varijable X_1, X_2 i realne brojeve a_1, a_2 vrijedi $\mathbf{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbf{E}[X_2|\mathcal{G}]$.
(v) Uvjetno očekivanje je nenegativno: $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
(vi) $|\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbf{E}[|X|\,|\mathcal{G}]$.
(vii) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$.
(viii) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X]$.
(ix) $\mathbf{E}[(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] = \min\{\mathbf{E}[(Y - X)^2]\,,\, Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-izmjeriva}\}$.

Podsjetimo se definicije martingala:

Definicija 1.2.4. Adaptiran slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je

(a) **martingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$,
(b) **supermartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$,
(c) **submartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$.

Definicija se proširuje na višedimenzionalan slučaj: niz $M = (M_t,\,,\, 0 \leq t \leq T)$ slučajnih vektora u $\mathbf{R}^d$ je martingal, ako su sve komponente martingali. Uočimo da ako je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je najbolji procjenitelj slučajne varijable M_{t+1} (neposredna budućnost) uz danu informaciju (o prošlosti i sadašnjosti) $\mathcal{F}_t$ upravo trenutna vrijednost procesa M_t.

Napomena 1.2.5. Navedimo neka od osnovnih svojstava martingala (slična svojstva vrijede i za super(sub)martingale):

(i) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq s \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.
(ii) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = M_t$.
(iii) Ako je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je $\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_0]$ za sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.
(iv) Linearna kombinacija konačno mnogo martingala opet je martingal.

Kako pomoću danog martingala M možemo konstruirati nove martingale? Vrlo koristan postupak kojim to činimo zove se martingalna transformacija. Prije definicije uvedimo oznaku $\Delta M_t := M_t - M_{t-1}$ za martingalnu razliku. Uočimo odmah da je $\mathbf{E}[\Delta M_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = 0$ zbog definicije martingala.

Definicija 1.2.6. Neka je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal, te neka je $H = (H_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Definiramo niz $X = (X_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$ slučajnih varijabli na sljedeći način:

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0M_0\,, \\ X_t &= H_0M_0 + H_1\Delta M_1 + \cdots + H_t\Delta M_t\,, \quad 1 \leq t \leq T\,. \end{aligned}$$

Niz X naziva se **martingalna transformacija**. Ponekad ćemo slučajni proces X označavati kao $H \circ M = ((H \circ M)_t \,, \, 0 \leq t \leq T)$.

PROPOZICIJA 1.2.7. *Martingalna transformacija X je martingal. Nadalje, ako je slučajni proces M supermartingal, te ako je H nenegativan, tada je i martingalna transformacija X također supermartingal.*

DOKAZ. Budući da je X_t linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$-izmjerivih slučajnih varijabli, to je i sama $\mathcal{F}_t$-izmjeriva. Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[H_{t+1} \Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= H_{t+1} \mathbf{E}[\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= 0 \,,\end{aligned}$$

gdje je za drugu jednakost iskorištena činjenica da je H_{t+1} $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i Napomena 1.2.5 (iii). Tvrdnja za supermartingal slijedi iz istog računa zbog $H_{t+1} \geq 0$ i $\mathbf{E}[\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq 0$. □

Financijska interpretacija martingalne transformacije je sljedeća: pretpostavimo da su diskontirane cijene $(\widetilde{S}_t \,, \, 0 \leq t \leq T)$ financijskih imovina martingali. Ako je ϕ samofinancirajuća strategija, tada je po Propoziciji 1.1.5 (iii)

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \widetilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j \,.$$

Dakle, diskontirane vrijednosti portfelja su martingalna transformacija $\phi \circ \widetilde{S}$, te također tvore martingal. Specijalno je $\mathbf{E}[\widetilde{V}_t(\phi)] = \mathbf{E}[V_0(\phi)]$, za sve $0 \leq t \leq T$.

Sljedeća tvrdnja pokazuje da se martingalnost slučajnog procesa može karakterizirati pomoću svih martingalnih transformacija.

PROPOZICIJA 1.2.8. *Adaptiran niz slučajnih varijabli $M = (M_t \,, \, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za svaki predvidiv niz slučajnih varijabli $H = (H_t \,, \, 1 \leq t \leq T)$ vrijedi*

$$\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t\right] = 0 \,.$$

DOKAZ. Neka je M martingal i neka je $H = (H_t \,, \, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Stavimo $H_0 = 0$. Tada je martingalna transformacija $X = H \circ M$ također martingal. Specijalno vrijedi $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$. Međutim, zbog $H_0 = 0$ imamo $X_0 = 0$. Dakle, $0 = \mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t]$.
Obratno: fiksirajmo $j \in \{0, \ldots, T-1\}$, odaberimo $A \in \mathcal{F}_j$, i definirajmo niz slučajnih varijabli $H = (H_t \,, \, 1 \leq t \leq T)$ na sljedeći način:

$$H_t = \begin{cases} 0 & t \neq j+1 \,, \\ 1_A & t = j+1 \,. \end{cases}$$

Tada je $H = (H_t \,, \, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz, pa po pretpostavci vrijedi $\mathbf{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t] = 0$. Međutim,

$$\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t = H_{j+1}(M_{j+1} - M_j) = 1_A (M_{j+1} - M_j) \,.$$

Slijedi da je

$$\mathbf{E}[1_A M_j] = \mathbf{E}[1_A M_{j+1}]\,.$$

Budući da je $A \in \mathcal{F}_j$ bio proizvoljan, iz Napomene 1.2.2 slijedi da je

$$\mathbf{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j\,.$$

Kako je j bio proizvoljan, slijedi da je M martingal. □

Sada ćemo pojam martingala upotrijebiti za karakterizaciju financijskog tržišta bez arbitraže. Prvo nam treba definicija martingalne mjere u dinamičkom modelu tržišta.

Definicija 1.2.9. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **martingalna mjera** ili **mjera neutralna na rizik**, ako za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi

$$\mathbf{E}^*[\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}^i_t\,, \quad i = 0, 1, \dots, d\,.$$

Riječima, $\mathbf{P}^*$ je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **ekvivalentna martingalna mjera**, ako je martingalna mjera i vrijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$.

Sljedeći rezultat je fundamentalni teorem određivanja cijena imovine koji govori o nepostojanju arbitraže na tržištu. Dokaz drugog smjera je nešto složeniji, i trebat će nam sljedeći pomoćni rezultati iz linearne algebre.

Lema 1.2.10. *(a) Neka je $C \subset \mathbf{R}^n$ zatvoren i konveksan skup takav da $0 \notin C$. Tada postoje linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. Specijalno, hiperravnina $\{x : \xi(x) = 0\}$ ne presijeca C.*

(b) (teorem separacije) Neka je $K \subset \mathbf{R}^n$ kompaktan i konveksan, te neka je $V \subset \mathbf{R}^n$ vektorski potprostor takav da je $K \cap V = \emptyset$. Tada postoji linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ takav da vrijedi $\xi(x) > 0$ za sve $x \in K$, i $\xi(x) = 0$ za sve $x \in V$.

Teorem 1.2.11. *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz. $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$. Tada je niz $(\widetilde{S}_t\,, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Neka je $\phi = (\phi_t, \,, 0 \leq t \leq T)$ dopustiva (ili samofinancirajuća) strategija takva da je $V_0(\phi) = 0$. Tada je slučajni proces diskontiranih vrijednosti strategije

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j$$

martingalna transformacija, pa po Propoziciji 1.2.6, i sam $\mathbf{P}^*$-martingal. Slijedi $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*[V_0(\phi)]$. Zbog $V_0(\phi) = 0$ slijedi $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = 0$, a zbog dopustivosti je $\widetilde{V}_T(\phi) = \beta_T V_T(\phi) \geq 0$. Budući da je $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve ω, iz $\mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = 0$ i $\widetilde{V}_T(\phi) \geq 0$ slijedi da je $\widetilde{V}_T(\phi) \equiv 0$. Tada je i $V_T(\phi) \equiv 0$, pa je i $\mathbf{P}[V_T(\phi) > 0] = 0$. Dakle, dopustiva strategija ϕ nije arbitraža.
$\Rightarrow$ Obratno, pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Neka je

$$\mathcal{V} := \{\widetilde{G}_T(\phi)\,,\, \phi \text{ predvidiv proces u } \mathbf{R}^d\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ vektorski prostor slučajnih varijabli na Ω i možemo ga shvatiti kao vektorski potprostor konačnodimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^K$, gdje je kao i prije $K = |\Omega|$. Po Lemi 1.1.8, $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$.

Definirajmo $K := \{X \in \Gamma : \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 1.2.10 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega) : \omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

(i) $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)X(\omega) > 0$ za sve $X \in K$,
(ii) $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\widetilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0$ za svaki predvidiv ϕ.

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega) = 1$ i $X(\omega') = 0$ za sve ostale ω). Definiramo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ formulom:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}\,.$$

Zbog $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ slijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$. Za proizvoljni predvidiv proces ϕ s vrijednostima u $\mathbf{R}^d$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^*\left[\sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta\widetilde{S}_t\right] &= \mathbf{E}^*[\widetilde{G}_T(\phi)] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \widetilde{G}_T(\phi)(\omega)\mathbf{P}^*(\{\omega\}) \\
&= \frac{1}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')} \sum_{\omega\in\Omega} \widetilde{G}_T(\phi)(\omega)\lambda(\omega) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost izlazi iz (ii). Specijalno, za $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, stavimo $\phi_t^j = 0$, $t = 0, 1, \dots, T$, $j \neq i$. Tada je

$$\mathbf{E}^*\left[\sum_{t=1}^{T} \phi_t^i \Delta\widetilde{S}_t^i\right] = 0$$

za svaki (1-dim) predvidiv proces $(\phi_t^i,\ 1 \le t \le T)$. Po Propoziciji 1.2.8 slijedi da je $\widetilde{S}^i$ $\mathbf{P}^*$-martingal. □

1.3. Potpuni modeli tržišta

Definicija 1.3.1. **Slučajni zahtjev s dospijećem TT** je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ takva da je

$$0 \le C < \infty \quad \mathbf{P} - \text{g.s.}$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem T zove se **izvedenica (derivative)** primarnih imovina $S^1, \dots, S^d$ ako je C funkcija slučajnih vektora $S_1, S_2, \dots, S_T$.

Primjer 1.3.2. **Europska call opcija** (na financijsku imovinu ii) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C = (S_T^i - K)^+$. Dakle,

$$C = \begin{cases} S_T^i - K\,, & S_T^i > K \\ 0\,, & S_T^i \le K\,. \end{cases}$$

Europska put opcija (na financijsku imovinu ii) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C = (K - S_T^i)^+$.
U gornja dva primjera C je funkcija od S_T^i, pa je prema tome izvedenica. Općenito, C može ovisiti o svim cijenama financijske imovine i do trenutka T.

Azijska call opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T. Neka je

$$\overline{A}_T^i := \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\widetilde{S}_t^i$$

srednja vrijednost diskontiranih cijena i-te imovine. Azijska call opcija (na i-tu imovinu) s cijenom izvršenja K je slučajni zahtjev $C = (\overline{A}_T^i - K)^+$.

DEFINICIJA 1.3.3. Slučajni zahtjev C je **dostižan** ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$. Kažemo da strategija ϕ **replicira** C.

NAPOMENA 1.3.4. Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Ako je C slučajni zahtjev takav da je $V_T(\phi) = C$ za neku samofinancirajuću strategiju, tada je C dostižan slučajni zahtjev. Dovoljno je provjeriti da je u tom slučaju ϕ dopustiva strategija, t.j., $V_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu $\widetilde{V}_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Neka je $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je $(\widetilde{V}_t(\phi)\,, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal, pa je

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\beta_T C\,|\,\mathcal{F}_t] \geq 0\,,$$

zbog $\beta_T > 0$ i $C \geq 0$.

DEFINICIJA 1.3.5. Model tržišta bez arbitraže je **potpun** ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

Zahtjev na potpunost tržišta je ekonomski restriktivan i često nema ekonomsko opravdanje, za razliku od zahtjeva na nepostojanje arbitraže. Osnovni rezultat o potpunosti tržišta je sljedeći:

TEOREM 1.3.6. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

DOKAZ. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun. Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev. Po pretpostavci postoji dopustiva strategija ϕ koja replicira C, $C = V_T(\phi)$. Specijalno vrijedi

$$\beta_T C = \widetilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{T}\phi_j \cdot \Delta\widetilde{S}_j\,.$$

Pretpostavimo da su $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Tada je proces $(\widetilde{V}_t(\phi)\,, 0 \leq t \leq T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$. Specijalno, to znači da je (zbog $\mathcal{F}_0$ trivijalna)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1[\widetilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_1[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,,\\ \mathbf{E}_2[\widetilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_2[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,,\end{aligned}$$

otkud $\mathbf{E}_1[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}_2[\widetilde{V}_T(\phi)]$. Slijedi $\mathbf{E}_1[\beta_T C] = \mathbf{E}_2[\beta_T C]$. Budući da je $\beta_T = 1/(1+r)^T$ deterministički, dobivamo

$$\mathbf{E}_1[C] = \mathbf{E}_2[C]\,.$$

Ta jednakost vrijedi za svaku nenegativnu $\mathcal{F}_T$-izmjerivu slučajnu varijablu C. Budući da je po pretpostavci $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, slijedi $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ (zaista, dovoljno je za C uzeti $1_{\{\omega\}}$).

$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže, ali nepotpuno. To znači da postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definiramo

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \{U_0 + \sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t \,:\, U_0 \text{ je } \mathcal{F}_0 \text{ izmjeriva, } ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \le t \le T) \text{ je predvidiv}\}\,.$$

Uočimo da za dani d-dimenzionalni predvidiv proces $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \le t \le T)$ postoji predvidiv proces $(\phi_t^0 \,:\, 1 \le t \le T)$ takav da je strategija $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d) \,:\, 1 \le t \le T)$ samofinancirajuća (Propozicija 1.1.6). Zbog $\Delta \widetilde{S}_t^0 = 0$, te budući da je U_0 konstanta ($\mathcal{F}_0$ je trivijalna), slijedi da je

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{V}_T(\phi) \,:\, \phi \text{ samofinancirajuća}\}\,.$$

Budući da po pretpostavci C nije dostižan zahtjev, zbog Napomene 1.3.4, ne može se dostići niti samofinancirajućom strategijom. Slijedi: $C/S_T^0 \notin \widetilde{\mathcal{V}}$. To znači da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ pravi podskup skupa svih slučajnih varijabli. Jednostavno se provjeri da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ vektorski podprostor.

Neka je $\mathbf{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Na prostoru svih slučajnih varijabli definiramo skalarni produkt

$$(X, Y) := \mathbf{E}^*[XY]\,, \quad X, Y : \Omega \to \mathbf{R}\,.$$

Budući da je $\widetilde{\mathcal{V}}$ pravi podprostor, postoji slučajna varijabla $X \neq 0$ ortogonalna na $\widetilde{\mathcal{V}}$, $X \in \widetilde{\mathcal{V}}^{\perp}$. Definiramo

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$$

gdje je $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Uočimo da je $1 \in \widetilde{\mathcal{V}}$ ($U_0 = 1$, $\phi \equiv 0$), pa je $X \perp 1$, t.j., $0 = \mathbf{E}^*[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$. Slijedi:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\}) = 1\,.$$

Očito je $1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 0$, pa je $\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je vjerojatnost ekvivalentna s $\mathbf{P}^*$ i $\mathbf{P}^{**} \neq \mathbf{P}^*$ (zbog $X \neq 0$).

Neka je $\phi = ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) \,:\, 1 \le t \le T)$ predvidiv proces. Računamo

$$\mathbf{E}^{**}[\sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t] = \mathbf{E}^*[\sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t] + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \mathbf{E}^*[X \sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta \widetilde{S}_t] = 0\,.$$

Prvi sumand je nula, jer je $\widetilde{S}_t$ $\mathbf{P}^*$-martingal, a drugi je nula, jer je $X \perp \widetilde{\mathcal{V}}$. Po Propoziciji 1.2.8 slijedi da je $(\widetilde{S}_t \,:\, 0 \le t \le T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}^{**}$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je martingalna mjera. Budući da je različita od $\mathbf{P}^*$, martingalna mjera nije jedinstvena. $\square$

Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže i potpuno. Neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Cilj nam je odrediti cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva C.

Neka je $C \ge 0$ proizvoljna $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla, te neka je ϕ dopustiva strategija koja replicira C: $V_T(\phi) = C$. Niz $(\widetilde{V}_t(\phi) \,:\, 0 \le t \le T)$ je $\mathbf{P}^*$-martingal, pa je

$$V_0(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right]\,.$$

Općenitije,

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t\right], t = 0, 1, \dots, T\,,$$

otkud

$$V_t(\phi) = S_t^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t \right] , t = 0, 1, \ldots, T \,. \tag{1.3.1}$$

Dakle, u trenutku t je vrijednost $V_t(\phi)$ dopustive strategije ϕ koja replicira C potpuno određena s C.

Prirodno je $V_t(\phi)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t. To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju ϕ. Specijalno, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\phi) = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \right] .$$

Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu $C_0 = \mathbf{E}^*[C/S_T^0]$, te dobiveni iznos $C_0 = V_0(\phi)$ uloži u replicirajući portfelj ϕ. Budući da je ϕ samofinancirajući, investitor može slijediti ϕ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t, redistribucija imovina po dinamičkom portfelju ϕ je besplatna. U trenutku T, vrijednost portfelja jednaka je $V_T(\phi)$. Međutim , $V_T(\phi) = C$, što znači da je iznos $V_T(\phi)$ upravo dovoljan za pokriće obaveze dospijele po slučajnom zahtjevu C. Drugim riječima, dinamički portfelj ϕ je savršena zaštita (engl. hedge) za slučajni zahtjev C.

Uočite da nam je do sada za razvoj teorije bila potrebna samo egzistencija replicirajućeg portfelja ϕ. Za praktične potrebe hedginga, važno je izračunati taj portfelj. To ćemo kasnije naučiti za slučaj Cox–Ross–Rubinsteinovog (ili binomnog) modela.

Ponovimo još jednom da za računanje cijene slučajnog zahtjeva (opcije) moramo znati samo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$, t.j., ekvivalentnu martingalnu mjeru. Vjerojatnost $\mathbf{P}$, koja može biti objektivna vjerojatnost (statistički ustanovljena) ili bilo koja subjektivna vjerojatnost, potpuno je irelevantna za računanje cijena opcija. **Cijena slučajnog zahtjeva jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev**.

1.4. CRR model

U ovom odjeljku ćemo detaljno proučiti **Cox-Ross-Rubinsteinov model** (CRR model), za koji ćemo kasnije pokazati da je u stvari diskretna verzija Black-Scholesovog modela, najpoznatijeg (vremenski neprekidnog) modela financijskog tržišta. Pretpostavke modela su sljedeće:

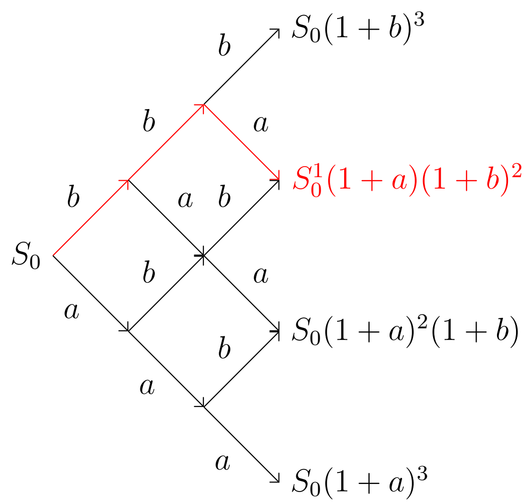
- na financijskom tržištu imamo jednu rizičnu financijsku imovinu (dionica), čija je cijena jednaka S_t u trenutku t, $0 \leq t \leq T$, te je relativna promjena cijene između dva trenutka jednaka ili a ili b, gdje je $-1 < a < b$ (nezavisno od vremena t i trenutne cijene dionice);
- također imamo jednu nerizičnu imovinu s fiksnim povratom $r > 0$ u jednom vremenskom trenutku: $S_t^0 = (1+r)^t$, $0 \leq t \leq T$.

Konstruirajmo vjerojatnosni prostor. Uočimo da se u svakom trenutku t slučajnost manifestira samo u tome je li relativna promjena cijene jednaka a ili b. Označimo $\Omega_1 := \{a, b\}$, te neka je $\mathbf{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1(\{b\}) = p$, $\mathbf{P}_1(\{a\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Relativne promjene cijene dionice su nezavisne, pa prostor elementarnih događaja Ω uzet ćemo Kartezijev produkt skupa Ω_1,

$$\Omega = \Omega_1^T = \{a, b\}^T = \{(\omega_1, \ldots, \omega_T) : \omega_t \in \{a, b\},\, t = 1, \ldots, T\} ,$$

a za vjerojatnost $\mathbf{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1^T$.

Na primjer, za $T=3$, $\mathbf{P}(\{(b,b,a)\}) = p^2(1-p)$ i elementarni događaj $\omega = (b,b,a)$ odgovara grani sljedećeg binomnog stabla označenoj crvenom bojom:



Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ definiramo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots X_T$ (relativna promjena cijene dionice) na sljedeći način:

$$X_t(\omega) = \omega_t\,, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)\,.$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable (jer je riječ o projekcijama na produktnom vjerojatnosnom prostoru), s distribucijom

$$\mathbf{P}(X_t = a) = 1-p\,, \qquad \mathbf{P}(X_t = b) = p\,.$$

Neka je $S_0 \in \mathbf{R}_+$ dano. Niz slučajnih varijabli $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ definiramo sa

$$S_t := S_{t-1}(1+X_t)\,, \quad t = 1, 2, \dots, T\,.$$

Uočimo da je

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = X_t\,.$$

Prema tome, niz $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ možemo interpretirati kao niz cijena dionice kod koje je u svakom trenutku t relativna promjena cijene (t.j., povrat) jednaka ili a ili b. Te relativne promjene modelirane su slučajnim varijablama X_t, $t = 1, 2, \dots, T$. Diskontirane cijene dionice definirane su kao i do sada: $\widetilde{S}_t = \beta_t S_t = S_t/S_t^0 = S_t/(1+r)^t$.

Još preostaje definirati filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Po definiciji je $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Dostupna informacija u trenutku t su cijene dionice do (uključivo) trenutka t. Dakle, imamo informaciju o $S_0, S_1, \dots, S_t$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X_1, \dots, X_t$. To je jasno: iz relativnih promjena cijena možemo rekonstruirati cijene dionice, i obratno, iz cijena dionice možemo izračunati relativne promjene. Matematički se informacija dana s $S_1, \dots, S_t$ opisuje σ-algebrom $\mathcal{F}_t := \sigma(S_1, \dots, S_t)$. To je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S_1, \dots, S_t$ izmjerive. Alternativno, zbog jednake informacije sadržane u nizu $X_1, \dots, X_t$, vrijedi $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.

Primjer 1.4.1. Neka je $T = 3$. Izračunajmo eksplicitno filtraciju $\mathbf{F}$ tako da izračunamo atome odgovarajućih σ-algebri $\mathcal{F}_t$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \sigma\left(\{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b)\},\{(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}\right)\,,\\
\mathcal{F}_2 &= \sigma\left(\{(a,a,a),(a,a,b)\},\{(a,b,a),(a,b,b)\},\{(b,a,a),(b,a,b)\},\{(b,b,a),(b,b,b)\}\right)\,,\\
\mathcal{F}_3 &= \sigma\left(\{(a,a,a)\},\{(a,a,b)\},\{(a,b,a)\},\{(a,b,b)\},\{(b,a,a)\},\{(b,a,b)\},\{(b,b,a)\},\{(b,b,b)\}\right)\,.
\end{aligned}$$

Želimo odrediti pod kojim uvjetima na parametre modela $(a,\, b,\, r,\, p)$ ovaj model tržišta ne dopušta arbitražu, odnosno kada je model potpun. Sljedeći rezultat ključan je za ovu analizu:

Lema 1.4.2. *Neka je $\hat{\mathbf{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$.*

(a) Niz diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t\,:\,t=0,1,\ldots,T)$ je $\hat{\mathbf{P}}$-martingal ako i samo ako vrijedi

$$\hat{\mathbf{E}}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = r\,,\quad t=1,2,\ldots,T\,.$$

(b) Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a<r<b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$).

Dokaz. (a) Fiksirajmo $t \in \{1,2,\ldots,T\}$. Kako je $\widetilde{S}_{t-1}$ $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva slučajna varijabla, vrijedi ekvivalencija

$$\hat{\mathbf{E}}[\widetilde{S}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = \widetilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = 1.$$

Nadalje, kako je

$$1 = \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r}\hat{\mathbf{E}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r}\hat{\mathbf{E}}[1+X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}],$$

slijedi da je

$$\hat{\mathbf{E}}[\widetilde{S}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = \widetilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}[1+X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = 1+r \iff \hat{\mathbf{E}}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = r.$$

(b) Kako je $X_t \in \{a,b\}$ i $\mathbf{P} \approx \hat{\mathbf{P}}$ vrijedi $\hat{\mathbf{P}}(X_t = a) > 0$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t = b) > 0$. Dodatno, po pretpostavci (a) imamo da je $\hat{\mathbf{E}}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = r$.

Pretpostavimo da ne vrijedi $r \in (a,b)$. Tada je ili $r \le a < b$ ili $a < b \le r$. U prvom slučaju je tada $\hat{\mathbf{P}}(X_t \ge r) = 1$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t > r) > 0$ otkud slijedi $\hat{\mathbf{E}}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] > r$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Slučaj $a < b \le r$ na isti način daje kontradikciju.

Nadalje, odredimo uvjetnu razdiobu slučajne varijable X_t uvjetno na $\mathcal{F}_{t-1}$. Želimo odrediti $\hat{p} := \hat{\mathbf{P}}[X_t = b\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]$ (uočimo $\hat{\mathbf{P}}[X_t = a\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = 1-\hat{p}$). Kako je

$$r = \hat{\mathbf{E}}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = a\hat{\mathbf{P}}[X_t = a\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] + b\hat{\mathbf{P}}[X_t = b\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = a(1-\hat{p}) + b\hat{p},$$

slijedi da je

$$\hat{p} = \frac{r-a}{b-a}$$

Uočimo da je zbog pokazanog $a<r<b$ nužno $0<\hat{p}<1$, pa je gornje rješenje dobro.

Sada iz gornje uvjetne razdiobe možemo odrediti razdiobu od X_t obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\hat{P}$: Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = a] = \hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t=a\}}] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t=a\}}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{P}}[X_t = a\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[1-\hat{p}] = 1-\hat{p}\,,$$

i slično, $\hat{\mathbf{P}}[X_t = b] = \hat{p}$. To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (obzirom na $\hat{\mathbf{P}}$). Nadalje, iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = x \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \hat{\mathbf{P}}[X_t = x]$$

za $x \in \{a, b\}$, pa zaključujemo da je X_t nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Budući da je $\mathcal{F}_{t-1}$ generirana s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, slijedi da je X_t nezavisna s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Odavde se vidi nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$). □

Uočimo da je uz pretpostavke gornje leme, X_t nezavisna od $\mathcal{F}_{t-1}$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$), pa je uvjetno očekivanje $\hat{\mathbf{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ ustvari jednako očekivanju $\hat{\mathbf{E}}[X_t] = (1 - \hat{p})a + \hat{p}\, b$. Gornjom lemom također smo pokazali da je uvjet $a < r < b$ nužan za nepostojanje arbitraže u CRR modelu – ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$, pa po Lemi 1.4.2 (b) slijedi da je $a < r < b$.

Lema 1.4.3. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada je $r \in (a, b)$.*

Gornju lemu možemo jednostavno objasniti i ekonomskim argumentom. Pretpostavimo da $r \notin (a, b)$, i na primjer, $r \le a < b$. Tada je $S_T(\omega) \ge S_0(1 + a)^T \ge S_0(1 + r)^T$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji ω' takav da je $S_T(\omega') > S_0(1 + r)^T$. Dakle, posudimo li iz banke S_0 kuna i investiramo u jednu dionicu rizične imovine (te čekamo da dođe vrijeme T), ne možemo imati manje od $S_0(1+r)^T$ koliko smo u trenutku T dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Sada želimo pokazati obrat Leme 1.4.3, t.j., da je uvjet $r \in (a, b)$ dovoljan za nepostojanje arbitraže na tržištu. To ćemo dokazati tako da, uz pretpostavku $a < r < b$, konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Označimo $p^* := \mathbf{P}^*(X_1 = b)$. Uz $\mathbf{P}^*$ je proces diskontiranih cijena $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ martingal, pa po Lemi 1.4.2 tada vrijedi $\mathbf{E}^*[X_1] = r$, odnosno

$$r = \mathbf{E}^*[X_1] = (1 - p^*)a + p^* b,$$

otkud dobivamo

$$p^* = \frac{r - a}{b - a} \in (0, 1)\,.$$

Neka je $\mathbf{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1^*(\{b\}) = p^*$, te neka je $\mathbf{P}^* := (\mathbf{P}_1^*)^T$. Vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna je vjerojatnosti $\mathbf{P}$ (jer je $p^* \in (0, 1)$ i $\mathbf{P}^*(\omega) = \prod_{t=1}^{T} \mathbf{P}_1^*(\{\omega_t\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$). Štoviše, slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Nadalje, kako je $\mathbf{E}^*[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}^*[X_t] = (1 - p^*)a + p^* b = r$, iz Leme 1.4.2 (a) slijedi da je $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ martingal u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera. Na taj način smo dokazali prvi dio sljedeće propozicije.

Propozicija 1.4.4. *(a) CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r < b$.*
(b) Ako je $a < r < b$, tada je CRR model potpun.

Dokaz. (b) Neka su $\mathbf{P}^*$ i $\hat{\mathbf{P}}$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po Lemi 1.4.2 (b), slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su tada nezavisne, jednako distribuirane (i po $\mathbf{P}^*$ i po $\hat{\mathbf{P}}$), te vrijedi

$$\mathbf{P}^*(X_t = a) = 1 - p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = a)\,, \quad \mathbf{P}^*(X_t = b) = p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = b)\,.$$

Zbog

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(\{(\omega_1,\ldots,\omega_T)\}) &= \mathbf{P}^*(X_1=\omega_1,\ldots,X_T=\omega_T) \\ &= \mathbf{P}^*(X_1=\omega_1)\cdots\mathbf{P}^*(X_T=\omega_T)\,, \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1,\ldots,\omega_T)\}) &= \hat{\mathbf{P}}(X_1=\omega_1,\ldots,X_T=\omega_T) \\ &= \hat{\mathbf{P}}(X_1=\omega_1)\cdots\hat{\mathbf{P}}(X_T=\omega_T)\,, \end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbf{P}^*(\{(\omega_1,\ldots,\omega_T)\}) = \hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1,\ldots,\omega_T)\})$$

za sve $(\omega_1,\ldots,\omega_T)\in\Omega$ (ovdje su $\omega_1,\ldots,\omega_t\in\{a,b\}$). Zato je $\mathbf{P}^*=\hat{\mathbf{P}}$, što znači da je martingalna mjera jedinstvena. Po Teoremu 1.3.6, tržište je potpuno. □

Označimo sa C_t (odnosno P_t), $t=0,1,\ldots,T$, vrijednost call opcije (odnosno put opcije) na jednu dionicu sa cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T. Te vrijednosti su na dan dospijeća jednake

$$C_T=(S_T-K)^+\,,\quad P_T=(K-S_T)^+\,.$$

Nadalje, neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena martingalna mjera. Tada po formuli (1.3.1) imamo

$$C_t = S_t^0\,\mathbf{E}^*\left[\frac{C_T}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[(S_T-K)^+\,|\,\mathcal{F}_t] \tag{1.4.1}$$

$$P_t = S_t^0\,\mathbf{E}^*\left[\frac{P_T}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[(K-S_T)^+\,|\,\mathcal{F}_t]\,. \tag{1.4.2}$$

Vrijednosti C_t i P_t zadovoljavaju sljedeći *call-put paritet*:

$$\begin{aligned} C_t-P_t &= (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[(S_T-K)^+-(K-S_T)^+\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[S_T-K\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[S_T\,|\,\mathcal{F}_t]-K(1+r)^{-(T-t)} \\ &= S_t-K(1+r)^{-(T-t)} \end{aligned}$$

Uočimo da je formulom (1.4.1) dan izraz za cijenu call opcije pomoću očekivanja u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Sada ćemo to očekivanje eksplicitno izračunati.

PROPOZICIJA 1.4.5. *Neka je $c:\{0,1,\ldots,T\}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirana formulom*

$$c(t,x):=(1+r)^{-(T-t)}\sum_{j=0}^{T-t}\binom{T-t}{j}(1-p^*)^j(p^*)^{T-t-j}\left(x(1+a)^j(1+b)^{T-t-j}-K\right)^+\,. \tag{1.4.3}$$

Tada vrijedi $C_t=c(t,S_t)$ za svaki $t\in\{0,1,\ldots,T\}$. Specijalno, u trenutku $t=0$ cijena call opcije je

$$C_0=c(0,S_0)=(1+r)^{-T}\sum_{j=0}^{T}\binom{T}{j}(1-p^*)^j(p^*)^{T-j}(S_0(1+a)^j(1+b)^{T-j}-K)^+\,. \tag{1.4.4}$$

DOKAZ. Zbog $S_t = S_{t-1}(1+X_t)$ vrijedi da je $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Stoga je po formuli (1.4.1)

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i) - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t]\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i) - K)^+ \,|\, S_t = x] \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i) - K)^+ \,|\, S_t = x] \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T}(1+X_i) - K)^+] \ \text{ (zbog nezavisnosti } X_i, i \geq t+1, \text{ i } S_t) \\
&= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=1}^{T-t}(1+X_i) - K)^+] \ \text{ (zbog } X_i \text{ su njd uz } \mathbf{P}^*) \\
&= \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-t-j} \left(x(1+a)^j(1+b)^{T-t-j} - K\right)^+ ,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz distribucije (uz $\mathbf{P}^*$) slučajnih varijabli X_j. Tvrdnja propozicije slijedi direktno iz gornjih računa. □

Budući da je model koji promatramo potpun, call opcija se može replicirati. Sada ćemo eksplicitno izračunati replicirajuću strategiju $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1);\ 0 \leq t \leq T)$. Slijedimo li strategiju ϕ, vrijednost portfelja u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$ jednaka je $\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t$. S druge strane, budući da strategija replicira call opciju, vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku t jednaka je vrijednosti opcije $C_t = c(t, S_t)$ u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$. Dakle vrijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t = c(t, S_t)\,.$$

Pomnožimo gornju jednakost indikatorom $1_{\{X_t=a\}}$. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{\{X_t=a\}} + \phi_t^1 S_t 1_{\{X_t=a\}} = c(t, S_t) 1_{\{X_t=a\}}\,.$$

Uvrstimo $S_t\, 1_{\{X_t=a\}} = S_{t-1}(1+X_t)\, 1_{\{X_t=a\}} = S_{t-1}(1+a)\, 1_{\{X_t=a\}}$ u gornju jednadžbu. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{\{X_t=a\}} + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\, 1_{\{X_t=a\}} = c(t, S_{t-1}(1+a))\, 1_{\{X_t=a\}}\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$ u gornjoj formuli, te iskoristimo da su ϕ_t^0, ϕ_t^1 i S_{t-1} izmjerive u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$, te da je X_t nezavisna s $\mathcal{F}_{t-1}$. Dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t \mathbf{P}^*(X_t = a) + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\mathbf{P}^*(X_t = a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\mathbf{P}^*(X_t = a)\,.$$

Podijelimo s $\mathbf{P}^*(X_t = a)$ i dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\,.$$

Na isti način možemo dobiti jednakost

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+b) = c(t, S_{t-1}(1+b))\,.$$

Oduzmimo prvu jednakost od druge. Slijedi:

$$\phi_t^1 S_{t-1}((1+b)-(1+a)) = c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))\,,$$

odnosno

$$\phi_t^1 = \frac{c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)} = \Delta(t, S_{t-1})\,,$$

gdje je $\Delta : \{1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirano formulom

$$\Delta(t, x) := \frac{c(t, x(1+b)) - c(t, x(1+a))}{x(b-a)}\,. \tag{1.4.5}$$

Izraz $\Delta(t, x)$ zovemo **delta opcije**.

Kako računamo replicirajuću strategiju call opcije? U trenutku $t = 0$ vrijednost opcije jednaka je C_0. Izračunamo $\phi_1^1 = \Delta(1, S_0)$ što možemo, jer nam je S_0 poznato u trenutku $t = 0$. Vrijednost od ϕ_1^0 izračunamo iz jednakosti $\phi_1^0 + \phi_1^1 S_0 = C_0$. Riječima, u trenutku $t = 0$ raspolažemo iznosom C_0. Dio $\phi_1^1 S_0$ tog iznosa uložimo u dionice, a ostatak stavimo u banku (ili posudimo iz banke u slučaju $\phi_1^1 S_0 > C_0$). U trenutku $t = 1$ sazna se cijena dionice S_1. Izračunamo $\Delta(2, S_1)$ što je ϕ_2^1. Rebalansiramo portfelj tako da sadrži ϕ_2^1 dionica u vrijednosti $\phi_2^1 S_1$. Razlika ostaje u novcu. Preciznije, vrijedi

$$V_1(\phi) = \phi_1^0(1+r) + \phi_1^1 S_1 = \phi_2^0(1+r) + \phi_2^1 S_1\,,$$

otkud izračunamo

$$\phi_2^0 = \frac{1}{1+r}\left(V_1(\phi) - \phi_2^1 S_1\right).$$

Na isti način računamo replicirajući portfelj u ostalim vremenskim trenucima, tako da u trenutku $t-1$ odredimo

$$\begin{aligned}
\phi_t^1 &= \Delta(t, S_{t-1}),\\
\phi_t^0 &= \frac{V_{t-1}(\phi) - \phi_t^1 S_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}.
\end{aligned}$$

PRIMJER 1.4.6. U Primjeru 1.3.2 već smo vidjeli neke druge tipove opcija u dinamički modelima tržišta, gdje isplata ovisi o svim cijenama dionice do trenutka T. Pogledajmo još nekoliko primjera takvih opcija u CRR modelu (imamo samo jednu dionicu na tržištu):

(i) **Azijske opcije** – neka je

$$A_T = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} S_t$$

srednja vrijednost cijena dionica do trenutka T. Uz azijsku call opciju $(A_T - K)^+$ i azijsku put opciju $(K - A_T)^+$, na tržištu se trguje i modificiranim call/put azijskim opcijama čije su isplate $(S_T - A_T)^+$, odnosno $(A_T - S_T)^+$;

(ii) ***Lookback* opcije** – označimo

$$m = \min\{S_t : t \in [0,T]\}, \ M = \max\{S_t : t \in [0,T]\}.$$

Lookback call opcija je isplata $C = S_T - m$, a lookback put opcija jednaka je $C = M - S_T$. Možemo promatrati i modificirate call/put lookback opcije: $C = (K - m)^+$ i $C = (M - K)^+$.

(iii) **Opcije s barijerama** su opcije koje aktiviraju ili prestanu vrijediti ako cijena dionice prijeđe neki unaprijed zadani prag B (barijera). Razlikujemo sljedeća četiri tipa opcija s barijerom: *down-and-in* ($C = 1_{\{m<B\}}X$), *down-and-out* ($C = 1_{\{m>B\}}X$), *up-and-in* ($C = 1_{\{M>B\}}X$), *up-and-out* ($C = 1_{\{M<B\}}X$). Ovdje X označava tip isplate, pa ćemo tako da $X = (S_T - K)^+$ promatrati odgovarajuću call opciju s barijerom.

(iv) **Digitalna (binarna) opcija** isplaćuje fiksni iznos Q ukoliko je cijena dionice u trenutku T veća od cijene izvršenja K, $C = Q1_{\{S_T>K\}}$.

ZADATAK 1.4.7. Promatramo CRR model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$ i $T = 3$. Početna cijena dionice je $S_0 = 100$. Odredite cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K = 120$ te pripadni replicirajući portfelj.

1.5. Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije

Kao i u prethodnim odjeljcima, promatramo dinamički diskretni model financijskog tržišta. Osnovna razlika američkih opcija u odnosu na opcije koje smo do sada promatrali (europske opcije) je ta da se pravo na kupnju (prodaju) može ostvariti i u trenucima prije dospijeća opcije.

PRIMJER 1.5.1. **Američka call opcija** s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T. **Američka put opcija** s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T.

Pretpostavimo da je američka call opcija napisana na prvu financijsku imovinu, te da je cijena izvršenja jednaka K. U trenutku $t = 1$, unutarnja vrijednost tog američkog calla jednaka je $(S_1^1 - K)^+$, u trenutku $t = 2$ vrijednost je $(S_2^1 - K)^+$, i tako dalje do trenutka $t = T$ kada joj je vrijednost $(S_T^1 - K)^+$. Stavimo $Z_t := (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Tada na američku call opciju možemo gledati kao na adaptiran niz slučajnih varijabli $(Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$.

Prethodni primjer nas vodi na definiciju američkog slučajnog zahtjeva (opcije).

Definicija 1.5.2. **Američki slučajni zahtjev** je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t \, : \, t = 0, 1, \ldots, T)$.

Označimo s $U = (U_t \, : \, t = 0, 1, \ldots, T)$, cijenu (vrijednost) američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t \, : \, t = 0, 1, \ldots, T)$. Uočimo da je U_t općenito slučajna varijabla. Kako možemo odrediti cijenu U_t?

- Uočimo da je u trenutku T vrijednost (cijena) američkog slučajnog zahtjeva Z jednaka točno unutarnjoj vrijednosti,
$$U_T = Z_T.$$
- Promotrimo trenutak $T-1$. U tom trenutku vlasnik američke opcije je može odmah iskoristiti i dobiti iznos Z_{T-1}, ili je može iskoristiti u trenutku T, te dobiti iznos Z_T. U trenutku $T-1$ iznos Z_T je nepoznat, ali znamo izračunati njegovu vrijednost (cijenu). To je vrijednost (u trenutku $T-1$) opcije koja u trenutku T vrijedi Z_T. Ta vrijednost je po formuli (1.3.1) jednaka
$$S^0_{T-1}\,\mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] = S^0_{T-1}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{Z_T}{S^0_T} \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right].$$
Racionalni investitor odlučit će se u trenutku $T-1$ za veću od te dvije vrijednosti. Zato je
$$\begin{aligned} U_{T-1} &= \max\left(Z_{T-1}, S^0_{T-1}\,\mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}]\right) \\ &= \max\left(Z_{T-1}, S^0_{T-1}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{Z_T}{S^0_T} \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right]\right) \\ &= \max\left(Z_{T-1}, S^0_{T-1}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_T}{S^0_T} \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right]\right). \end{aligned}$$
Primijetimo da je U_{T-1} $\mathcal{F}_{T-1}$-izmjeriva slučajna varijabla koja je vrijednost američke opcije Z u trenutku $T-1$.
- Pomaknimo se jedan vremenski trenutak unatrag i promotrimo što se događa u $t = T-2$. Investitor može odmah iskoristiti opciju i dobiti iznos Z_{T-2}, ili je ne iskoristiti. Ako ne iskoristi opciju, u trenutku $T-1$ ona će vrijediti U_{T-1}. Vrijednost (u trenutku $T-2$) opcije U_{T-1} s dospijećem $T-1$ po formuli (1.3.1) jednaka je
$$S^0_{T-2}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}} \,|\, \mathcal{F}_{T-2}\right].$$
Slijedi da je
$$U_{T-2} = \max\left(Z_{T-2}, S^0_{T-2}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}} \,|\, \mathcal{F}_{T-2}\right]\right).$$
- Indukcijom unatrag dobivamo da je za sve $t = 1, \ldots, T$,
$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, S^0_{t-1}\,\mathbf{E}^*\left[\frac{U_t}{S^0_t} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right]\right). \tag{1.5.1}$$

Za slučaj $S^0_t = (1+r)^t$, formula (1.5.1) prelazi u
$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[U_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\right).$$

Neka je $\widetilde{U}_t := U_t/S_t^0$ diskontirana cijena američke opcije. Uočimo da $\widetilde{U}$ zadovoljava sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_T &= \widetilde{Z}_T\,,\\ \widetilde{U}_t &= \max(\widetilde{Z}_t, \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) \quad 0 \le t \le T-1\,.\end{aligned}$$

Definicija 1.5.3. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka je, nadalje, dana filtracija $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ i $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces. Definiramo slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}U_T &= Z_T\,,\\ U_t &= \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) \quad 0 \le t \le T-1\,.\end{aligned}$$

Slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ zovemo **Snellov omotač** od $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$.

Dakle diskontirana cijena $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t,\, 0 \le t \le T)$ je Snellov omotač (obzirom na $\mathbf{F}$ i $\mathbf{P}^*$) diskontiranih unutarnjih vrijednosti $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_t,\, 0 \le t \le T)$ američkog slučajnog zahtjeva. Za razliku od europskog slučajnog zahtjeva, diskontirana cijena američkog slučajnog zahtjeva nije nužno $\mathbf{P}^*$-martingal, već samo $\mathbf{P}^*$-supermartingal.

Propozicija 1.5.4. *Niz $(U_t\,:\,0 \le t \le T)$ iz Definicije 1.5.3 je $\mathbf{P}$-supermartingal. To je najmanji $\mathbf{P}$ supermartingal koji dominira niz $(Z_t\,:\,0 \le t \le T)$.*

Dokaz. Iz definicije Snellovog omotača slijedi

$$\begin{aligned}U_{t-1} &\ge Z_{t-1}\,, t = 1, \dots T \qquad (U \text{ dominira } Z), \text{ i}\\ U_{t-1} &\ge \mathbf{E}[U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\,, t = 1, \dots T \qquad (U \text{ je supermartingal})\,.\end{aligned}$$

Dakle, $(U_t\,:\,0 \le t \le T)$ je $\mathbf{P}$-supermartingal koji dominira niz $(Z_t\,:\,0 \le t \le T)$, ostaje pokazati da je najmanji takav. Neka je $(X_t\,:\,t = 0, 1, \dots, T)$ supermartingal koji dominira Z, $X_t \ge Z_t$, $t = 0, 1, \dots, T$. Zbog $Z_T = U_T$ vrijedi $X_T \ge U_T$. Pretpostavimo da vrijedi $X_t \ge U_t$. Tada je

$$\begin{aligned}X_{t-1} &\ge \mathbf{E}[X_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] \ge \mathbf{E}[U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\,, \text{ i}\\ X_{t-1} &\ge Z_{t-1}\,,\end{aligned}$$

odnosno

$$X_{t-1} \ge \max(Z_{t-1}, \mathbf{E}[U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]) = U_{t-1}\,.$$

□

Uočimo da je $U_t \ge Z_t$ za sve t i u slučaju stroge nejednakosti vrijedi $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$. To sugerira da se pogodnim zaustavljanjem procesa U može dobiti martingal. Sljedeće pitanje na koje želimo dati odgovor je pitanje optimalnog vremena za korištenje američke opcije. Prvo se podsjetimo nekih pojmova iz teorije slučajnih procesa, kao što su vrijeme zaustavljanja i zaustavljeni proces.

DEFINICIJA 1.5.5. Slučajna varijabla $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ zove se **vrijeme zaustavljanja** ako za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Uočite da je po definiciji slučajna varijabla τ vrijeme zaustavljanja, ako događaj $\{\tau \le t\}$ ovisi samo o informaciji dostupnoj do trenutka t. Drugim riječima, u trenutku t znamo da li se vrijeme τ već dogodilo ili ne. Jednostavno se vidi da je uvjet iz definicije ekvivalentan sljedećem uvjetu: za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi

$$\{\tau = t\} = \{\tau \le t\} \setminus \{\tau \le t-1\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Neka je $X = (X_t\,, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. **Slučajni proces zaustavljen u vremenu** τ, u oznaci $X^\tau = (X^\tau_t\,, 0 \le t \le T)$ definiran je formulom

$$X^\tau_t(\omega) := X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega)\,,$$

odnosno preciznije, na skupu $\{\tau = s\}$ vrijedi

$$X^\tau_t = \begin{cases} X_s & \text{ako je } s \le t \\ X_t & \text{ako je } s > t \end{cases}$$

Uočimo da je uvijek $X^\tau_T = X_\tau$ i $X^\tau_0 = X_0$.

PROPOZICIJA 1.5.6. *Neka je $X = (X_t\,, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $X^\tau = (X^\tau_t\,, 0 \le t \le T)$ također adaptiran. Ako je X martingal (odnosno supermartingal), tada je i X^τ također martingal (odnosno supermartingal).*

DOKAZ. Za dokaz adaptiranosti primijetimo prvo da za Borelov skup $A \subset \mathbf{R}$ vrijedi

$$\{X_s \in A, \tau = s\} \in \mathcal{F}_s$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_s$), te

$$\{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_t$). Zato je

$$\begin{aligned} \{X^\tau_t \in A\} &= \cup_{s=0}^T \{X^\tau_t \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \bigcup \cup_{s=t+1}^T \{X_t \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \cup \{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

po gore pokazanom.

Definirajmo proces $\phi = (\phi_t\,, 1 \le t \le T)$ formulom

$$\phi_t := 1_{\{t \le \tau\}}\,,$$

(dakle, ϕ je jednak 1 do vremena τ, a nakon toga je nula). Uočimo da je $\{t \le \tau\} = \{\tau < t\}^c = \{\tau \le t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$ (zbog τ vrijeme zaustavljanja). To znači da je slučajni proces ϕ predvidiv. Nadalje, za $1 \le t \le T$ vrijedi

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{s=1}^t \phi_s (X_s - X_{s-1}) &= X_0 + \sum_{s=1}^t 1_{(s \le \tau)} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_0 + \sum_{s=1}^{t\wedge\tau} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_{t\wedge\tau} = X^\tau_t\,. \end{aligned}$$

Dakle, zaustavljen proces X^τ je martingalna transformacija procesa X pomoću predvidivog procesa ϕ. Sada tvrdnja slijedi iz Propozicije 1.2.7. $\square$

Vraćamo se dalje na analizu svojstava Snellovog omotača iz Definicije 1.5.3.

PROPOZICIJA 1.5.7. *Slučajna varijabla definirana formulom*

$$\tau_0 := \min\{t \geq 0\,, U_t = Z_t\}$$

je vrijeme zaustavljanja. Zaustavljen proces $U^{\tau_0} = (U_{t\wedge\tau_0}\,,\, 0 \leq t \leq T)$ *je martingal.*

DOKAZ. Zbog $U_T = Z_T$ slijedi da je τ_0 dobro definiran i $\tau_0 \in \{0, 1, \dots, T\}$. Nadalje, $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$, a za $t \geq 1$

$$\{\tau_0 = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Dakle, τ_0 je vrijeme zaustavljanja.

Zapišimo zaustavljen proces kao u dokazu Propozicije 1.5.6:

$$U_t^{\tau_0} = U_{t\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta U_j$$

gdje je $\phi_j = 1_{\{\tau_0 \geq j\}}$. Slijedi da je za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = 1_{\{t+1\leq\tau_0\}}(U_{t+1} - U_t)\,.$$

Po definiciji je $U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])$, te na skupu $\{t+1 \leq \tau_0\}$ vrijedi $U_t > Z_t$. Dakle, $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$, pa slijedi

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = 1_{\{t+1\leq\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje obje strane:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[1_{\{t+1\leq\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= 1_{\{t+1\leq\tau_0\}}\mathbf{E}[U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] \\
&= 1_{\{t+1\leq\tau_0\}}(\mathbf{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) = 0
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi zbog $\{t+1 \leq \tau_0\} = \{\tau_0 \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$. Dakle, $\mathbf{E}[U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_t] = 0$ za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. $\square$

Označimo sa $\mathcal{T}_{t,T}$ familiju svih vremena zaustavljanja koja primaju vrijednosti u skupu $\{t, t+1, \dots, T\}$. Uočimo da zbog Ω konačan skup slijedi da je i $\mathcal{T}_{t,T}$ također konačan skup.

KOROLAR 1.5.8. *Vrijeme zaustavljanja* τ_0 *zadovoljava*

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

DOKAZ. Budući da je U^{τ_0} martingal, vrijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbf{E}[U_T^{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

S druge strane, za sve $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$, iz Propozicije 1.5.6 slijedi da je U^σ supermartingal. Dakle,

$$U_0 \geq \mathbf{E}[U_T^\sigma\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0] \geq \mathbf{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

□

Ukoliko o slučajnom procesu Z mislimo kao o dobitku (Z_t je dobitak u trenutku t), tada nam Korolar 1.5.8 kaže da vrijeme zaustavljanja τ_0 maksimizira očekivani dobitak uz dano $\mathcal{F}_0$. Ako je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma] \,.$$

Napomena 1.5.9. Poopćenje Korolara 1.5.8 daje

$$U_t = \mathbf{E}[Z_{\tau_t} \,|\, \mathcal{F}_t] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t] \,,$$

gdje je $\tau_t := \min\{j \geq t \,,\, U_j = Z_j\}$.

Definicija 1.5.10. Vrijeme zaustavljanja τ je **optimalno** za slučajni proces $Z = (Z_t \,,\, 0 \leq t \leq T)$ ako vrijedi

$$\mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0] \,.$$

Po Korolaru 1.5.8, τ_0 je optimalno vrijeme zaustavljanja za Z. Sljedeći rezultat nam daje karakterizaciju optimalnih vremena zaustavljanja.

Teorem 1.5.11. *Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno ako i samo ako vrijedi:*

$$Z_\tau = U_\tau \quad i \quad U^\tau \text{ je martingal.} \tag{1.5.2}$$

Napomena 1.5.12. Zbog $\tau_0 = \min\{t \geq 0 \,,\, U_t = Z_t\}$, slijedi da je τ_0 najmanje optimalno vrijeme.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (1.5.2). Tada je $U_0 = \mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]$. Međutim, po Korolaru 1.5.8,

$$U_0 = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0] \,.$$

Dakle, τ je optimalno vrijeme zaustavljanja.

Obratno, pretpostavimo da je τ optimalno. Tada je

$$\begin{aligned} U_0 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0] \quad \text{(po Korolaru 1.5.8)} \\ &= \mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \quad \text{(zbog } \tau \text{ optimalno)} \\ &\leq \mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \\ &\leq U_0 \quad \text{(zbog } U \text{ supermartingal)} \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]$, pa zbog $U_\tau \geq Z_\tau$, slijedi $U_\tau = Z_\tau$. Nadalje,

$$\mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = U_0 \geq \mathbf{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \geq \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \,,$$

gdje nejednakosti vrijede zbog U supermartingal. Budući da su lijeva i desna strana gore jednake, imamo jednakost

$$\mathbf{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0] \,.$$

Budući da je $U_t^\tau \geq \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$ (zbog U^τ supermartingal), iz gornje jednakosti uvjetnih očekivanja ta dva izraza slijedi $U_t^\tau = \mathbf{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$. Međutim, to znači da je U^τ martingal. □

Sada želimo karakterizirati najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. Definicija tog optimalnog vremena zasniva se na Doobovoj dekompoziciji supermartingala. Podsjetimo se definicija neopadajućeg procesa i svojstva Doobove dekompozicije s kolegija *Slučajni procesi*.

DEFINICIJA 1.5.13. Slučajni proces $A = (A_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ je *neopadajući* ako za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi $A_t \leq A_{t+1}$.

PROPOZICIJA 1.5.14. *(Doobova dekompozicija) Neka je $U = (U_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ supermartingal. Tada postoje martingal $M = (M_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ i neopadajući, predvidiv proces $A = (A_t\,,\,0 \leq t \leq T)$, $A_0 = 0$, takvi da vrijedi $U = M - A$. Nadalje, gornja dekompozicija je jedinstvena.*

DOKAZ. Definiramo $A_0 = 0$ i $M_0 = U_0$, te induktivno za $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] \\ A_{t+1} &= A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]\,. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Tada je

$$\mathbf{E}[M_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = M_t + \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = M_t\,,$$

što znači da je $M = (M_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ martingal. Nadalje, zbog $E[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] \leq U_t$, slijedi da je $A_{t+1} \geq A_t$. Iz definicije je vidljivo da je A_{t+1} izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $A = (A_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ je neopadajući predvidiv proces sa $A_0 = 0$.

Očito je $U_0 = M_0 - A_0$. Pretpostavimo $U_t = M_t - A_t$. Tada je

$$\begin{aligned} M_{t+1} - A_{t+1} &= (M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) - (A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) \\ &= M_t + U_{t+1} - A_t - U_t = U_{t+1}\,. \end{aligned}$$

Time smo dokazali i dekompoziciju.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su $U = M - A = M' - A'$ dvije dekompozicije. Tada je

$$M_t - M'_t = A_t - A'_t\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,.$$

Zbog $A_0 = 0 = A'_0$ slijedi $M_0 = M'_0$. Pretpostavimo $A_t = A'_t$, otkud odmah dobivamo $M_t = M'_t$. Zato je

$$0 = M_t - M'_t = \mathbf{E}[M_{t+1} - M'_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[A_{t+1} - A'_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = A_{t+1} - A'_{t+1}\,,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz predvidivosti procesa A i A'. Dakle, $A_{t+1} = A'_{t+1}$. □

Neka je $Z = (Z_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ slučajni proces, te neka je $U = (U_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ njegov Snellov omotač. Najveće optimalno vrijeme zaustavljanja procesa Z može se karakterizirati pomoću neopadajućeg procesa A iz Doobove dekompozicije supermartingala U.

PROPOZICIJA 1.5.15. *Najveće optimalno vrijeme slučajnog procesa Z dano je formulom*

$$\tau_{\max} = \begin{cases} T & \text{ako je } A_T = 0 \\ \min\{t \geq 0\,,\,A_{t+1} \neq 0\} & \text{ako } A_T \neq 0\,. \end{cases}$$

DOKAZ. Budući da je A predvidiv i da je za $t < T$

$$\{\tau_{\max} \leq t\} = \{A_{t+1} \neq 0\},$$

$\tau_{\max}$ je vrijeme zaustavljanja. Uočimo da vrijedi $A_t = 0$ za sve $t \leq \tau_{\max}$. Zato iz $U_t = M_t - A_t$ za sve t slijedi $U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}}$. Budući da je M martingal, to je i $M^{\tau_{\max}}$ martingal, pa je $U^{\tau_{\max}}$

također martingal. Po Teoremu 1.5.11 je stoga za optimalnost vremena $\tau_{\max}$ dovoljno pokazati da je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} U_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T \,. \end{aligned}$$

Primijetimo da na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$ vrijedi $A_t = 0$ i $A_{t+1} > 0$. Stoga je na tom događaju $U_t = M_t - A_t = M_t$, te nadalje,

$$\mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[M_{t+1} - A_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t - A_{t+1} < M_t = U_t \,.$$

Zbog gornje nejednakosti i definicije $U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])$, slijedi da je $U_t = Z_t$ na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$. Dakle

$$U_{\tau_{\max}} = \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} Z_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T = Z_{\tau_{\max}} \,.$$

Preostaje pokazati da je $\tau_{\max}$ najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je τ vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbf{P}(\tau > \tau_{\max}) > 0$. Za $\omega \in \Omega$ takav da je $\tau(\omega) > \tau_{\max}(\omega)$ vrijedi $A_\tau(\omega) > 0$. Zato je i $\mathbf{P}(A_\tau > 0) > 0$ otkud slijedi da je $\mathbf{E}[A_\tau] > 0$. Sada imamo

$$\mathbf{E}[U_\tau] = \mathbf{E}[M_\tau] - \mathbf{E}[A_\tau] < \mathbf{E}[M_\tau] = \mathbf{E}[M_0] = \mathbf{E}[U_0] \,,$$

što znači da U^τ nije martingal. Po Teoremu 1.5.11, τ nije optimalno vrijeme. □

Zadatak 1.5.16. Vrtimo *Kolo sreće* označeno brojevima $1, 2, \ldots, 50$ i to najviše $T \in \mathbf{N}$ puta. U svakom trenutku $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ možemo stati i uzeti iznos koji smo dobili u tom trenutku. Odredimo optimalno vrijeme zaustavljanja za $T = 4$.

Rješenje: Označimo s $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ proces dobitka u ovoj igri. Uočimo da su slučajne varijable $Z_0, \dots, Z_T$ nezavisne i da je

$$Z_0 = 0,\ Z_t \sim U(1, \dots, 50),\ t = 1, \dots T.$$

Neka je $\mathbf{F}$ prirodna filtracija procesa Z. Iz Teorema 1.5.11 (odnosno Napomene 1.5.12) slijedi da je optimalno vrijeme zaustavljanja za ovu igru određeno Snellovim omotačem za proces Z. Prisjetimo se, Snellov omotač za Z je slučajni proces $U = (U_t : 0 \leq t \leq T)$ određen s

$$\begin{aligned} &U_T = Z_T\,, \\ &U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1}]) \quad 0 \leq t \leq T-1\,. \end{aligned}$$

Pokaže se da vrijedi rekurzija

$$\mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[\max\{Z_t, \mathbb{E}U_{t+1}\}] = \frac{51}{2} - \frac{(\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1)\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil}{100} + \frac{\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1}{50}\mathbb{E}U_{t+1}.$$

Sada rekurzivno računamo $\mathbb{E}U_t$ za $t = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_4] &= \mathbb{E}Z_4 = \frac{1 + \ldots + 50}{50} = \frac{50 \cdot 51}{2 \cdot 50} = 25.5 \\ \mathbb{E}[U_3] &= \mathbb{E}[\max\{Z_3, \mathbb{E}U_4\}] = \frac{51}{2} - \frac{(\lceil 25.5 \rceil - 1)\lceil 25.5 \rceil}{100} + \frac{\lceil 25.5 \rceil - 1}{50} \cdot 25.5 = 31.75 \\ \mathbb{E}[U_2] &= \mathbb{E}[\max\{Z_2, \mathbb{E}U_3\}] = \ldots = 35.265 \\ \mathbb{E}[U_1] &= \mathbb{E}[\max\{Z_1, \mathbb{E}U_2\}] = \ldots = 37.5855. \end{aligned}$$

Odredimo Snellov omotač:

$$\begin{aligned} U_4 &= Z_4 \\ U_3 &= \max\{Z_3, 25.5\} \\ U_2 &= \max\{Z_2, 31.75\} \\ U_1 &= \max\{Z_1, 35.265\} \\ U_0 &= \max\{Z_0, 37.5855\} = 37.5855. \end{aligned}$$

Jedno optimalno vrijeme zaustavljanja je $\tau_0 = \min\{t : U_t = Z_t\}$, odnosno

$$\tau_0 = \begin{cases} 1, & Z_1 \geq 36 \\ 2, & Z_1 \leq 35,\ Z_2 \geq 32 \\ 3, & Z_1 \leq 35,\ Z_2 \leq 31,\ Z_3 \geq 26 \\ 4, & \text{inače} \end{cases}.$$

Opišimo sada optimalnu strategiju igre:

- Vrtimo kolo 1. put – ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 36, stanemo, u protivnom vrtimo dalje;
- Vrtimo kolo 2. put – ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 32, stanemo, u protivnom vrtimo dalje;
- Vrtimo kolo 3. put – ukoliko smo na kolu dobili broj veći ili jednak 26, stanemo, u protivnom je naš konačni dobitak broj dobiven u 4. vrtnji.

Iz Korolara 1.5.8 znamo da je optimalni očekivani dobitak jednak $\mathbb{E}Z_{\tau_0} = U_0 = 37.5855$. □

Na kraju ovog odjeljka izračunat ćemo Snellov omotač u slučaju kada je proces Z funkcija Markovljevog lanca. Prvo ćemo se podsjetiti definicije Markovljevog lanca $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ gdje je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ filtracija. Pretpostavit ćemo da X prima vrijednosti u prebrojivom skupu E, te da je P neka prijelazna matrica.

Definicija 1.5.17. Slučajni proces $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ s vrijednostima u E je **homogen Markovljev lanac** u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ s prijelaznom matricom P, ako je X adaptiran u odnosu na $\mathbf{F}$, te ako za svaku funkciju $f : E \to \mathbf{R}$ vrijedi

$$\mathbf{E}[f(X_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t] = Pf(X_t)\,, \qquad \text{za sve } t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}\,. \tag{1.5.4}$$

Ovdje je $Pf : E \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s

$$Pf(x) := \sum_{y \in E} P(x, y) f(y)\,.$$

Napomena 1.5.18. Uočimo da je promatrana definicija u skladu s jednostavnom formulacijom Markovljevog lanca. Pretpostavimo da je filtracija $\mathbf{F}$ prirodna filtracija procesa X. Tada su događaji u $\mathcal{F}_t$ generirani atomima $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$, $x_0, x_1, \ldots, x_t \in E$. Za specijalnu funkciju f oblika $f = 1_{\{z\}}$, $z \in E$, iz formule (1.5.4) i definicije uvjetnog očekivanja slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] 1_{\{X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= \mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\mathcal{F}_t] 1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= P1_{\{z\}}(X_t) 1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}}\,.
\end{aligned}$$

To znači da na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$ vrijedi

$$\mathbf{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P1_{\{z\}}(X_t)\,.$$

Budući da je

$$P1_{\{z\}}(x) = \sum_{y \in E} P(x, y) 1_{\{z\}}(y) = P(x, z)\,,$$

slijedi da je na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$

$$\mathbf{P}[X_{t+1} = z \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(X_t, z) = P(x_t, z)\,.$$

To znači da za sve $x_0, x_1, \ldots, x_t, z \in E$ vrijedi

$$\mathbf{P}[X_{t+1} = z \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(x_t, z)\,,$$

šo je klasična definicija Markovljevog svojstva.

Propozicija 1.5.19. *Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces definiran formulom*

$$Z_t = \psi(t, X_t)\,,$$

gdje je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ homogen Markovljev lanac s vrijednostima u E i prijelaznom matricom P, a $\psi : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ funkcija. Tada je Snellov omotač U procesa Z dan formulom

$$U_t = u(t, X_t)\,,$$

gdje je $u : \{0, 1, \dots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa*

$$\begin{aligned} u(T, x) &:= \psi(T, x)\,, \\ u(t, x) &:= \max(\psi(t, x), Pu(t+1, x))\,, \quad t = 0, 1, \dots, T-1\,. \end{aligned}$$

DOKAZ. Stavimo $V_t := u(t, X_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Tada je

$$V_T = u(T, X_T) = \psi(T, X_T) = Z_T\,,$$

te za $t \le T-1$,

$$\begin{aligned} V_t &= u(t, X_t) = \max(\psi(t, X_t), Pu(t+1, X_t)) \\ &= \max(Z_t, \mathbf{E}[u(t+1, X_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t]) \\ &= \max(Z_t, \mathbf{E}[V_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])\,. \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo formulu (1.5.4) za funkciju $f(\cdot) = u(t+1, \cdot)$. Zbog $U_T = Z_T = V_T$, indukcijom slijedi $U_t = V_t$, $t \le T-1$. □

ZADATAK 1.5.20. Igramo *Kolo sreće* s poljima $100, 500, 1000$ i *bankrot* i vrtimo kolo najviše $T = 3$ puta. U svakom trenutku možemo stati i uzeti ukupni iznos koji smo dobili **do** tada. U slučaju da dobijemo polje *bankrot*, gubimo osvojeni iznos i igra prestaje. Odredimo optimalno vrijeme zaustavljanja za ovu igru.

Sljedeći ilustrativni primjer je jedan od najpoznatijih problema optimizacije preko Snellovog omotača, gdje je potonji Markovljev proces vremenski nehomogen.

PRIMJER 1.5.21. Na razgovor za posao prijavilo se $N \in \mathbf{N}$ kandidata. Njihove kvalifikacije određene su realnim brojevima $a_1 > a_2 > \ldots > a_N$, od najbolje do najlošije. Kandidati bivaju intervjuirani redom, na slučajan način, stoga su poslodavcu su njihove kvalifikacije nepoznate. Poslodavac mora za vrijeme intervjua s kandidatom odlučiti hoće li zaposliti tog kandidata. Ukoliko mu ne ponudi posao, mora izabrati novog zaposlenika iz skupa preostalih (do tad neintervjuiranih) kandidata. Odredimo optimalnu strategiju odabira najboljeg kandidata.

Označimo s Y_i kvalifikaciju i-tog intervjuiranog kandidata. Obzirom da je kvalifikacija i-tog intervjuiranog kandidata nepoznata poslodavcu, Y_i je slučajna varijabla. Uočimo da je slučajni vektor $(Y_1, ..., Y_N)$ zapravo jedna slučajna permutacija skupa $\{a_1, ..., a_N\}$. Iako mu je kvalifikacija i-tog intervjuiranog kandidata nepoznata, poslodavac može na temelju intervjua usporediti i-tog intervjuiranog kandidata s prethodno intervjuiranim kandidatima (odnosno odrediti rang od Y_i s obzirom na $Y_1, \dots, Y_{i-1}$). Označimo s X_i rang i-tog intervjuiranog kandidata s obzirom na prethodno intervjuirane kandidate,

$$X_i = \sum_{k=1}^{i} 1_{\{Y_i < Y_k\}}.$$

Uočimo da će najbolji kandidat u i-tom krugu intervjua imati rang 1, a najlošiji rang i. Cilj nam je odrediti optimalno vrijeme zaustavljanja τ s obzirom na proces rangova X, koje će maksimizirati vjerojatnost odabira najboljeg kandidata za posao, odnosno maksimizirati

$$\mathbf{P}(Y_\tau = a_1).$$

Uočimo da su, zbog slučajnog rasporeda kandidata, slučajne varijable $X_1, \dots, X_N$ nezavisne i da je

$$X_i \sim U(\{1, \dots, i\}), \qquad i = 1, \dots, N.$$

Slučajni proces $X = (X_i : 1 \leq i \leq N)$ je **nehomogen** Markovljev lanac na skupu stanja $E = \{1, \dots, N\}$ s prijelaznom matricom P_i gdje je

$$p_i(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & x \in \{1, \dots, i-1\},\ y \in \{1, \dots, i\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} .$$

Za funkciju $f \colon \{0, 1, \dots, N\} \times E \to \mathbf{R}$ i $x \in \{1, \dots, i-1\}$, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ definiramo

$$Pf(i,x) := \sum_{y \in E} f(i,y) p_i(x,y) = \sum_{k=1}^{i} f(i,k) \frac{1}{i} .$$

Uočimo da za $i < N$ slučajna varijabla Y_i nije $\mathcal{F}_i = \sigma\{X_1, \dots, X_i\}$-izmjeriva, obzirom da vrijednost Y_i ne možemo odrediti na temelju vektora $(X_1, \dots, X_i)$. Definirajmo proces $Z = (Z_i : 0 \leq i \leq T)$ kao funkciju Markovljevog lanca X,

$$Z_i = \psi(i, X_i) := \mathbf{P}(Y_i = a_1 | X_i) = \mathbf{P}(Y_i = a_1 | X_1, \dots, X_i),$$

pri čemu je

$$\psi(i,x) = \begin{cases} \frac{i}{N}, & x = 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uistinu,

$$\begin{aligned} \psi(i,1) &= \frac{\mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i = 1)}{\mathbf{P}(X_i = 1)} = \frac{\mathbf{P}(Y_i = a_1)}{\mathbf{P}(X_i = 1)} = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{i}} = \frac{i}{N}, \\ \psi(i,x) &= \mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i = x) \leq \mathbf{P}(Y_i = a_1, X_i > 1) = 0,\ x \neq 1. \end{aligned}$$

Neka je τ slučajno vrijeme zaustavljanja za proces X. Tada je $\{\tau = k\} \in \sigma\{X_1, \dots, X_k\}$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_\tau = a_1) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(Y_k = a_1,\ \tau = k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} 1_{\{\tau = k\}}] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[\mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} 1_{\{\tau = k\}} | X_1, \dots, X_k]] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{\tau = k\}} \mathbf{E}[1_{\{Y_k = a_1\}} | X_1, \dots, X_k]] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}[1_{\{\tau = k\}} \psi(k, X_k)] = \mathbf{E}[\psi(\tau, X_\tau)] = \mathbf{E}[Z_\tau]. \end{aligned}$$

Stoga je optimalno vrijeme zaustavljanja za naš problem upravo optimalno vrijeme zaustavljanja za proces Z. Po Korolaru 1.5.8 znamo da je jedno optimalno vrijeme zaustavljanja τ_0. Koristimo Propoziciju 1.5.19 da odredimo Snellov omotač U za Z, $U_i = u(i, X_i)$ gdje je

$$\begin{aligned} u(N,x) &= \psi(N,x)\,, \\ u(i,x) &= \max(\psi(i,x), Pu(i+1,x)) \\ &= \max\left(\psi(i,x), \sum_{k=1}^{i+1} u(i+1,k) \frac{1}{i+1}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1\,. \end{aligned}$$

Tada vrijedi da je

$$\mathbf{P}(Y_{\tau_0} = a_1) = U_0 = u(0, X_0) = \max(\psi(0, X_0), Pu(1, X_0)) = \max(0, Pu(1,0)) = u(1,1).$$

Odredimo sada $u(i,x)$:

- $u(N,1) = \psi(N,1) = \frac{N}{N} = 1$, $u(N,x) = \psi(N,x) = 0$, $x \in \{2,\dots,N\}$;
- $u(N-1,1) = \max(\psi(N-1,1), Pu(N,1)) = \max(\frac{N-1}{N}, u(N,1)\cdot\frac{1}{N}) = \max(\frac{N-1}{N}, \frac{1}{N})$
  Uočimo $u(N-1,1) = \psi(N-1,1) = \frac{N-1}{N}$ ako je $\frac{1}{N-1} \le 1$, u suprotnom je $u(N-1,1) = \frac{1}{N} > \psi(N-1,1)$
  $u(N-1,x) = \max(\psi(N-1,x), Pu(N,x)) = \max(0, u(N,1)\cdot\frac{1}{N}) = \frac{1}{N} > \psi(N-1,x)$;
- Ako je $\frac{1}{N-1} \le 1$ $(N-1 \ge 1)$ imamo:

$$\begin{aligned} u(N-2,1) &= \max(\psi(N-2,1), Pu(N-1,1)) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, (u(N-1,1)+\ldots+u(N-1,N-1))\cdot\frac{1}{N-1}\right) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, \left(\frac{N-1}{N} + (N-2)\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N}\right) \\ &= \max\left(\frac{N-2}{N}, \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)\right) \end{aligned}$$

  i $u(N-2,x) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right) > \psi(N-2,x)$, $x > 1$.
  Uočimo $u(N-2,1) = \psi(N-2,1) = \frac{N-2}{N}$ ako je $\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2} \le 1$, u suprotnom je $u(N-2,1) > \psi(N-2,1)$.
  $u(N-2,x) = \max(\psi(N-2,x), Pu(N-1,x)) = \max\left(0, \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)\right) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)$;
  Ako je $\frac{1}{N-1} > 1$ onda je za sve x

$$u(N-2,x) = \max(\psi(N-2,x), Pu(N-1,x)) = \frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right);$$

- Ovaj postupak ima smisla provoditi dok god je $u(m,1) = \psi(m,1)$, odnosno do trenutka m kad je

$$\sum_{k=m}^{N-1}\frac{1}{k} \le 1 < \sum_{k=m-1}^{N-1}\frac{1}{k}.$$

  Tada je za sve $n \ge m$

$$\begin{aligned} u(n,1) &= \psi(n,1) = \frac{n}{N}, \\ u(n,x) &= \frac{n}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\ldots+\frac{1}{n}\right) > \psi(n,x),\ x > 1, \end{aligned}$$

  te je

$$\begin{aligned} u(m-1,1) &= \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right) > \psi(m,1), \\ u(m-1,x) &= \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right) > \psi(m,x),\ x > 1. \end{aligned}$$

- Uočimo da je $u(m-1,\cdot)$ konstantna funkcija, pa je za $n < m$ i sve $x \in \{1,\dots,n\}$

$$u(n,x) = \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\ldots+\frac{1}{m-1}\right).$$

Kako je $\tau_0 = \min\{n : U_n = Z_n\} = \min\{n : u(n,X_n) = \psi(n,X_n)\}$ i

$$\begin{aligned} &U_n > Z_n \text{ za } n < m \\ &U_n = Z_n \text{ akko } n \ge m \text{ i } X_n = 1, \end{aligned}$$

slijedi da je $\tau_0 = \min\{n \ge m : X_n = 1\}$. Prema tome pobjednička strategija je propustiti prvih $m-1$ kandidata i onda ponuditi posao prvom sljedećem kandidatu koji bude najbolje rangiran u odnosu na prethodno intervjuirane kandidate. Time maksimiziramo vjerojatnost odabira najboljeg kandidata koja je jednaka

$$\mathbf{P}(Y_{\tau_0} = a_1) = u(1,1) = \frac{m-1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) \approx \frac{1}{e} \approx 36.8\% \qquad \text{(za veliki } N\text{)}.$$

Vraćamo se na problem optimalnog korištenja američke opcije $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$. Podsjetimo se, vrijednost američke opcije dana je slučajnim nizom $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$:

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max\left(Z_t, S_t^0\, \mathbf{E}^*\left[\tfrac{U_{t+1}}{S_{t+1}^0} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\right)\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,. \end{aligned}$$

Iz defnicije procesa U slijedi da je $U_t \geq Z_t$. Vrijednost Z_t zovemo **unutarnja vrijednost opcije** (engl. *intrinsic value*), dok razliku $U_t - Z_t$ zovemo **vremenska vrijednost opcije** (engl. *time value*). Dakle, vrijednost američke opcije u trenutku t jednaka je zbroju unutarnje vrijednosti i vremenske vrijednosti.

Niz $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ diskontiranih cijena opcije definiran formulom $\widetilde{U}_t = U_t/S_t^0$ zadovoljava

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_T &= \widetilde{Z}_T\,, \\ \widetilde{U}_t &= \max(\widetilde{Z}_t, \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,. \end{aligned}$$

Dakle, slučajni proces $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je Snellov omotač slučajnog procesa $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ (s obzirom na vjerojatnost $\mathbf{P}^*$). Iz Napomene 1.5.9 slijedi

$$\widetilde{U}_t = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t]\,,$$

otkud imamo

$$U_t = S_t^0 \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^*\left[\frac{Z_\sigma}{S_\sigma^0} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\,. \tag{1.5.5}$$

Primjer 1.5.22. Promotrimo primjer izračuna cijene američke opcije u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. Podsjetimo se, slučajni povrati modelirani su nizom nezavisnih slučajnih varijabli $(X_t \,:\, 1 \leq t \leq T)$ s vrijednostima a ili b. Vrijednost rizične imovine u trenutku t jednaka je $S_t = S_{t-1}(1 + X_t)$. Nerizična imovina dana je s $S_t^0 = (1+r)^t$ gdje je r kamatna stopa. Uz uvjet $a < r < b$ model ne dopušta arbitražu i potpun je. Jedinstvena martingalna mjera $\mathbf{P}^*$ dana je s $\mathbf{P}^*(X_t = b) = p^*$, $\mathbf{P}^*(X_t = a) = 1 - p^*$, gdje je $p^* = \frac{r-a}{b-a}$.

Primijetimo da je $(S_t \,:\, 0 \leq t \leq T)$ Markovljev lanac u odnosu na prirodnu filtraciju $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t) = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$. Prostor stanja tog lanca je $E = \{S_0(1+a)^i(1+b)^j \,:\, 0 \leq i, j \leq T\}$, a prijelazna matrica Q dana je s

$$Q(x, x(1+a)) = 1 - p^*\,, \quad Q(x, x(1+b)) = p^* \quad , x \in E\,.$$

Pretpostavimo da je američka opcija $Z = (Z_t \,:\, 0 \leq t \leq T)$ funkcija Markovljevog lanca $(S_t \,:\, 0 \leq t \leq T)$, odnosno da za neku funkciju $\psi : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vrijedi $Z_t = \psi(t, S_t)$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Primijetimo da je to slučaj za američke call i put opcije, uz $\psi(T, x) = (x - K)_+$, odnosno $\psi(T, x) = (K - x)_+$.

Tada je i $\widetilde{Z} = (\widetilde{\psi}(t, S_t) \,:\, 0 \leq t \leq T)$ je funkcija Markovljevog lanca S, za $\widetilde{\psi}(t, x) := (1+r)^{-t}\psi(t, x)$. Snellov omotač od $\widetilde{Z}$ po Propoziciji 1.5.19 jednak je

$$\widetilde{U}_t = u(t, S_t)\,,$$

gdje je $u : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa

$$\begin{aligned} u(T,x) &= \widetilde{\psi}(T,x)\,, \\ u(t,x) &= \max(\widetilde{\psi}(t,x), Qu(t+1,x))\,, \quad t = 0,1,\ldots,T-1\,. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Kako je $U_t = (1+r)^t \widetilde{U}_t = (1+r)^t u(t, S_t)$, definiramo funkciju $\bar{u} : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ sa

$$\bar{u}(t,x) = (1+r)^t u(t,x)\,.$$

Sada iz (1.5.6) slijedi da je

$$\bar{u}(T,x) = \psi(T,x)\,, \tag{1.5.7}$$

$$\bar{u}(t,x) = \max\big(\psi(t,x), \frac{Q\bar{u}(t+1,x)}{1+r}\big)\,, \quad t = 0,1,\ldots,T-1\,. \tag{1.5.8}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} & Q\bar{u}(t+1,x) \\ &= Q(x, x(1+a))\,\bar{u}(t+1, x(1+a)) + Q(x, x(1+b))\,\bar{u}(t+1, x(1+b)) \\ &= (1-p^*)\,\bar{u}(t+1, x(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, x(1+b)) \\ &=: f(t+1, x). \end{aligned}$$

□

Pronađimo sada optimalno vrijeme za iskoristiti američku opciju. To će biti vrijeme zaustavljanja iz skupa svih vremena zaustavljanja $\mathcal{T}_{0,T}$. Za kupca opcije besmisleno je iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $U_t > Z_t$, jer je tada vrijednost opcije U_t veća od njene unutarnje vrijednosti Z_t (što znači da je bolje prodati opciju za U_t nego je iskoristiti i dobiti Z_t – vremensku vrijednost opcije veća je od nule). Dakle, optimalno vrijeme τ mora zadovoljavati $U_\tau = Z_\tau$. Najmanje takvo vrijeme je

$$\tau_0 = \min\{t \geq 0\,,\, U_t = Z_t\}\,.$$

Primjenimo Doobovu dekompoziciju na $\mathbf{P}^*$-supermartingal $\widetilde{U}$. Vrijedi $\widetilde{U} = \widetilde{M} - \widetilde{A}$, gdje je $\widetilde{M}$ $\mathbf{P}^*$-martingal, a $\widetilde{A}$ je neopadajući predvidiv proces. Budući da je tržište potpuno slijedi da je slučajni zahtjev $S^0_T \widetilde{M}_T$ dostižan, pa postoji samofinancirajuća strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = S^0_T \widetilde{M}_T$, odnosno nakon diskontiranja, $\widetilde{V}_T(\phi) = \widetilde{M}_T$. Budući da je slučajni niz $(\widetilde{V}_t(\phi)\,,\, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal (vidi dokaz Teorema 1.2.11), vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\widetilde{V}_T(\phi)\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{M}_T\,|\,\mathcal{F}_t] = \widetilde{M}_t\,.$$

Dakle, martingal $\widetilde{M}$ jednak je procesu diskontiranih vrijednosti portfelja ϕ koji replicira slučajni zahtjev $S^0_T \widetilde{M}_T$. Specijalno imamo $\widetilde{U}_t = \widetilde{V}_t(\phi) - \widetilde{A}_t$, otkud slijedi

$$U_t = V_t(\phi) - A_t\,, \tag{1.5.9}$$

gdje smo definirali $A_t := S^0_t \widetilde{A}_t$. Gornja formula kaže da je cijena U_t američke opcije jednaka vrijednosti (nekog) portfelja minus nešto nenegativno.

Promotrimo detaljnije što nam kaže formula (1.5.9) s pozicije pisca opcije. Pisac opcije prodaje američku opciju $Z = (Z_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ u trenutku $t = 0$ za njenu vrijednost U_0. Iz (1.5.9) prvo slijedi da je $U_0 = V_0(\phi)$ za neki portfelj ϕ. Pisac opcije kupuje u trenutku $t = 0$ samofinancirajući portfelj ϕ po cijeni U_0 (upravo za koliko je prodao američku opciju Z). U svakom daljnjem trenutku pisac slijedi strategiju ϕ, što mu u trenutku t vrijedi $V_t(\phi)$. Iz formule (1.5.9) vidimo da je $V_t(\phi) \geq U_t$, a s druge strane, $U_t \geq Z_t$. Dakle, $V_t(\phi) \geq Z_t$, za sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. To znači da pisac opcije u svakom trenutku t može pokriti obvezu koja izlazi iz američke opcije Z. Štoviše, ako kupac opcije odluči iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $Z_t < V_t(\phi)$, pisac opcije ostvaruje profit od $V_t(\phi) - Z_t > 0$. Očito je da takav trenutak t ne bi smio biti optimalan za iskoristiti opciju, jer bismo u protivnom imali arbitražu.

S druge strane, nema smisla iskoristiti opciju nakon vremena

$$\tau_{\max} = \min\{t \geq 0\,,\, \widetilde{A}_{t+1} \neq 0\} = \min\{t \geq 0\,,\, A_{t+1} \neq 0\}\,.$$

Zaista, ako kupac opcije iskoristi opciju u trenutku $\tau_{\max}$ (uočimo da je tada $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ – vidi Propoziciju 1.5.15 i njen dokaz), tada će dobiti iznos $U_{\tau_{\max}}$ koji je jednak $V_{\tau_{\max}}(\phi)$ (zbog $A_{\tau_{\max}} = 0$). Za tu vrijednost kupac opcije može kupiti portfelj ϕ, te slijedivši tu strategiju ϕ, generira bogatstvo koje je u trenucima $\tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \dots, T$ striktno veće nego vrijednost opcije u tim trenucima: $V_t(\phi) = U_t + A_t > U_t$, $t = \tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \dots, T$. Dakle, iskorištenje opcije nakon trenutka $\tau_{\max}$ generira manju vrijednost nego iskorištenje opcije u trenutku $\tau_{\max}$ i slijeđenje strategije ϕ.

Dakle, drugi uvjet na optimalno vrijeme za iskoristiti opciju je $\tau \leq \tau_{\max}$. Dakle, za optimalno vrijeme τ vrijedi $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$, te $A^\tau = 0$. Iz $\widetilde{U} = \widetilde{M} - \widetilde{A}$, dobivamo $\widetilde{U}^\tau = \widetilde{M}^\tau$, što znači da je $\widetilde{U}^\tau$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Usporedimo li s Teoremom 1.5.11, vidimo da su optimalna vremena za iskoristiti opciju optimalna vremena zaustavljanja za slučajni niz $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$.

Vratimo se još jednom na poziciju pisca opcije koji se štiti prateći strategiju ϕ. Ako kupac iskoristi opciju u trenutku σ koje nije optimalno, tada je ili $U_\sigma > Z_\sigma$, ili $A_\sigma > 0$. U prvom slučaju pisac ima profit $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = (1.5.9) = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (zbog $U_\sigma > Z_\sigma$), a u drugom slučaju profit je opet $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (ovaj put zbog $A_\sigma > 0$).

NAPOMENA 1.5.23. Kako za optimalno vrijeme zaustavljanja τ za američki slučajni zahtjev Z vrijedi $U_\tau = M_\tau = V_\tau(\phi)$, na ϕ možemo gledati i kao na *hedging* portfelj za Z.

PRIMJER 1.5.24. Odredimo sada hedging portfelj $\phi = (\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)\,, 0 \leq t \leq T)$ za američki slučajni zahtjev u CRR modelu (vidi Primjer 1.5.22). Prisjetimo se da je ϕ portfelj koji replicira slučajni zahtjev $M_T = (1+r)^T \widetilde{M}_T$, gdje je $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t\,, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal iz Doobove dekompozicije $\mathbf{P}^*$ supermartingala $\widetilde{U}$:

$$\widetilde{U} = \widetilde{M} - \widetilde{A}.$$

Prvo izračunajmo proces $M = (M_t\,, 0 \leq t \leq T)$ gdje je $M_t = (1+r)^t \widetilde{M}_t$. Zbog $\widetilde{M}_0 = \widetilde{U}_0$, imamo $M_0 = U_0$. Nadalje (vidi (1.5.3)),

$$\widetilde{M}_{t+1} = \widetilde{M}_t + \widetilde{U}_{t+1} - \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,.$$

Množenjem s $(1+r)^{t+1}$ dobivamo

$$M_{t+1} = (1+r)M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}^*[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,.$$

Kako je $U_{t+1} = \bar{u}(t+1, S_{t+1})$, vidi (1.5.7), zbog Markovljevog svojstva imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*[\bar{u}(t+1, S_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}^*[\bar{u}(t+1, S_t(1+X_{t+1})) \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= (1-p^*)\,\bar{u}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, S_t(1+b))\,.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} M_{t+1} = (1+r)M_t + \bar{u}(t+1, S_{t+1}) \\ -\left[(1-p^*)\,\bar{u}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, S_t(1+b))\right]. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

S druge strane, budući da ϕ replicira M_T,

$$M_{t+1} = \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1}S_{t+1}\,. \tag{1.5.11}$$

Izjednačavanjem s (1.5.10) dobivamo

$$\begin{aligned} \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1}S_{t+1} = (1+r)M_t + \bar{u}(t+1, S_{t+1}) \\ -\left[(1-p^*)\,\bar{u}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, S_t(1+b))\right]. \end{aligned}$$

Množimo s $1_{(X_{t+1}=a)}$, računamo uvjetno očekivanje $\mathbf{E}^*[\cdot\,|\,\mathcal{F}_t]$ i kratimo s $\mathbf{P}^*(X_{t+1} = a)$ (vidi sličan račun za replicirajući portfelj europske call opcije na kraju drugog poglavlja). Slijedi:

$$\begin{aligned} \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1}S_t(1+a) = (1+r)M_t + \bar{u}(t+1, S_t(1+a)) \\ -\left[(1-p^*)\,\bar{u}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, S_t(1+b))\right]. \end{aligned}$$

Na isti način dobijemo

$$\begin{aligned} \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi^1_{t+1}S_t(1+b) = (1+r)M_t + \bar{u}(t+1, S_t(1+b)) \\ -\left[(1-p^*)\,\bar{u}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,\bar{u}(t+1, S_t(1+b))\right]. \end{aligned}$$

Oduzimanjem slijedi

$$\phi^1_{t+1}S_t(b-a) = \bar{u}(t+1, S_t(1+b)) - \bar{u}(t+1, S_t(1+a))\,,$$

otkud dobivamo

$$\phi^1_{t+1} = \frac{\bar{u}(t+1, S_t(1+b)) - \bar{u}(t+1, S_t(1+a))}{S_t(b-a)} =: \Delta(t+1, S_t)\,,$$

gdje funkciju $\Delta : \{1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zovemo **delta opcije**.

Iz (1.5.11) i činjenice da je ϕ samofinancirajuća, slijedi da je pozicija u gotovini jednaka

$$\phi^0_{t+1} = \frac{M_{t+1} - \Delta(t+1, S_t)S_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} = \frac{M_t - \Delta(t+1, S_t)S_t}{(1+r)^t}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

□

Pitanje koje se postavlja prirodno je kolika je ralika između vrijednosti europske i analogne američke opcije. Promotrimo detaljnije vezu između američke opcije $Z = (Z_t\,, 0 \le t \le T)$ i europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$.

PROPOZICIJA 1.5.25. *Neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije $Z = (Z_t\,, 0 \le t \le T)$, te neka je C_t vrijednost u trenutku t europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$. Tada vrijedi $U_t \ge C_t$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$. Nadalje, ako je $C_t \ge Z_t$ za svaki t, tada je $U_t = C_t$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$.*

DOKAZ. Budući da je diskontirani proces $\widetilde{U}$ $\mathbf{P}^*$-supermartingal, vrijedi

$$\widetilde{U}_t \ge \mathbf{E}^*[\widetilde{U}_T\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{Z}_T\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\widetilde{C}_T\,|\,\mathcal{F}_t] = \widetilde{C}_t$$

što dokazuje prvu tvrdnju.

Pretpostavimo da je $C_t \geq Z_t$ za svaki t. Slijedi da je $\widetilde{C} \geq \widetilde{Z}$, t.j. $\widetilde{C}$ dominira $\widetilde{Z}$. Budući da je $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$-martingal, to je $\widetilde{C}$ ujedno i $\mathbf{P}^*$-supermartingal. Međutim, $\widetilde{U}$ je Snellov omotač niza $\widetilde{Z}$, dakle najmanji $\mathbf{P}^*$-supermartingal koji dominira $\widetilde{Z}$. Zato je $\widetilde{U} \leq \widetilde{C}$, što dokazuje i drugu tvrdnju. □

Promotrimo sada američku call opciju na prvu financijsku imovinu sa cijenom izvršenja K. Tada je $Z_t = (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Neka je, kao i do sada, C_t vrijednost u trenutku t europske call opcije $(S_T^1 - K)^+$, te neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_t &= (1+r)^{-T}\mathbf{E}^*[(S_T^1 - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}^*[(\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T})^+ \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&\geq \mathbf{E}^*[\widetilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \widetilde{S}_t^1 - K(1+r)^{-T}\,.
\end{aligned}$$

Pomnožimo obje strane s $S_t^0 = (1+r)^t$. Slijedi

$$C_t \geq S_t^1 - K(1+r)^{-T+t} \geq S_t^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t^1 - K)^+ = Z_t$. Iz Propozicije 1.5.25 slijedi da je $C_t = U_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dakle, **američka call opcija vrijedi jednako kao i europska call opcija.**

Napomena 1.5.26. Isti račun za put opciju $Z_t := (K - S_t^1)^+$ daje

$$P_t \geq K(1+r)^{-T+t} - S_t^1$$

i ne možemo zaključiti $P_t \geq K - S_t^1$. Općenito, američka put opcija vrijedi više od europske put opcije.

Imajući na umu Propoziciju 1.5.25, promotrimo pitanje optimalnog vremena za iskoristiti američku call opciju. Iz $U_t = C_t$ slijedi $\widetilde{U}_t = \widetilde{C}_t$, te je stoga $\widetilde{U}$ $\mathbf{P}^*$-martingal. Zbog $\widetilde{U} = \widetilde{V}(\phi) - \widetilde{A}$ slijedi $\widetilde{A} = 0$, odnosno $A_t = 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. To znači da je $\tau_{\max} = T$, odnosno optimalno je čekati do dana dospijeća američke call opcije.

Neka je sada τ proizvoljno optimalno vrijeme za američku call opciju. Po Teoremu **??** je tada $\widetilde{U}_\tau = \widetilde{Z}_\tau$, odnosno zbog $\widetilde{U} = \widetilde{C}$,

$$C_\tau = Z_\tau = (S_\tau^1 - K)^+\,.$$

Pokazali smo da je $C_t > S_t^1 - K$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, te $C_T = (S_T^1 - K)^+$. Zato je

$$C_\tau \geq S_\tau^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $\tau \leq T-1$. Prema tome, za $\tau \leq T-1$ imamo

$$(S_\tau^1 - K)^+ = C_\tau > S_\tau^1 - K\,,$$

što je moguće samo u slučaju $S_\tau^1 - K < 0$. Slijedi da je $C_\tau = (S_\tau^1 - K)^+ = 0$. Odavde je jednostavno pokazati da je tada i $C_t = 0$ za sve $t > \tau$.

Zaključujemo da ako je τ optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju da je tada ili $\tau = T$ ili je u trenutku τ vrijednost američke (i europske) call opcije jednaka nuli.

Zadatak 1.5.27. Nalazimo se u CRR modelu s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$, $S_0 = 100$ i $T = 3$.

(a) Odredite cijene američke put opcije s cijenom izvršenja $K = 90$ u svim trenutcima.
(b) Odredite hedging portfelj za tu opciju na događaju $\{(b, a, a)\}$.
(c) Odredite optimalno vrijeme za iskoristiti tu opciju.

POGLAVLJE 2

Brownovo gibanje

U ovom ćemo poglavlju uvesti pojam Brownovog gibanja, odnosno slučajni proces koji čini osnovu za modeliranje kretanja cijena rizičnih imovina na financijskim tržištima neprekidnim u vremenu. Ti modeli su zapravo vremenski neprekidni analogoni odgovarajućih (diskretnih) skaliranih Cox-Ross-Rubinsteinovih modela, gdje se cijena rizične imovine modelira preko odgovarajućih simetričnih slučajnih šetnji. Kao osnovu za tu aproksimaciju, prvo ćemo dati (neformalnu) konstrukciju Brownovog gibanja kao limes pogodno skaliranih linearno interpoliranih slučajnih šetnji.

2.1. Motivacija i uvod

---

neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $(X_n : n \in \mathbf{N})$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1 s parametrom $p = 1/2$ definiranih na tom prostoru. Konkretno, za Ω možemo uzeti beskonačni produkt $\{-1, 1\}^\infty$, za $\mathcal{F}$ cilindarsku σ-algebru, a za $\mathbf{P}$ produktnu vjerojatnost. Simetrična slučajna šetnja je slučajni proces $M = (M_n : n \in \mathbf{N}_0)$ definiran s $M_0 = 0$, te

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Podsjetimo se osnovnih svojstava jednostavne simetrične slučajne šetnje M:

- Slučajna šetnja ima **nezavisne priraste**. To znači da su za svaki $m \in \mathbf{N}$ i sve nenegativne cijele brojeve $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m$ slučajne varijable

  $$M_{k_1} = M_{k_1} - M_{k_0}, M_{k_2} - M_{k_1}, \ldots, M_{k_m} - M_{k_{m-1}}\,,$$

  nezavisne. Slučajnu varijablu

  $$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

  nazivamo **prirast** slučajne šetnje od trenutka k_i do k_{i+1}.
- Nadalje, očekivanje prirasta $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ je nula, dok je varijanca tog priraste jednaka $k_{i+1} - k_i$. Zaista,

  $$\mathrm{Var}(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \mathrm{Var}(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \mathrm{Var}(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i\,.$$

  Uočimo da se varijanca akumulira brzinom jedan po jedinici vremena. Dakle, varijanca prirasta kroz vremenski interval od k do l, $k < l$, bit će jednaka $l - k$.
- Označimo $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ i primjetimo da je $\mathcal{F}_k = \sigma(M_1, M_2, \ldots, M_k)$. Dakle, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k : k \in \mathbf{N}_0)$ je prirodna filtracija slučajne šetnje M koja je **martingal** u odnosu na

$\mathcal{F}$. Naime, za nenegativne cijele brojeve $k < l$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[M_l \,|\, \mathcal{F}_k] &= \mathbf{E}[(M_l - M_k) + M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + \mathbf{E}[M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_k \text{ je } \mathcal{F}_k \text{ izmjeriva}) \\
&= \mathbf{E}[M_l - M_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_l - M_k \text{ nezavisna od } \mathcal{F}_k) \\
&= M_k \,. \qquad (2.1.1)
\end{aligned}$$

- **Kvadratna varijacija** slučajne šetnje M je slučajni proces $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_k : k \in N)$ definiran s
$$\langle M \rangle_k := \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2 \,.$$
Uočimo da je svaki član u gornjoj sumi jednak 1, te je trivijalno $\langle M \rangle_k = k$. Uočimo:kvadratna varijacija računa se po svakom putu slučajne šetnje ($\langle M \rangle_k$ je slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ koja je jednaka konstanti k). S druge strane, $\mathrm{Var}(M_k)$ je također jednaka k, ali se računa usrednjenjem po svim putevima. U slučaju nesimetrične slučajne šetnje,
$$\mathbf{P}(X_j = 1) = p, \ \mathbf{P}(X_j = -1) = q := 1 - p,$$
kvadratna varijacija u trenutku k je i dalje jednaka k, dok je $\mathrm{Var}(M_k) = 4pqk$. Kod računanja kvadratne varijacije ključno je da vjerojatnosti prirasta ne ulaze u račun. Ako je dan put slučajne šetnje (realizacija šetnje za dani $\omega \in \Omega$), iz tog puta možemo izračunati kvadratnu varijaciju (za taj put).

Za konstrukciju Brownovog gibanja trebamo ubrzati vrijeme i smanjiti korak slučajne šetnje. Za fiksni $n \in \mathbf{N}$ slučajni proces $B^{(n)} = (B_t^{(n)} : t \geq 0)$ definiran s

$$B_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]})(nt - [nt]), \quad t \geq 0. \qquad (2.1.2)$$

zovemo **skalirana slučajna šetnja**. Uočimo da je za fiskni $\omega \in \Omega$, $t \mapsto B_t^{(n)}(\omega)$ je neprekidna funkcija te da za $t \in T_n := \{t \geq 0 : tn \in \mathbf{Z}\}$ vrijedi

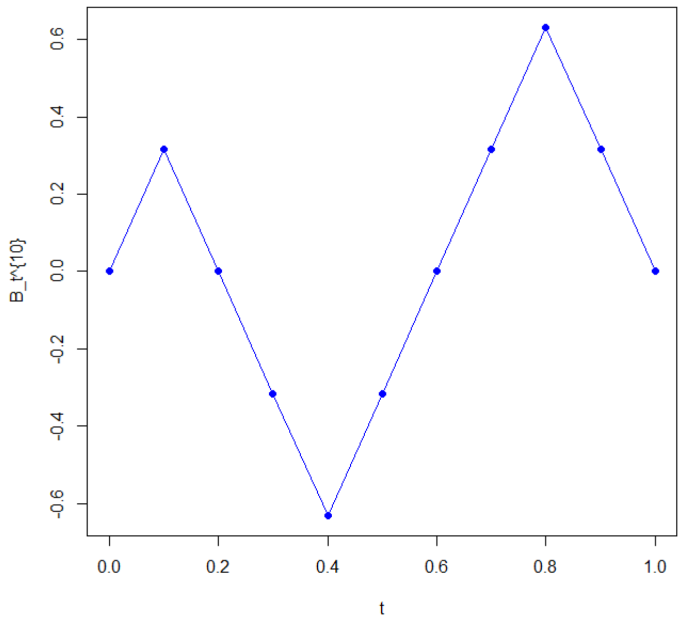
$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt} \,, \qquad (2.1.3)$$

a da za $t \notin T_n$ vrijednosti $B_t^{(n)}$ linearno interpoliramo.

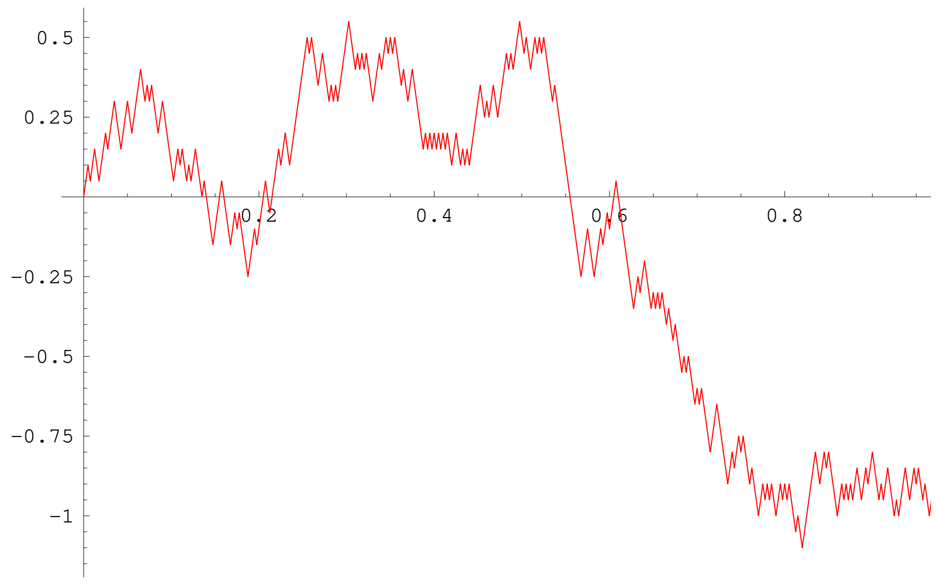
Za $\omega \in \Omega$ (neprekidnu) funkciju $t \mapsto B_t^{(n)}(\omega)$ s $\mathbf{R}_+$ u $\mathbf{R}$ zovemo **put** (trajektorija) skalirane slučajne šetnje za dani ω. Brownovo gibanje ćemo neformalno konstruirati kao limes skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$ kada $n \to \infty$. Na Slici 2. prikazana je simulacija puta od $B^{(400)}$ do vremena 1. Taj put generiran je pomoću 400 realizacija simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima $\pm 1/20$.

Promotrimo sada svojstva skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$:

- Skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste s vremenima u T_n. Zaista, neka su $m \in \mathbf{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ takvi da je $t_j \in T_n$ za sve j. Tada su slučajne varijable
$$B_{t_1}^{(n)} - B_{t_0}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)} - B_{t_1}^{(n)}, \ldots, B_{t_m}^{(n)} - B_{t_{m-1}}^{(n)}$$



Slika 1. Grafički prikaz jedne trajektorije procesa $(B_t^{(10)} : t \in [0,1])$. U točkama $T_{10} = \{0, 0.1, \dots, 0.9, 1\}$ proces je određen formulom (2.1.3), preostale vrijednosti linearno interpoliramo. Korišteno je prostorno skaliranje $\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.32$ i trajektorija slučajne šetnje $(0, 1, 0, -1, -2, -1, 0, 1, 2, 1, 0)$.



Slika 2.

nezavisne jer ovise o različitim Bernoullijevim varijablama X_j. Na primjer,

$$B_{t_{i+1}}^{(n)} - B_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt_{i+1}} - M_{nt_i}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=nt_i+1}^{nt_{i+1}} X_j \, .$$

Uočite da $B_t^{(n)} - B_s^{(n)}$ i $B_s^{(n)}$ ne moraju biti nezavisni za $t, s \notin T_n$. Upotrebom formule (2.1.2), može se pokazati nezavisnost prirasta i za općenite $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, za dovoljno veliki $n \in \mathbf{N}$.[3]

- Za $t \geq 0$ je
$$\mathbf{E}[B_t^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathbf{E}M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,(\mathbf{E}M_{[nt]+1} - \mathbf{E}M_{[nt]})(nt - [nt]) = 0.$$
Nadalje, za $t \geq s$ takve da je $t, s \in T_n$ vrijedi
$$\mathrm{Var}(B_t^{(n)} - B_s^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{j=ns+1}^{nt} 1 = t - s\,.$$
- Za $t \geq 0$ slučajna varijabla $B_t^{(n)}$ je izmjeriva u odnosu na σ-algebru
$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u^{(n)} : 0 \leq u \leq t).$$
Neka su $s, t \in T_n$, $s \leq t$. Tada je $\mathcal{F}_s = \sigma(M_u : 0 \leq u \leq ns)$ pa je slučajna varijabla $B_t^{(n)} - B_s^{(n)}$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Sada se na isti način kao i za slučajnu šetnju dokazuje martingalno svojstvo skalirane slučajne šetnje $(B_t^{(n)} : t \in T_n)$, odnosno da za sve $s \leq t$, $s, t \in T_n$ vrijedi
$$\mathbf{E}[B_t^{(n)} \,|\, \mathcal{F}_s] = B_s^{(n)}.$$
- Izračunajmo još i kvadratnu varijaciju skalirane slučajne šetnje $(B_t^{(n)} : t \in T_n)$. U trenutku $t \in T_n$ je
$$\langle B^{(n)} \rangle_t \;:=\; \sum_{j=1}^{nt} \left[B_{\frac{j}{n}}^{(n)} - B_{\frac{j-1}{n}}^{(n)}\right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,X_j\right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t\,. \tag{2.1.4}$$

TEOREM 2.1.1. *(Centralni granični teorem za skaliranu slučajnu šetnju) Za $t > 0$ vrijedi*
$$B_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0, t).$$

Skica dokaza: Dokaz ćemo provesti prvo za $t \in \mathbf{Q}$ i specijalni podniz niza $(B_t^{(n)} : n \in \mathbf{N})$. Uočimo da za $t \in \mathbf{Q}$ postoji niz $(n_k : k \in \mathbf{N})$ prirodnih brojeva t.d. $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ i $t \in T_{n_k}$ za sve $k \in \mathbf{N}$.
Kako je $\mathbf{E}[N_n] = n\mathbf{E}[X_1] = 0$ i $\mathrm{Var}(M_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n$ slijedi
$$B_t^{(n_k)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n_k}} \sum_{j=1}^{n_k t} X_j = \frac{M_{n_k t}}{\sqrt{n_k}} = \frac{M_{n_k t} - \mathbf{E}[M_{n_k t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_{n_k t})}} \cdot \sqrt{t}\,.$$
Sada primjenom centralnog graničnog teorema na niz parcijalnih suma $(M_{n_k t} : k \in \mathbf{N})$ slijedi da je za svaki $x \in \mathbf{R}$
$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(B_t^{(n_k)} \leq x) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_{n_k t} - \mathbf{E}[M_{n_k t}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_{n_k t})}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy = \mathbf{P}(N(0, t) \leq x)\,.$$

[3] Provjerite tvrdnju sami za vježbu, ključno je odabrati $n > (\min\{t_{j+1} - t_j : j = 0, ..., m-1\})^{-1}$.

Sada za $t \in \mathbf{R}$ ostaje pokazati da

$$B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbf{P})} 0,$$

što zajedno sa Slutskyjevim teoremom, nezavisnosti prirasta i

$$B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} = \frac{\sqrt{[nt]}}{\sqrt{n}} \frac{M_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0,t)$$

povlači

$$B_t^{(n)} = B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} + B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0,t).$$

□

Ovim rezultatom smo pokazali da granična distribucija niza slučajnih varijabli $(B_t^{(n)} : n \in \mathbf{N})$ odgovara distribuciji Brownovog gibanja u trenutku t, vidi Definiciju 2.2.1. Da bismo mogli govoriti o Brownovom gibanju kao limesu niza skaliranih slučajnih šetnji potreban nam je jači rezultat o konvergenciji procesa, tzv. Donskerov teorem.

Primjer 2.1.2. Za kraj ovog uvoda iskoristimo dobivene rezultate kako bi pokazali da limes odgovarajućeg skaliranog Cox-Ross-Rubinsteinovog modela vodi prema cijenama dionica koje imaju log-normalnu distribuciju. Kasnije ćemo u Poglavlju **??** pokazati da se kao granični (vremenski neprekidni) model pojavljuje upravo Black-Scholes-Mertonov model.
Zbog jednostavnosti promatramo CRR model u kojem je kamatna stopa $r = 0$. Fiksirajmo vrijeme $t \geq 0$. Promatrat ćemo CRR model sa $n \in \mathbf{N}$ promjena cijena dionice po jedinici vremena. Tada se do trenutka $t \in T_n$ cijena dionice promjeni nt puta. Označimo s a_n, odnosno b_n, relativne promjene cijene dionice. Odaberimo te relativne promjene cijena na sljedeći način: neka je $\sigma > 0$ konstanta, i stavimo

$$a_n = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Znamo da uz ove parametre modela postoji jedinstvena vjerojatnost neutralna na rizik, te je

$$\hat{p}_n = \frac{r - a_n}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}, \quad \hat{q}_n = \frac{b_n - r}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Neka su sada $(X_j : j \in \mathbf{N})$ nezavisne simetrične Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima ± 1. Označimo kao i prije sa M_{nt} slučajnu šetnju u trenutku nt:
$M_{nt} = \sum_{j=1}^{nt} X_j$. Tada je

$$G_{nt} := \frac{1}{2}(nt + M_{nt})$$

broj jedinica u nizu $(X_j : 1 \leq j \leq nt)$, a

$$D_{nt} := \frac{1}{2}(nt - M_{nt})$$

broj minus jedinica u nizu $(X_j : 1 \leq j \leq nt)$. Ako je $S_0 \in \mathbf{R}$ početna cijena dionice, tada je cijena dionice $S_n(t)$ u trenutku t (dakle, nakon ntnt koraka) jednaka

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S_0(1 + b_n)^{G_{nt}}(1 + a_n)^{D_{nt}} \\ &= S_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt + M_{nt})} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt - M_{nt})}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Pokažimo da kada $n \to \infty$, distribucija od $S_n(t)$ u (2.1.5) konvergira prema distribuciji od

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\}\,, \tag{2.1.6}$$

gdje je B_t normalna slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom t. Ovu tvrdnju ćemo kao i prije pokazati za $t \in \mathbf{Q}$ i podniz $(S_{n_k}(t) : k \in \mathbf{N})$ takav da je $t \in T_{n_k}$ za sve $k \in \mathbf{N}$. Također, dovoljno je pokazati da distribucija od

$$\log S_n(t) = \log S_0 + \frac{1}{2}(nt + M_{nt}) \log\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}(nt - M_{nt}) \log\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.1.7}$$

konvergira prema distribuciji od

$$\log S_t = \log S_0 + \sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\,.$$

Po Taylorovoj formuli imamo

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

gdje je član $O(x^3)$ reda x^3. Primjenimo gornji razvoj na (2.1.7) uzimajući prvo $x = \sigma/\sqrt{n}$, a zatim $x = -\sigma/\sqrt{n}$. Uočimo da je $O((\pm\sigma/\sqrt{n})^3) = O(n^{-3/2})$. Zato je za $n \in \mathbf{N}$ takav da je $t \in T_n$

$$\begin{aligned}
\log S_n(t) = \log S_0 &+ \frac{1}{2}(nt + M_{nt})\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&+ \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= \log S_0 + nt\left(-\frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) + M_{nt}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + O(n^{-1/2}) + \sigma B_t^{(n)} + O(n^{-1}) B_t^{(n)}\,.
\end{aligned}$$

Po Teoremu 2.1.1, distribucija od $B_t^{(n_k)}$ konvergira kada $k \to \infty$ prema distribuciji od B_t (centrirana normalna slučajna varijabla s varijancom t). Nadalje, izraz $O(n_k^{-1})B_t^{(n_k)}$ je produkt nečega što konvergira prema normalnoj distribuciji i člana $O(n_k^{-1})$ koji teži prema nuli. Zato i produkt $O(n_k^{-1})B_t^{(n_k)}$ teži prema nuli kada $k \to \infty$.[4] Zaključujemo da kad $k \to \infty$, distribucija od $\log S_{n_k}(t)$ teži prema distribuciji od $\log S_0 + \sigma B_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t$. □

Za slučajnu varijablu $X > 0$ kažemo da ima **lognormalnu distribuciju**, ako slučajna varijabla $Y = \log X$ ima normalnu distribuciju. Ekvivalentno, ako Y ima normalnu distribuciju, tada $X = e^Y$ ima lognormalnu distribuciju. Pretpostavimo da je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajmo funkciju gustoće slučajne varijable $X = e^Y$: za $x > 0$ je

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \le x) &= \mathbf{P}(Y \le \log x) \\
&= \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\}\, \frac{du}{u}\,.
\end{aligned}$$

[4]Uvjerite se sami u ovu tvrdnju, npr. korištenjem Slutskyjevog teorema

otkud slijedi da je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\}, \quad x > 0.$$

2.2. Definicija i osnovna svojstva Brownovog gibanja

Zahvaljujući Donskerovom teoremu, Brownovo gibanje možemo definirati kao odgovarajući limes skaliranih slučajnih šetnji $B^{(n)} = (B_t^{(n)} : t \geq 0)$ kada $n \to \infty$. Stoga očekujemo da će Brownovo gibanje naslijediti određena svojstva tih skaliranih slučajnih šetnji. Mi ćemo pristupiti definiciji Brownovog gibanja upravo preko tih prenesenih svojstava, a onda Donskerovim teoremom opravdati egzistenciju takvog slučajnog procesa.

DEFINICIJA 2.2.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $B = (B_t,\, t \geq 0)$ je **Brownovo gibanje** ako vrijedi:

(i) $B_0 = 0$.

(ii) Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbf{R}_+$ u $\mathbf{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).

(iii) Za sve $m \in \mathbf{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

(iv) Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.

Neka je $C([0,1])$ prostor neprekidnih funkcija s $[0,1]$ u $\mathbf{R}$ sa sup normom

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad f \in C([0,1])$$

i metrikom $d(f,g) = ||f - g||_\infty$.[5] Ako s $\mathcal{B}$ označimo Borelovu σ-algebru na $C([0,1])$[6], onda na Brownovo gibanje B možemo gledati kao na slučajni element na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ s vrijednostima u $(C([0,1]), \mathcal{B})$. Analogno niz skaliranih slučajnih šetnji $(B^{(n)} : n \in \mathbf{N})$ iz (2.1.2) možemo promatrati kao niz slučajnih elemenata. Sada smo spremni iskazati Donskerov teorem, poznat još i kao Funkcionalni centralni granični teorem.

TEOREM 2.2.2 (Donskerov teorem). *Za niz skaliranih slučajnih šetnji* $(B^{(n)} : n \in \mathbf{N})$ *iz* (2.1.2) *i Brownovo gibanje* B *vrijedi*

$$B^n \overset{(d)}{\Longrightarrow} B, \quad n \to \infty,$$

odnosno, za svaki omeđeni neprekidni funkcional $F : C([0,1]) \to \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$\mathbf{E}[F(B^n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{E}[F(B)].$$

NAPOMENA 2.2.3. Uočimo da je Teorem 2.1.1 samo specijalna posljedica Donskerovog teorema, dovoljno je za fiksni $t \in [0,1]$ odabrati

$$F(f) = f(t), \quad f \in C([0,1]).$$

[5] Metrički prostor $(C([0,1]), d)$ je potpun i separabilan.

[6] $\mathcal{B}$ je σ algebra generirana svim otvorenim kuglama u $(C([0,1]), d)$.

Prisjetimo se da skalirana slučajna šetnja $B_t^{(n)}$ ima prirodan vremenski korak $1/n$, te je linearna između dva konsekutivna vremenska koraka. Za razliku od skalirane slučajne šetnje, Brownovo gibanje nema linearnih dijelova (posljedice svojstava (iii) i (iv) iz Definicije 2.2.1). Nadalje, distribucija skalirane slučajne šetnje u trenutku $t > 0$ je približno normalna (Teorem 2.1.1), dok je distribucija Brownovog gibanja upravo normalna $N(0,t)$. Kao posljedicu svojstava (ii)-(iv) pokazat ćemo da je i slučajni vektor $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$, za proizvoljne $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, normalno distribuiran. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ B_{t_3} - B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_m} - B_{t_{m-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \\ \vdots \\ B_{t_m} \end{bmatrix}$$

Budući da su slučajne varijable $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ nezavisne i normalne, to je $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ normalni slučajni vektor. Zato je i $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ normalni slučajni vektor kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora. Da bismo u potpunosti odredili distribuciju vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$, moramo izračunati kovarijacijsku matricu (vektor očekivanja je očito nula).
Neka je $0 \leq s < t$. Kovarijanca od B_s i B_t jednaka je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[B_s B_t] &= \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s) + B_s^2] \\ &= \mathbf{E}[B_s] \cdot \mathbf{E}[B_t - B_s] + \mathbf{E}[B_s^2] \quad \text{(nezavisnost prirasta)} \\ &= 0 + \mathrm{Var} B_s = s\,. \end{aligned}$$

Slijedi da je kovarijacijska matrica normalnog slučajnog vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ jednaka

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_m \end{bmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Na taj način smo dokazali implikaciju $(a) \Rightarrow (b)$ sljedećeg teorema[7]:

Teorem 2.2.4. *(Alternativna karakterizacija Brownovog gibanja) Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *vjerojatnosni prostor, te neka je* $B = (B_t,\, t \geq 0)$ *slučajni proces takav da su putovi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *neprekidni za g.s.* $\omega \in \Omega$ *i* $B_0 = 0$. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) Za sve $m \in \mathbf{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom $\mathrm{Var}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

(b) Za sve $m \in \mathbf{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *slučajni vektor* $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m})$ *ima normalnu distribuciju s vektorom očekivanja nula i kovarijacijskom matricom (2.2.1).*

[7] Obrat dokažite sami za vježbu.

Osim samog slučajnog procesa, bit će nam potrebna i informacija vezana uz taj proces. Zato uvodimo pojam filtracije za Brownovo gibanje.

DEFINICIJA 2.2.5. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B = (B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. **Brownovska filtracija** je familija $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ σ-algebri koja zadovoljava

(i) Za sve $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ (informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije).
(ii) (Adaptiranost) Za svaki $t \geq 0$, B_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla (informacija dostupna u trenutku t dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku).
(iii) (Nezavisnost budućih prirasta) Za sve $0 \leq s < t$, prirast $B_t - B_s$ nezavisan je od $\mathcal{F}_s$ (svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s nezavisan je od informacije dostupne u trenutku s).

Tipičan primjer filtracije za Brownovo gibanje je prirodna filtracija Brownovog gibanja definirana s $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, 0 \leq s \leq t)$. U tom slučaju, informacija u trenutku t sadrži informaciju o Brownovom gibanju do trenutka t i ništa više.
Slično kao i slučajna šetnja, i Brownovo gibanje ima martingalno svojstvo. Definirajmo prvo pojam martingala s neprekidnim vremenom.

DEFINICIJA 2.2.6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ filtracija. Slučajni proces $M = (M_t,\, t \geq 0)$ je *martingal* ako vrijedi:

(i) M je $\mathbf{F}$-adaptiran,
(ii) za sve $t \geq 0$, $\mathbf{E}|M_t| < \infty$,
(iii) za sve $0 \leq s \leq t$, $\mathbf{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_s] = M_s$ g.s.

TEOREM 2.2.7. *Brownovo gibanje je martingal (s obzirom na filtraciju za to Brownovo gibanje).*

DOKAZ. Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[B_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[B_t - B_s + B_s \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbf{E}[B_t - B_s \,|\, \mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[B_s \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbf{E}[B_t - B_s] + B_s \quad \text{(nezavisnost } B_t - B_s \text{ od } \mathcal{F}_s) \\
&= B_s\,.
\end{aligned}$$

□

2.3. Kvadratna varijacija

Kvadratnu varijaciju skalirane slučajne šetnje $B^{(n)}$ do trenutka T izračunali smo u (2.1.4), te smo dobili da je jednaka T. Prisjetimo se da je ta kvadratna varijacija bila izračunata tako da smo uzeli sve korake skalirane slučajne šetnje od 0 do T, kvadrirali ih, te zbrojili. Kod Brownovog gibanja nemamo prirodnu veličinu koraka. Za dani $T > 0$ možemo odabrati veličinu koraka, npr. T/n, i izračunati kvadratnu varijaciju za tu veličinu koraka. Preciznije, možemo računati

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{\frac{(j+1)T}{n}} - B_{\frac{jT}{n}} \right]^2 .$$

Zanimat će nas taj izraz za male veličine koraka, te ćemo zato pustiti $n \to \infty$. Kao limes dobit ćemo opet T, duljinu vremenskog intervala na kojem računamo kvadratnu varijaciju. To je glavni rezultat ovog odjeljka.
Kao što ćemo pokazati u sljedećem odjeljku, Brownovo gibanje nema omeđenu varijaciju. Stoga nismo u stanju definirati Lebesgue-Stieltjesov integral funkcije f obzirom na Brownovo gibanje, odnosno preslikavanje po trajektorijama Brownovog gibanja

$$\omega \mapsto \int_a^b f(s)dB_s(\omega)$$

nije dobro definirano. Naš cilj je dati alternativnu definiciju integrala neke (slučajne) funkcije obzirom na Brownovo gibanje, tzv. Itôv integral, i u toj definiciji ključnu ulogu ima upravo kvadratna varijacija Brownovog gibanja.
Prije nego što definiramo kvadratnu varijaciju, pogledajmo prvo poznatiji koncept varijacije (odn. varijacije prvog reda). Neka je $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ funkcija. Particija intervala $[0,T]$ je skup $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ točaka takvih da je $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = T$. Dijametar particije Π je najveća veličina koraka:

$$||\Pi|| := \max_{j=0,1,\ldots,n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

Varijacija prvog reda funkcije f na intervalu $[0,T]$ definira se kao

$$V_T(f) := \sup_{\Pi} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|\,. \tag{2.3.1}$$

Ako je taj supremum konačan, za funkciju f kažemo da je konačne varijacije na $[0,T]$. Slučajni proces je konačne varijacije ako su mu trajektorije $\mathbf{P}$-g.s. konačne varijacije.

Napomena 2.3.1. (i) Primijetimo da je monotona funkcija f uvijek konačne varijacije, te da je $V_T(f) = |f(T) - f(0)|$.
(ii) Može se pokazati da je f konačne varijacije na $[0,T]$ ako i samo ako je f razlika dvije neopadajuće funkcije.
(iii) Neka je $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ funkcija klase C^1 na $[0,T]$. Tada je

$$V_T(f) = \int_0^T |f'(t)|\, dt\,.$$

Da bismo to pokazali, uzmimo $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ proizvoljnu particiju intervala $[0,T]$. Po teoremu srednje vrijednosti, za svaki $j = 0, 1, \ldots, n-1$, postoji $t_j^* \in (t_j, t_{j+1})$ takav da je $f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$. Zato je

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j)\,.$$

Međutim, gornji izraz je Riemannova suma funkcije f' na intervalu $[0,T]$. Budući da je f' Riemann integrabilna, gornje Riemannove sume konvergiraju, kada $||\Pi|| \to 0$ prema integralu $\int_0^T |f'(t)|\, dt$ (ovdje promatramo niz particija po kojima je gornji limes jednak supremumu, odnosno izrazu $V_T(f)$).

Sljedeći rezultat povlači da je Brownovo gibanje slučajni proces beskonačne varijacije.

Propozicija 2.3.2. *Neprekidni martingal je konačne varijacije ako i samo ako je konstantan.*

Dokaz. $\Leftarrow$ Trivijalno.
$\Rightarrow$ Neka je $M = (M_t, t \geq 0)$ neprekidni martingal konačne varijacije. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $M_0 = 0$ (u suprotnom tvrdnju dokazujemo za neprekidni martingal $\widehat{M} := (M_t - M_0, t \geq 0)$). Također, možemo pretpostaviti da su i martingal M i njegova varijacija ograničeni, odnosno da postoji $K > 0$ takav da je za sve $t > 0$

$$|M_t|,\, V_t(M) < K.$$

Naime, ako za $N > 0$ definirajmo vrijeme zaustavljanja $S_N = \inf\{s > 0 : V_s(M) > N\}$, tada je zaustavljeni proces M^{S_N} također martingal[8] i vrijedi

$$|M_t^{S_N}| \leq V_t(M^{S_N}) \leq N,$$

pa možemo umjesto martingala M promatrati zaustavljene martingale M^{S_N} , $N \in \mathbf{N}$.[9] Neka je $t > 0$ i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t\}$ particija intervala $[0, t]$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2] &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_i} M_{t_{i-1}}] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[\mathbf{E}[M_{t_i} M_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= (M_{t_{i-1}} \text{ je } \mathcal{F}_{t_{i-1}}\text{-izmjeriva}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_{i-1}} \mathbf{E}[M_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= (M \text{ je martingal}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - 2\mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2] + \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}[M_{t_i}^2] - \mathbf{E}[M_{t_{i-1}}^2]) = \mathbf{E}[M_t^2].
\end{aligned}$$

Prema tome, kako je $\sum_{i=1}^{n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \leq V_t(M)$, slijedi da je

$$\mathbf{E}[M_t^2] \leq \mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\} V_t(M)] \leq K\mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}].$$

Kako ova nejednakost vrijedi za svaku particiju Π, po teoremu o dominiranoj konvergenciji[10] slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[M_t^2] &\leq K \lim_{||\Pi|| \to 0} \mathbf{E}[\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}] \\
&= K\mathbf{E}\left[\lim_{||\Pi|| \to 0} \sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\}\right] = 0,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz neprekidnosti martingala M. Kako je $M_t^2 \geq 0$, slijedi da je $\mathbf{E}[M_t^2] = 0$, odnosno $M_t = 0$ g.s. za sve $t > 0$. □

Sada ćemo definirati kvadratnu varijaciju funkcije f definirane na $[0, T]$.

[8] Po verziji teorema o zaustavljanom martingalu za vremenski neprekindne martingale.
[9] Za vježbu dokažite: M^{S_N} je konstantan za sve $N \in N$ povlači M je konstantan proces.
[10] Iz omeđenosti martingala M slijedi da je $\sup\{|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| : i = 1, \ldots, n\} \leq 2K$.

DEFINICIJA 2.3.3. Neka je $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ funkcija. **Kvadratna varijacija** od f na intervalu $[0,T]$ definira se kao

$$[f,f](T) := \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 .$$

Za f kažemo da je konačne kvadratne varijacije na $[0,T]$ ako gornji limes postoji i konačan je. Slučajni proces $X = (X_t, t \geq 0)$ je konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajan proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t, t \geq 0)$ takav da je

$$\langle X \rangle_T = (\mathbf{P}) \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2 . \tag{2.3.2}$$

Proces $\langle X \rangle$ zovemo proces kvadratne varijacije od X.

Pretpostavimo da je f klase C^1 na $[0,T]$. Tada je kao i u dokazu Napomene 2.3.1 (iii)

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j)^2 \leq ||\Pi|| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) .$$

Zato je

$$\begin{aligned} [f,f](T) &\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \left[||\Pi|| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \lim_{||\Pi||\to 0} ||\Pi|| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{||\Pi||\to 0} ||\Pi|| \cdot \int_0^T |f'(t)|^2 \, dt = 0 . \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili da je $|f'|^2$ neprekidna, pa stoga i integrabilna, na $[0,T]$. Gornji račun pokazuje da većina funkcija na koje smo naviknuti ima kvadratnu varijaciju nula. Stoga se kvadratna varijacija nikada ne proučava u diferencijalnom računu. S druge strane, može se pokazati da putovi Brownovog gibanja nisu diferencijabilne funkcije. Preciznije, vrijedi sljedeći rezultat: za g.s. $\omega \in \Omega$, funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki. To znači da niti u jednoj točki $t \geq 0$ ne možemo definirati $\frac{d}{dt} B_t$. Međutim, takvo "neobično" svojstvo Brownovskih putova sugerira da bi kvadratna varijacija putova mogla biti različita od nule.

TEOREM 2.3.4. *Neka je B Brownovo gibanje. Tada je $\langle B \rangle_T = T$ za sve $T \geq 0$ gotovo sigurno.*

DOKAZ. Za $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ particiju intervala $[0,T]$ označimo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 .$$

Pokazat ćemo da vrijedi konvergencija u srednjem

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \mathbf{E}[(Q_\Pi - T)^2] = 0 .^{11} \tag{2.3.3}$$

Poznato je da ako niz konvergira u srednjem, tada postoji podniz (particija) tako da taj podniz konvergira gotovo sigurno. To nam daje tvrdnju teorema.

[11]Može se dokazati i jača tvrdnja $\sum_{j=0}^{2^n} (B_{\frac{tj}{2^n}} - B_{\frac{t(j-1)}{2^n}})^2 \xrightarrow{(g.s.)} T,\ n \to \infty$.

Da bismo dokazali (2.3.3), potrebni su nam drugi i četvrti moment normalne slučajne varijable $X \sim N(0,t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= t\,, &(2.3.4)\\ \mathbf{E}[X^4] &= 3t^2\,. &(2.3.5)\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\mathbf{E}Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T\,.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\left((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\right)^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4\right] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbf{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] + (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &= 2(t_{j+1} - t_j)^2 \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2||\Pi||(t_{j+1} - t_j) = 2||\Pi||\,T\,. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\lim_{||\Pi|| \to 0} \mathrm{Var}(Q_\Pi) = 0$. Sada tvrdnja (2.3.3) slijedi iz

$$\mathrm{Var}(Q_\Pi) = \mathbf{E}[Q_\Pi - \mathbf{E}Q_\Pi]^2 = \mathbf{E}[Q_\Pi - T]^2.$$

□

Napomena 2.3.5. (i) Pokazali smo da vrijedi

$$(\mathbf{P}) \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}|^2 = t\,, \tag{2.3.6}$$

odnosno da je $\langle B \rangle_t = t$ g.s. To znači da svaki niz particija $(\Pi_n)_n$, $||\Pi_n|| \to 0$, ima podniz $(\Pi_{n_k})_k$ t.d. za g.s. $\omega \in \Omega$

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{t_{j+1}^{(n_k)}}(\omega) - B_{t_j^{(n_k)}}(\omega)|^2 = t.$$

No ovo ne znači da konvergenciju u (2.3.6) možemo ojačati na konvergenciju g.s. Štoviše, može se konstruirati niz particija $(\Pi_n)_n$, $||\Pi_n|| \to 0$ t.d.

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} |B_{t_{j+1}^{(n)}}(\omega) - B_{t_j^{(n)}}(\omega)|^2 = \infty \text{ za g.s. } \omega \in \Omega.$$

S druge strane ako promatramo niz *ugniježđenih*[12] particija $(\Pi_n)_n$, $||\Pi_n|| \to 0$, konvergencija u (2.3.6) je ujedno i g.s. konvergencija.

(ii) Iz gornjeg dokaza se vidi da je

$$\mathbf{E}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = t_{j+1} - t_j$$

i

$$\mathrm{Var}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2 \,.$$

Kada je $t_{j+1} - t_j$ malo, $(t_{j+1} - t_j)^2$ je *vrlo malo*, pa bismo mogli rezonirati da je $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$, iako slučajno, s velikom vjerojatnošću blizu svoje sredine $t_{j+1} - t_j$. To bismo mogli zapisati kao

$$(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \approx t_{j+1} - t_j \,.$$

ili možda malo preciznije

$$\frac{(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2}{t_{j+1} - t_j} \approx 1 \,.$$

Međutim, gornji izraz ne može biti približno jednak 1, budući da je

$$Y_{j+1} := \frac{B_{t_{j+1}} - B_{t_j}}{\sqrt{t_{j+1} - t_j}}$$

jedinična normalna slučajna varijabla (bez obzira koliko blizu bili t_j i t_{j+1}).

Uzmimo zbog jednostavnosti, $t_j = jT/n$. Tada je

$$(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = T \cdot \frac{Y_{j+1}^2}{n} \,.$$

Slučajne varijable $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ su nezavisne i jednako distribuirane, pa po zakonu velikih brojeva slijedi da $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{Y_{j+1}^2}{n}$ konvergira prema očekivanju $\mathbf{E}Y_{j+1}^2$ kada $n \to \infty$. To očekivanje je jednako 1, pa zaključujemo da $\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$ konvergira prema T. Dakle, iako članovi $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$ te sume mogu biti vrlo različiti od svog očekivanja T/n, sumiranjem puno takvih članova razlike se usrednje i u limesu dobivamo T.

Od sada nadalje ćemo neformalno rezultat Teorema 2.3.4 pisati kao

$$dB_t \, dB_t = dt \,. \tag{2.3.7}$$

Budući da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[0, T_1]$ jednaka T_1, a na intervalu $[0, T_2]$, $T_1 < T_2$, jednaka T_2, slijedi da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[T_1, T_2]$ jednaka $T_2 - T_1$. Brownovo gibanje akumulira $T_2 - T_1$ jedinica kvadratne varijacije na intervalu $[T_1, T_2]$. Budući da to vrijedi za svaki vremenski interval, možemo zaključiti:

Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju po stopi jedan po jedinici vremena.

To pišemo neformalno kao (2.3.7) gdje na desnoj strani pretpostavljamo da piše 1 ispred dt.

---

[12]Niz particija $(\Pi_n)_n$ je ugniježđen ako je $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, odnosno ako je particija Π_{n+1} nastala dodavanjem jedne ili više točaka u particiju Π_n. Jedan standardan primjer je dijadska particija, $\Pi_n = \{\frac{jT}{2^n} : t = 0, \dots, 2^n\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Iz diskretne teorije martingala znamo da je kvadrat martingala submartingal (Jensenova nejednakost). Sljedeći teorem, kojeg prezentiramo bez dokaza, pokazuje važnost procesa kvadratne varijacije i predstavlja specijalni slučaj Doob-Meyerove dekompozicije martingala.

TEOREM 2.3.6. *Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ neprekidni, kvadratno integrabilni martingal. Tada je M konačne kvadratne varijacije i proces $\langle M \rangle$ je jedinstveni neprekidni, rastući, adaptirani slučajni proces takav da je slučajni proces $M^2 - \langle M \rangle$ martingal.*

NAPOMENA 2.3.7. Podsjetimo se, ako je M martingal i $f : [0, \infty\rangle \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ izmjeriva funkcija, proces $X = (f(t, M_t) : t \geq 0)$ općenito ne mora biti martingal. Ako je $f(t,x) = x^2$ (ili neka druga konveksna funkcija koja ovisi samo o x) tada je po Jensenovoj nejednakosti proces X submartingal. Kako je kvadratna varijacija Brownovog gibanja B neslučajna i $\langle B \rangle_t = t$, te kako je B martingal, prethodni teorem nam govori da je proces $((B_t^2 - t) : t \geq 0)$ također martingal.[13]

DEFINICIJA 2.3.8. Neka su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi. Kažemo da su X i Y procesi konačne kvadratne kovarijacije ako postoji slučajni proces $\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_t : t \geq 0)$ t.d.

$$(\mathbf{P}) \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) = \langle X, Y \rangle_t.$$

Slučajni proces $\langle X, Y \rangle$ zovemo **kvadratna kovarijacija** od X i Y.

NAPOMENA 2.3.9. (i) Ako je proces $X = (X_t : t \geq 0)$ konačne kvadratne varijacije tada je $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$.

(ii) Kvadratna kovarijacija je simetrična, tj. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$.

(iii) Ako su $X = (X_t : t \geq 0)$ i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni procesi konačne kvadratne kovarijacije, onda su procesi $X + Y$ i $X - Y$ konačne kvadratne varijacije i vrijedi[14]

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} \left(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t \right).$$

(iv) Za slučajne procese $X = (X_t : t \geq 0)$, $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iz definicije kvadratne kovarijacije direktno slijedi

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle_t = \alpha \langle X, Z \rangle_t + \beta \langle Y, Z \rangle_t$$

Specijalno, $\langle \alpha X \rangle_t = \alpha^2 \langle X \rangle_t$.

(v) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ neprekidan slučajni proces i $Y = (Y_t : t \geq 0)$ slučajni proces konačne varijacije. Tada je $\langle X, Y \rangle_t = 0$. Uistinu,

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle_t &\leq \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=1}^{n} |X_{t_j} - X_{t_{j-1}}||Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\
&\leq \lim_{||\Pi|| \to 0} \max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \sum_{j=1}^{n} |Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}| \\
&\leq V_t(Y) \lim_{||\Pi|| \to 0} \max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| = 0,
\end{aligned}$$

[13]Za vježbu dokažite ovu tvrdnju direktno po definiciji martingala, bez korištenja Teorema 2.3.6.

[14]Provjerite tvrdnju samostalno.

pri čemu gornji maksimum teži u 0 kada $||\Pi|| \to 0$ jer su trajektorije od X neprekidne g.s.

Iz Napomene 2.3.9(e) slijedi da je kvadratna kovarijacija funkcije $f(t) = t$ i Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ jednaka $\langle B, f \rangle_t = 0$. Analogno, slijedi da je kvadratna varijacija od f također nula. U skladu sa zapisom (2.3.7), ove dvije činjenice pišemo neformalno kao

$$dB_t\, dt = 0, \quad dt\, dt = 0\,.$$

Primjer 2.3.10. Neka su $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$ konstante. **Geometrijsko Brownovo gibanje** je slučajni proces $S = (S_t : t \geq 0)$ definiran s

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right\}.$$

Geometrijsko Brownovo gibanje služi kao model kretanja cijena dionica u Black-Scholes-Mertonovom modelu. Parametar σ ima interpretaciju *volatilnosti* i predstavlja mjeru varijacije cijene dionice na financijskom tržištu. Volatilnost je povezana s log-povratima dionice na sljedeći način. Neka su dani vremenski trenuci $0 \leq T_1 < T_2$, te pretpostavimo da opažamo geometrijsko Brownovo gibanje ("cijenu dionice") S_t za $T_1 \leq t \leq T_2$. Odaberimo particiju $\Pi = \{T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T_2\}$ tog intervala. Promotrimo log-povrate

$$\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = \sigma(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)$$

na svakom podintervalu $[t_j, t_{j+1}]$. Suma kvadrata log-povrata, koja se ponekad zove realizirana volatilnost, je

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&\quad + 2\sigma \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(t_{j+1} - t_j)\,. \qquad (2.3.8)
\end{aligned}$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Prvi član u gornjoj sumi konvergira prema $\langle B \rangle_{T_2} - \langle B \rangle_{T_1} = T_2 - T_1$, dok druga dva člana konvergiraju prema nuli. Zato je limes realizirane volatilnosti jednak $\sigma^2(T_2 - T_1)$. To znači da volatilnost možemo procijeniti pomoću formule

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right)^2.$$

2.4. Markovljevo svojstvo Brownovog gibanja

U ovom odjeljku pokazat ćemo da Brownovo gibanje ima Markovljevo svojstvo. Kao prvi korak trebamo precizno definirati Markovljevo svojstvo za procese s neprekidnim vremenskim parametrom. Ta definicija treba formalizirati intuitivno razumijevanje Markovljevog procesa kao onog čije ponašanje u budućnosti ovisi o prošlosti samo kroz sadašnje stanje.

Definicija 2.4.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija. Adaptiran slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ je **Markovljev proces**, ako za sve

$0 \leq s \leq t$ i za sve Borel-izmjerive funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ postoji Borel-izmjeriva funkcija $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$\mathbf{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(X_s) \quad g.s. \tag{2.4.1}$$

Riječima, uvjetno na informaciju poznatu u trenutku s, svaka funkcija pozicije procesa X u trenutku $t \geq s$ je funkcija pozicije procesa X u trenutku s.
Za dokaz Markovljevog svojstva Brownovog gibanja trebat će nam sljedeća lema koju navodimo bez dokaza.

LEMA 2.4.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da je slučajna varijabla X $\mathcal{G}$-izmjeriva, te da je slučajna varijabla Y nezavisna od $\mathcal{G}$. Neka je $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ Borelova funkcija i definirajmo*

$$g(x) = \mathbf{E}[h(x, Y)]\,.$$

Tada je

$$\mathbf{E}[h(X, Y) \,|\, \mathcal{G}] = g(X) \quad g.s.$$

TEOREM 2.4.3. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je B Markovljev proces.*

DOKAZ. Neka je $0 \leq s \leq t$, te neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borelova funkcija. Trebamo pokazati da postoji Borelova funkcija $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.$$

Vrijedi

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[f(B_s + (B_t - B_s)) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[h(B_s, B_t - B_s) \,|\, \mathcal{F}_s]\,,$$

gdje je $h(x, y) = f(x + y)$. Uočimo da je B_s $\mathcal{F}_s$-izmjeriva, a $B_t - B_s$ nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Po Lemi 2.4.2 imamo

$$\mathbf{E}[f(B_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = g(B_s) \quad g.s.,$$

gdje je

$$g(x) = \mathbf{E}[h(x, B_t - B_s)] = \mathbf{E}[f(x + (B_t - B_s))]\,.$$

To dokazuje Markovljevo svojstvo. Štoviše, g možemo točno izračunati. Zaista , $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ otkud slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w + x) e^{-\frac{w^2}{2(t-s)}}\, dw\,. \tag{2.4.2}$$

□

NAPOMENA 2.4.4. (i) Prethodnim teoremom smo u stvari pohazali da je Brownovo gibanje **vremenski homogen** Markovljev proces, odnosno da je za svaki $a > 0$ proces $(B_{t+a} - B_a : t \geq 0)$ Brownovo gibanje nezavisno s $\mathcal{F}_a$.

(ii) Zamjenom varijabli $\tau = t - s$ i $y = w + x$ u formuli (2.4.2) dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\, dy\,.$$

Definirajmo **prijelaznu gustoću** $p(\tau, x, y)$ Brownovog gibanja formulom

$$p(\tau, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}\,.$$

Tada (2.4.2) možemo napisati kao

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(\tau, x, y)\,dy\,,$$

i konačno

$$\mathbf{E}[f(B_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(\tau, B_s, y)\,dy\,.$$

2.5. Distribucija vremena prvog prijelaza

Neka je $x \in \mathbf{R}$. Definirajmo **vrijeme prvog prijelaza** nivoa x sa

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t = x\}\,.$$

U ovom odjeljku izračunat ćemo distribuciju tog slučajnog vremena. Vrijeme prvog prijelaza je vrijeme zaustavljanja u smislu da za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{\tau_x \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, gdje je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija za Brownovo gibanje. U tom računu trebat će nam teorem o opcionalnom zaustavljanju koji navodimo bez dokaza.

TEOREM 2.5.1. *(Teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $M^\tau = (M_{t\wedge\tau} : t \geq 0)$ opet martingal.*

PRIMJER 2.5.2. Neka je $-a < 0 < b$. Definiramo s $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-a, b)\}$ prvo vrijeme izlaska Brownovog gibanja $B = (B_t : t \geq 0)$ iz intervala $(-a, b)$. Pokaže se (vidi npr. (2.5.7)) da je $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$.

(i) Odredimo razdiobu slučajne varijable B_τ. Slučajna varijabla τ je uistinu vrijeme zaustavljanja (obzirom na Brownovsku filtraciju).[15] Stoga je po Teoremu 2.5.1 zaustavljeni proces B^τ martingal. Slijedi da je

$$\mathbf{E}[B_\tau] \overset{\text{TDK}}{=} \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[B_t^\tau] = \mathbf{E}[B_0^\tau] = \mathbf{E}[B_0] = 0. \tag{2.5.1}$$

Uočimo da smo u prvoj jednakosti mogli koristiti teorem o dominiranoj konvergenciji jer je po definiciji od τ, $|B_t^\tau| \leq \max\{a, b\}$ g.s.. S druge strane, zbog neprekidnosti trajektorija g.s. Brownovog gibanja slijedi da je $B_\tau \in \{-a, b\}$ g.s. Stoga vrijedi da je

$$\begin{aligned} -\,a\mathbf{P}(B_\tau = -a) + b\mathbf{P}(B_\tau = b) &= 0 \\ \mathbf{P}(B_\tau = -a) + \mathbf{P}(B_\tau = b) &= 1, \end{aligned}$$

odnosno

$$\mathbf{P}(B_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbf{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}.$$

(ii) Odredimo sada $\mathbf{E}[\tau]$. Po rezultatu Teoremu 2.3.6 znamo da je proces $W = (W_t : t \geq 0)$ definiran s $W_t = B_t^2 - t$ martingal[16], pa je po Teoremu 2.5.1 i proces W^τ martingal. Sličnim računom kao u (2.5.1)[17] slijedi da je $\mathbf{E}[W_\tau] = 0$. Stoga je

$$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[B_\tau^2] \overset{(i)}{=} a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = ab.$$

[15] Tvrdnju provjerite sami.
[16] Za vježbu dokažite ovaj rezultat direktno po definicji martingala.
[17] Račun provjerite sami.

Neka je $\sigma > 0$. Promotrimo sljedeći slučajni proces koji će biti od fundamentalnog značenja:

$$Z_t = \exp\left\{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} . \tag{2.5.2}$$

Sljedeći rezultat je posljedica Zadatka 6 iz 2. domaće zadaće.

TEOREM 2.5.3. *(Eksponencijalni martingal) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, te neka je $\sigma > 0$. Slučajni proces Z definiran s (2.5.2) je martingal.*

Zaustavimo eksponencijalni martingal Z u vremenu prvog prijelaza τ_x. Zaustavljen proces je po teoremu o opcionalnom zaustavljanju opet martingal pa vrijedi

$$1 = Z_0 = \mathbf{E}[Z_{t\wedge\tau_x}] = \mathbf{E}\left[\exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\}\right] . \tag{2.5.3}$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Iz neprekidnosti trajektorija Brovnog gibanja slijedi da se do trenutka τ_x Brownovo gibanje nalazi ispod razine x, odnosno, $B_{t\wedge\tau_x} \leq x$. Zato je

$$0 \leq \exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} \leq e^{\sigma x} . \tag{2.5.4}$$

Ako je $\tau_x < \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\}.$$

S druge strane, ako je $\tau_x = \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\} = \lim_{t\to\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t\} = 0.$$

To možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\} .$$

Nadalje, ako je $\tau_x < \infty$, tada je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\{\sigma B_{t\wedge\tau_x}\} = \exp\{\sigma B_{\tau_x}\} = \exp\{\sigma x\}.$$

Ako je $\tau_x = \infty$, tada iz (2.5.4) slijedi da je za sve $t \geq 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} \leq e^{\sigma x} \limsup_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 0 .$$

Zato je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma B_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t\wedge\tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\} . \tag{2.5.5}$$

Sada možemo pustiti $t \to \infty$ u formuli (2.5.3), te po teoremu o dominiranoj konvergenciji i (2.5.5) dobivamo

$$1 = \mathbf{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] ,$$

odnosno ekvivalentno,

$$\mathbf{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x} . \tag{2.5.6}$$

Gornja jednakost vrijedi za sve $\sigma > 0$. Pustimo $\sigma \to 0$. Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\mathbf{E}[1_{\{\tau_x<\infty\}}] = 1$, odnosno

$$\mathbf{P}(\tau_x < \infty) = 1\,. \tag{2.5.7}$$

Sada kada znamo da je τ_x konačan gotovo sigurno, možemo taj uvijet maknuti iz formule (2.5.6) i dobiti

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}\,. \tag{2.5.8}$$

Iz (2.5.8) možemo lagano dokazati sljedeći teorem.

TEOREM 2.5.4. *Neka je $x \in \mathbf{R}$. Tada je prvo vrijeme prijelaza nivoa x konačno gotovo sigurno. Nadalje, Laplaceova transformacija distribucije od τ_x je*

$$\mathbf{E}e^{-\alpha\tau_x} = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,. \tag{2.5.9}$$

DOKAZ. Promatrajmo prvo slučaj $x > 0$. Stavimo li $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ u (2.5.8), dobivamo formulu (2.5.9). Za $x < 0$, formula slijedi iz simetrije Brownovog gibanja. $\square$

Deriviramo li formulu (2.5.9) po α dobivamo

$$\mathbf{E}[\tau_x e^{-\alpha\tau_x}] = \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Pustimo li $\alpha \downarrow 0$ slijedi $\mathbf{E}[\tau_x] = \infty$, $x \neq 0$.

Neka F označava funkciju distribucije od τ_x. Uočite da je $F(t) = 0$ za $t \leq 0$. Formula (2.5.9) može se zapisati kao

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dF(t) = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Direktnim računanjem može se pokazati da vrijedi sljedeća formula:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dt = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Uspoređivanjem posljednje dvije formule slijedi da je funkcija distribucije F apsolutno neprekidna s funkcijom gustoće

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}\,.$$

Kažemo da τ_x ima Lévyjevu razdiobu. Dodatno vrijedi $\mathbf{E}[\tau_x] = +\infty$.[18]

[18] Provjerite tvrdnju sami.

POGLAVLJE 3

Itôv integral

Neka je $T > 0$, $H = (H_t : t \in [0, T])$ odgovarajući adaptirani slučajni proces i $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje na istom vjerojatnosnom prostoru s filtracijom. Cilj ovog poglavlja je definirati Itôv integral

$$\int_0^T H_t \, dB_t$$

i pokazati njegova svojstva. Uočimo da gornji integral ne možemo definirati po trajektorijama Brownovog gibanja (kao Lebesgue-Stieltjesov integral) jer je Brownovo gibanje neomeđene varijacije. Dodatno, diferencijalni račun koji se koristi za računanje s takvim integralima razlikuje se od uobičajenog diferencijalnog računa. Ovdje se diferencijalni račun temelji se Itôvoj formuli, koja u obzir uzima ne-nul kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja.
U financijama se Itôv integral koristi za modeliranje vrijednosti portfelja. Nakon što razvijemo Itôv račun, primjenit ćemo ga na izvod Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe za cijenu opcije. Također, u primjenama u financijama H_t će imati interpretaciju pozicije u financijskoj imovini u trenutku t, koja u principu ovisi o informaciji dostupnoj do trenutka t. Odavde slijedi zahtjev na adaptiranost slučajnog procesa H. S druge strane, budući prirasti Brownovog gibanja nezavisni su od $\mathcal{F}_t$. To znači da je naša pozicija u trenutku t nezavisna od buduće nesigurnosti na tržištu generirane Brownovim gibanjem B.

3.1. Itôv integral za jednostavne integrande

Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje zajedno s Brownovskom filtracijom $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Neka je $H = (H_t : t \in [0, T])$ adaptiran slučajni proces obzirom na $\mathbf{F}$. Prvi korak u definiciji Itôvog integrala sastoji se u tome da se integriraju jednostavni procesi.

Definicija 3.1.1. Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se **jednostavan proces** ako je

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \, 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{3.1.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$, i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.

Riječima, adaptiran slučajni proces H je jednostavan, ako postoji particija Π takva da je H konstantan na svakom intervalu particije $[t_j, t_{j+1})$. Kada kažemo konstantan mislimo da je jednak jednoj slučajnoj varijabli koja se ne mijenja kroz taj interval. Omeđenost slučajnih varijabli ϕ_j znači da postoji $M \in \mathbf{R}$ tako da je $|\phi_j| \le M$ za sve j (i g.s. sve $\omega \in \Omega$).

DEFINICIJA 3.1.2. Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s (3.1.1) definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ s

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).^{19} \tag{3.1.2}$$

Proces I zovemo **Itôv integral** jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s \, dB_s = (H \cdot B)_t \,.$$

NAPOMENA 3.1.3. (i) Uočimo da je za $t \in [t_{k-1}, t_k\rangle$,

$$\int_0^t H_s \, dB_s = \sum_{j=0}^{k-2} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_{k-1}(B_t - B_{t_{k-1}})$$

(ii) Iz definicije procesa I lako se vidi da je on $\mathbf{F}$-adaptiran. Također, uočimo da je preslikavanje $H \mapsto (H \cdot B)$ na $\mathcal{E}_T$ linearno.
(iii) Razmišljajmo o vrijednosti Brownovog gibanja B_t kao o jediničnoj cijeni financijske imovine (npr. jedne dionice) u trenutku t. Budući da B_t može biti manje od nule, takav model je loš, ali to ćemo u ovom trenutku zanemariti. O vremenima $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ mislimo kao o trenucima trgovanja u toj imovini, a o $\phi_{t_0}, \phi_{t_1}, \dots, \phi_{t_{n-1}}$ kao o pozicijama u imovini (broj dionica) unutar intervala oblika $[t_j, t_{j+1})$. Uočimo da je tada dobitak od takvog trgovanja u svakom trenutku t dan s I_t. Na proces I stoga možemo gledati na analogon procesa dobitka $G_t(\phi)$ u diskretnom modelu financijskog tržišta.

Prvo važno svojstvo slučajnog procesa I je da od Brownovog gibanja B nasljeđuje svojstvo martingalnosti.

TEOREM 3.1.4. *Itôv integral $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom* (3.1.2) *je martingal.*

DOKAZ. U Napomeni 3.1.3 već smo spomenuli kako je proces I $\mathbf{F}$-adaptiran. Također, iz omeđenosti slučajnih varijabli ϕ_j ($|\phi_j| \le M$ za sve j) slijedi da je za svaki $t \in [0,T]$,

$$\mathbf{E}[|I_t|] \le M \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}[|B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}|] = M \sqrt{\frac{2}{\pi} t} < \infty.$$

Neka su sada $0 \le s < t \le T$. Pretpostavimo da se s i t nalaze u različitim intervalima particije Π. Slučaj kada su ta vremena u istom intervalu particije dokazuje se slično.[20] Dakle, neka je $s \in [t_l, t_{l+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ za $l < k$. Jednakost (3.1.2) možemo napisati kao

$$\begin{aligned} I_t = & \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\ & + \sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \phi_k (B_t - B_{t_k}) \,. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

[19] $a \wedge b = \min\{a, b\}$
[20] Dokažite sami za vježbu.

Računamo uvjetno očekivanje svakog od četiri člana u formuli (3.1.3), uvjetno na σ-algebru $\mathcal{F}_s$. Budući da su sve slučajne varijable u prvom članu $\mathcal{F}_s$-izmjerive, vrijedi

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s\right] = \sum_{j=0}^{l-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\,. \tag{3.1.4}$$

Za drugi član imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\phi_l (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \,|\, \mathcal{F}_s] &= \phi_l \mathbf{E}[B_{t_{l+1}} - B_{t_l} \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &= \phi_l (B_s - B_{t_l})\,. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Zbrajanjem (3.1.4) i (3.1.5) dobivamo I_s. Dakle, preostaje pokazati da su uvjetna očekivanja trećeg i četvrtog člana jednaka nuli. Da bismo to pokazali računamo za $j = l+1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[\phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbf{E}[\phi_j (\mathbf{E}[B_{t_{j+1}} \,|\, \mathcal{F}_{t_j}] - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\quad= \mathbf{E}[\phi_j (B_{t_j} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s] = 0\,, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku koristili svojstvo martingalnosti Brownovog gibanja. Zbog linearnosti uvjetnog očekivanja slijedi

$$\mathbf{E}\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} \phi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \,|\, \mathcal{F}_s\right] = 0\,.$$

Na isti način se pokaže i da je uvjetno očekivanje četvrtog člana jednako nuli. □

Budući da je $I_0 = 0$, slijedi da je $\mathbf{E}I_t = \mathbf{E}I_0 = 0$ za sve $0 \le t \le T$. Specijalno, $\mathrm{Var} I_t = \mathbf{E}I_t^2$. Očekivanje kvadrata Itôvog integrala izračunato je u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1.5. *(Itôva izometrija) Itôv integral definiran s (3.1.2) zadovoljava*

$$\mathbf{E}I_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\, du\,. \tag{3.1.6}$$

Dokaz. Fiksiramo vrijeme $t > 0$. Uvedimo zbog jednostavnosti sljedeće oznake: $\Delta B_j = B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}$ i $\Delta t_j = t_{j+1} \wedge t - t_j \wedge t$. Neka je $t \in [t_k, t_{k+1}\rangle$. Tada je $I_t = \sum_{j=0}^k \phi_j \Delta B_j$, te vrijedi

$$I_t^2 = \sum_{j=0}^k \phi_j^2 \Delta B_j^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le k} \phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j\,.$$

Prvo pokazujemo da je očekivanje članova u drugoj sumi jednako nula. Za $i < j$ je $\phi_i \phi_j \Delta B_i$ $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerivo, dok je prirast ΔB_j nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$ i $\mathbf{E}\Delta B_j = 0$. Zato je

$$\mathbf{E}[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j] = \mathbf{E}[\phi_i \phi_j \Delta B_i] \mathbf{E}\Delta B_j = 0\,.$$

Pogledajmo sada član oblika $\phi_j^2 \Delta B_j^2$. Slučajna varijabla ϕ_j^2 je $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva, dok je kvadrat prirasta ΔB_j^2 nezavisan od $\mathcal{F}_{t_j}$, te $\mathbf{E}\Delta B_j^2 = \mathbf{E}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t})^2 = \Delta t_j$ za $j = 0, 1, \ldots, k$. Zato je

$$\begin{aligned}\mathbf{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}[\phi_j^2\Delta B_j^2] = \sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}[\phi_j^2]\mathbf{E}[\Delta B_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}\phi_j^2\Delta t_j\,. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Uočite da je H_u konstantna na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ i jednaka ϕ_j. Preciznije, $H_u(\omega) = \phi_j(\omega)$ za sve $u \in [t_j, t_{j+1}\rangle$, za g.s. sve $\omega \in \Omega$. Zato je

$$\phi_j^2\Delta t_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\,du\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Uvrstimo li u (3.1.7) dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}I_t^2 &= \sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\,du = \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}\wedge t} H_u^2\,du\right] \\ &= \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\,du\,.\end{aligned}$$

□

Napomena 3.1.6. Prethodnim teoremom pokazali smo da postoji izometrija između normiranih prostora $\mathcal{E}_T$ s produktom $\langle H, K\rangle = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right]$ i $L^2(\Omega)$ s produktom $\langle X, Y\rangle = \mathbf{E}[XY]$.

Proučimo na kraju kvadratnu varijaciju Itôvog integrala I.

Teorem 3.1.7. *Kvadratna varijacija do trenutka t Itôvog integrala I definiranog formulom* (3.1.2) *jednaka je*

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t H_u^2\,du\,. \tag{3.1.8}$$

Dokaz. Izračunajmo prvo kvadratnu varijaciju Itôvog integrala na intervalu $[t_j, t_{j+1}\rangle$ na kojem je H_u konstantan. Odaberimo particiju

$$t_j = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{j+1}$$

i promotrimo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}[I_{s_{i+1}} - I_{s_i}]^2 &= \sum_{i=0}^{m-1}[\phi_j(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})]^2 \\ &= \phi_j^2\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})^2\,.\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Kada $m \to \infty$ i korak $\max_{i=0,1,\ldots,m-1}(s_{i+1} - s_i) \to 0$, član $\sum_{i=0}^{m-1}(B_{s_{i+1}} - B_{s_i})^2$ teži prema kvadratnoj varijaciji Brownovog gibanja na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$, t.j., prema $t_{j+1} - t_j$. Prema tome, limes od (3.1.9) jednak je

$$\phi_j^2(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_u^2\,du\,.$$

Zbrajanjem svih odgovarajućih dijelova dobivamo formulu (3.1.8). □

Uočimo da se varijanca i kvadratna varijacija Itôvog integrala razlikuju. Po Teoremu 3.1.5, $\mathrm{Var} I_t = \mathbf{E} \int_0^t H_u^2 \, du$ (što je nenegativan realan broj), dok je po Teoremu 3.1.7, $\langle I \rangle_t = \int_0^t H_u^2 \, du$ (što je slučajna varijabla). Ponovimo da se kvadratna varijacija računa po putu (trajektoriji), dok je varijanca usrednjenje po svim putovima.

Napomena 3.1.8. (o notaciji).

(i) Prisjetimo se neformalne oznake za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja $dB_t dB_t = dt$. Tu jednakost smo interpretirali kao tvrdnju da Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena. Na sličan način, stohastički integral $I_t = \int_0^t H_u \, dB_u$ neformalno zapisujemo u obliku $dI_t = H_t \, dB_t$. To vodi do sljedeće oznake za $\langle I \rangle_t$:

$$dI_t dI_t = H_t^2 \, dB_t dB_t = H_t^2 \, dt \,. \tag{3.1.10}$$

(ii) Oznake

$$I_t = \int_0^t H_u \, dB_u \tag{3.1.11}$$

i

$$dI_t = H_t \, dB_t \tag{3.1.12}$$

imaju skoro isto značenje. Jednakost (3.1.11) ima precizno značenje dano definicijom (3.1.2). Jednakost (3.1.12) ima neprecizno značenje da kada se pomaknemo unaprijed u vremenu za “vrlo malo”, promjena Itôvog integrala I je H_t puta promjena Brownovog gibanja u tom malom vremenskom pomaku. Ta jednakost ima i precizno značenje koje se dobije integriranjem obiju strana. U tom slučaju moramo paziti na konstantu integriranja I_0:

$$I_t = I_0 + \int_0^t H_u \, dB_u \,.$$

Kažemo da je (3.1.12) diferencijalni oblik od (3.1.11), dok je (3.1.11) integralni oblik od (3.1.12).

3.2. Itôv integral za opće integrande

U ovom odjeljku govorit ćemo o Itôvom integralu za opće integrande. Cilj je proširiti definiciju Itôvog integrala tako da definicija bude konzistentna i da se prenose svojstva Itôvog integrala za jednostavne integrande. Za prostor općih integranada uzimamo familiju $\mathbf{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : 0 \le t \le T)$ koji zadovoljavaju sljedeći tehnički uvjet:

$$\mathbf{E} \int_0^T H_t^2 \, dt < \infty \,. \tag{3.2.1}$$

Ovu familiju procesa ćemo označavati s $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$. $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ je vektorski prostor sa skalarnim produktom

$$\langle H, K \rangle_{\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}} = \mathbf{E} \left[\int_0^T H_t K_t dt \right] , \quad H, K \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$$

i pripadnom normom $||H||^2_{\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}} = \langle H, H \rangle_{\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}}$. Uočimo da je trivijalno $\mathcal{E}_T \subset \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$.
Glavna ideja za proširenje definicije Itôvog integrala je aproksimacija procesa $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. Na primjer, pretpostavimo da $H = (H_t : 0 \le t \le T)$ ima

neprekidne putove[21]. Odaberimo particiju $\Pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ intervala $[0,t]$ i definiramo jednostavan proces $H^{(n)}$ tako da stavimo $H_u^{(n)} = H_{t_j^{(n)}}$ za sve $u \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Za takav jednostavan integrand po formuli (3.1.2) znamo izračunati $\int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Sada Itôv integral procesa H obzirom na Brownovo gibanje $B = (B_t : t \in [0,T])$ možemo definirati kao limes integrala takvih jednostavnih integranada kada se profinjuje particija. Ključan korak za provedbu takvog programa je sljedeća lema, koju navodimo bez dokaza.

LEMA 3.2.1. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ postoji niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} ||H^{(n)} - H||^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt = 0\,, \tag{3.2.2}$$

odnosno $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{ad}} H$, $n \to \infty$.

Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz Leme 3.2.1, te označimo $I_t^{(n)} = \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u$. Iz relacije (3.2.2) jednostavno slijedi da je niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$, odnosno da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt \le 2\left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2\, dt + \lim_{m\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T |H_t^{(m)} - H_t|^2\, dt\right) = 0.$$

Međutim, zbog Itôve izometrije (Teorem 3.1.5 primijenjen na Iôv integral $((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)$ koji je zbog linearnosti jednak procesu $I^{(n)} - I^{(m)}$) imamo da je

$$\mathbf{E} \int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt = \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2]\,,$$

pa je stoga

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = 0\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{3.2.3}$$

To znači da je niz Itôvih integrala $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ u trenutku t Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ za sve $t \in [0,T]$. Kako je $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ potpun, slijedi da niz $(I_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira (u L^2)i njegov limes zovemo Itôvim integralom procesa H obzirom na Brownovo gibanje B (u trenutku t) i označavamo $(H \cdot B)_t = I_t = \int_0^t H_u\, dB_u$. Dakle,

$$\int_0^t H_u\, dB_u = (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)}\, dB_u\,. \tag{3.2.4}$$

NAPOMENA 3.2.2. (i) Definicija Itôvog integrala za opće integrande je konzistentna, odnosno poopćuje Definiciju 3.1.2 i ne ovisi o odabiru aproksimirajućeg niza.[22]

(ii) Uočite da je $\int_0^t H_u\, dB_u$ samo oznaka za slučajnu varijablu $I_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tj. taj stohastički integral nije definiran po trajektorijama Brownovog gibanja.

(iii) Iz definicije direktno slijedi da je proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ $\mathbf{F}$-adaptiran.

Tako definiran integral nasljeđuje svojstva Itôvog integrala jednostavnih integranada. Sljedeći teorem navodi ta svojstva.

TEOREM 3.2.3. *Neka je $T > 0$, te neka je $H = (H_t : t \in [0,T]) \in \mathcal{L}^2_{ad}$. Tada slučajan proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom (3.2.4) ima sljedeća svojstva:*

[21] $t \mapsto H_t(\omega)$ su neprekidne funkcije na $[0,T]$ za g.s. $\omega \in \Omega$

[22] Tvrdnju provjerite sami.

(a) (neprekidnost) *Funkcija* $t \mapsto I_t$ *je neprekidna na* $[0,T]$ *g.s.*,

(b) (linearnost) *Za* $H, K \in \mathcal{L}^2_{ad}$ *i* $a, b \in \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$((aH + bK) \cdot B)_t = a(H \cdot B)_t + b(K \cdot B)_t,$$

(c) *(*Itôva izometrija*)* $\mathbf{E}I_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t H_u^2\, du$,

(d) (martingalnost) *Proces* I *je martingal obzirom na filtraciju* $\mathbf{F}$.

Prije nego krenemo s dokazom gornjeg teorema, dokazat ćemo pomoćnu propoziciju za (vremenski neprekidne) martingale.

Propozicija 3.2.4. *(Doobova* L^p*-nejednakost) Neka je* $X = (X_t : t \in [0,T])$ *zdesna neprekidni pozitivni submartingal i* $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada je*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^p\right] \leq q^p \mathbf{E}[X_t^p], \ t \geq 0.$$

Specijalno, za zdesna neprekidni martingal X *vrijedi*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^2\right] \leq 4\mathbf{E}[X_t^2], \ t \geq 0.$$

Dokaz. Koristimo Doobovu nejednakost za vremenski diskretne martingale.[23] Neka je $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz t.d. $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbf{Q} \cap [0,t]$. Tada zbog neprekidnosti zdesna submartingala X slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} X_s^p\right] &= \mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathbf{Q}\cap[0,t]} X_s^p\right] = \mathbf{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right] \\ &\overset{(\mathrm{TMK})}{=} \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right].\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Kako je proces $(X_{r_k} : k = 1, ..., n)$ diskretni submartingal, iz diskretne Doobove L^p-nejednakosti slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\{r_1,\dots,r_n\}} X_s^p\right] \leq q^p \mathbf{E}\left[X_{r_n}^p\right]. \tag{3.2.6}$$

Tvrdnja sada slijedi iz (3.2.5), (3.2.6) i činjenice da je X^p submartingal (Jensenova nejednakost) pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq t$ i $\mathbf{E}[X_{r_n}^p] \leq \mathbf{E}[X_t^p]$. □

Dokaz Teorema 3.2.3:

(i) Neka je $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ aproksimirajući niz za H iz Leme 3.2.1. Kako je $I^{(n)} = (H^{(n)} \cdot B)$ neprekidni martingal, po Doobovoj L^p-nejednakosti i (3.2.3) slijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n)} - I_t^{(m)}|^2\right] \leq 4\mathbf{E}[(I_T^{(n)} - I_T^{(m)})^2] \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Stoga, možemo odabrati podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}|^2\right] < 2^{-3k}.$$

[23]Vidi Teorem 1.87 u skripti Z.Vondraček: *Slučajni procesi*

Tada za događaje

$$A_k = \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k} \right\},\ k \in \mathbf{N}$$

vrijedi da je nužno $\mathbf{P}(A_k) < 2^{-k}$. Kako je $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ po Borel-Cantellijevoj lemi slijedi da je $\mathbf{P}(\overline{\lim}_k A_k) = 0$. Prema tome niz $(I^{(n_k)}(\omega))_k$ je uniformno Cauchyjev u $C([0,T])$ za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, odnosno

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k\geq m} \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| < 2^{-k} \right\} \right) = 1.$$

Zbog potpunosti prostora $(C([0,T]), ||\cdot||_\infty)$ slijedi da je $(I^{(n_k)})_k$ g.s. konvergentan i limes je g.s. neprekidna funkcija. Kako niz $(I^{(n)})_n$ konvergira k I u L^2, tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti g.s. limesa.

(ii) Slijedi direktno iz linearnosti Itôvog integrala za jednostavne integrande, vidi Napomenu 3.1.3 (b).

(iii) Iz $I_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} I_t$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[(I_t^{(n)})^2] = \mathbf{E}[I_t^2]$. Iz Itôve izometrije za jednostavne integrande, Teorem 3.1.5, sada slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du \right] = \mathbf{E}[I_t^2].$$

S druge strane $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{\text{ad}}} H$ pa je specijalno

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_0^t (H_u^{(n)})^2 du \right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t H_u^2 du \right].$$

Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti limesa.

(iv) Proces I je adaptiran i po (c) dijelu vrijedi $\mathbf{E}[|I_t|] \leq \mathbf{E}[I_t^2]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Ostaje pokazati da je $\mathbf{E}[I_t - I_s|\mathcal{F}_s] = 0$ za sve $0 \leq s < t$. Iz Jensenove nejednakosti i definicije Itôvog integrala slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{E}\left[I_t - I_t^{(n)} | \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \right] &\leq \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)} \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbf{E}\left[\left(I_t - I_t^{(n)} \right)^2 \right] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

pa postoji podniz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.d. je

$$\mathbf{E}\left[I_t - I_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s \right] \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{(g.s.)}.$$

Kako $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{L^2} I_s$, postoji podniz (kojeg isto označavamo s $(n_k)_k$) t.d. $I_s^{(n_k)} \xrightarrow{g.s.} I_s$. Tvrdnja sada slijedi iz martingalnosti procesa $I^{(n)}$, te

$$\mathbf{E}[I_s - I_t|\mathcal{F}_s] = I_s - I_s^{(n_k)} + \mathbf{E}\left[I_s^{(n_k)} - I_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s \right] + \mathbf{E}\left[I_t^{(n_k)} - I_t | \mathcal{F}_s \right].$$

□

Napomena 3.2.5. Korištenjem Leme 3.2.1 može se također pokazati da je

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t H_u^2\, du,\ t \in [0,T].$$

Uočite da za $H \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{ad}}$ nužno vrijedi da je $\int_0^t H_u^2\,du < \infty$ g.s.