Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2020./2021.
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/

Tema br. 1:

(Ne)očekivane primjene integrala

Aleksandar Bulj, 19. 3. 2021.

Cilj ovog predavanja je izložiti primjene tehnike integrala u raznim problemima koji naizgled nemaju direktne veze s integralima. Pretpostavlja se da je čitatelj upoznat sa Riemannovim integralom, osnovama teorije redova te osnovama linearne algebre. Čitatelj je pozvan pokušati riješiti svaki od navedenih problema bilo kojom drugom tehnikom kako bi uočio važnost primjene integrala u određenim problemima.

1 Integralni identiteti

U prvom odjeljku predavanja prikazat ćemo na nekoliko primjera kako poznavanje raznih integralnih identiteta može značajno pomoći u rješavanju raznih problema. Prije zadataka uvedimo sljedeću oznaku.

Za proizvoljan skup $A \subset \mathbb{R}$, sa $\mathbb{1}_A$ označavamo karakterističnu funkciju tog skupa, tj. funkciju

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Započnimo s jednostavnim primjerom.

Primjer 1 (Izborno za VJIMC 2016.)**.** Za svaki prirodan broj n dani su brojevi $0 \leq a_n < b_n \leq 1$ takvi da je $\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) > 2016$. Odredite najveći prirodan broj M takav da među skupovima $[a_n, b_n]$ postoji njih M čiji je presjek neprazan.

Rješenje. Tvrdnja da je suma strogo veća od 2016 ekvivalentna je postojanju parcijalne sume koja je veća od 2016 pa možemo pretpostaviti da imamo N intervala čija je ukupna suma veća od 2016. Promotrimo što bi bilo ako bi umjesto 2016 bio zadan broj 1. Intuitivno je "jasno" da ne možemo složiti intervale tako da budu svi unutar $[0, 1]$ i disjunktni ako im je suma duljina veća od 1 pa postoji sigurno točka koja se nalazi u 2 intervala. Formalni dokaz proveli bismo metodom kontradikcije. Pretpostavimo da su svi disjunktni i preimenujmo intervale tako da vrijedi $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1$. Kontradikciju tada dobivamo na način:

$$1 \geq b_N - a_1 \geq \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) > 1.$$

Sličnom intuicijom dolazimo do pretpostavke da je $M = 2017$, ali za razliku od prethodnog primjera, nešto je teže formalizirati dokaz. Nije očito kako formalizirati pristup "kad bi se svaka točka se nalazila u najviše $M - 1$ intervala, ukupna suma duljina bila bi manja od $M - 1$" bez korištenja barem ideje linearnosti integrala jednostavnih funkcija. Dokažimo formalno da postoji točka koja se nalazi u barem 2017 intervala.

Primijetimo da vrijedi sljedeći integralni identitet:

$$b_n - a_n = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}(x)dx$$

i da se pretpostavka da se točka x nalazi u najviše k intervala može ekvivalentno zapisati kao

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}(x) \leq k.$$

Prema tome, uz pretpostavku da se svaka točka nalazi u najviše 2016 intervala vrijedi sljedeći niz nejednakosti

$$2016 < \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}(x)dx \leq \int_0^1 2016 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = 2016,$$

što daje očitu kontradikciju. Primjer postojanja intervala čija je suma duljina veća od 2016, takvih da se svaka točka nalazi u najviše 2017 jasno je kako napraviti iz dokaza i ostavljamo za vježbu čitatelju. $\square$

U sljedećem zadatku iskoristit ćemo sličan, ali nešto kompliciraniji integralni identitet.

Primjer 2. Za realne brojeve $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dokažite da vrijedi:

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_i - a_j| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_i - b_j| \leq 2 \sum_{i,j=1}^{n} |a_i - b_j|$$

i odredite kada vrijedi jednakost.

Rješenje. Budući da je nejednakost invarijantna na simultane translacije, tj. na zamjenu: $a_i \mapsto a_i + t$ i $b_i \mapsto b_i + t$, $i = 1, 2, \dots, n$ i $t \in \mathbb{R}$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi brojevi nenegativni. Koristeći: $|x - y| = x + y - 2\min\{x, y\}$ nejednakost poprima sljedeći oblik:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i, a_j\} + \sum_{i,j=1}^{n} \min\{b_i, b_j\} \geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i, b_j\}.$$

Primijetimo sada da sljedeći integralni identitet vrijedi za sve $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\min\{a, b\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,a]}(t) \mathbb{1}_{[0,b]}(t) dt.$$

Nejednakost tada možemo ekvivalentno zapisati kao:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) \mathbb{1}_{[0,a_j]}(t) dt + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,b_i]}(t) \mathbb{1}_{[0,b_j]}(t) dt \geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) \mathbb{1}_{[0,b_j]}(t) dt,$$

Međutim, zamjenom poretka integrala i sume te faktorizacijom nejednakost je ekvivalentna s:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,b_i]}(t) \right)^2 dt \geq \int_{\mathbb{R}} 2 \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) \right) dt,$$

odnosno s:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) - \mathbb{1}_{[0,b_i]}(t) \right) \right)^2 dt \geq 0,$$

što očito vrijedi.

Preostaje odrediti slučaj jednakosti. Iz posljednjeg zapisa vidimo da je nejednakost invarijantna na uređaj a_i-jeva i b_i-jeva pa možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da vrijedi $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$ i $0 < b_1 \leq \cdots \leq b_n$. Tvrdimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = b_i$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$.

Naime, kako je podintegralna funkcija po dijelovima konstantna, da bi vrijedila jednakost, ona mora biti jednaka 0 za svaki t. Međutim, tada za fiksan t vrijedi:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{[0,a_i]}(t) - \mathbb{1}_{[0,b_i]}(t) \right) = |\{i : a_i \geq t\}| - |\{i : b_i \geq t\}|, \tag{1}$$

gdje smo sa $|S|$ označili broj elemenata skupa S. Kad bi postojao neki j takav da je $a_j < b_j$, tada bi za $t \in (a_j, b_j)$ vrijedilo:

$$|\{i : a_i \geq t\}| \leq n - j < n - j + 1 \leq |\{i : b_i \geq t\}|,$$

što je očita kontradikcija s (1) pa zaključujemo da jednakost vrijedi ako i samo ako za rastuće poredane nizove vrijedi $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ i time je zadatak završen. □

Vrlo čest trik prevođenja problema na integralni oblik je sljedeća jednostavna opservacija koja vrijedi za sve $n > -1$

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx \tag{2}$$

Navedeni identitet u potpunosti je elementaran, ali često se vrlo teški zadaci na natjecanjima koji naizgled nemaju veze s integralima rješavaju upravo primjećivanjem (2). Pokazat ćemo korištenje navedenog identiteta na dva primjera.

Primjer 3 (Izborno za VJIMC 2015.)**.** Dokažite da je matrica $A = [a_{ij}]_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ zadana s:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j}$$

za $i, j = 1, 2, \ldots, n$ pozitivno definitna.

Rješenje. Neka je $v = [v_1, \ldots, v_n]^\top$ proizvoljan vektor različit od 0. Tada koristeći identitet (2) vrijedi:

$$\langle Av, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{i+j} v_i v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 x^{i+j-1} v_i v_j dx = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} v_i x^{i-\frac{1}{2}} v_j x^{j-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i x^{i-\frac{1}{2}} \right)^2 dx > 0$$

Posljednja nejednakost je stroga budući da je funkcija unutar integrala neprekidna nenegativna funkcija koja nije svugdje jednaka 0 zbog toga što je $\sum_{i=1}^n v_i x^i$ ne-nul polinom. Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Prethodni postupak ponekad se koristi i u "obratnom smjeru" - treba pokazati pozitivnost izraza, a mi ćemo ga zapisati matrično i dokazati pozitivnu definitnost matrice. Kao i u prethodnom primjeru, vezu između dva oblika daje izraz (2).

Primjer 4. Dokaži da za sve $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{1 + |i-j|} \geq 0$$

Rješenje. Korištenjem (2), navedeni izraz jednak je

$$\int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x^{|i-j|} dx = \int_0^1 \langle A(x)a, a\rangle dx$$

gdje je $a = [a_1, \ldots, a_n]^\top$ i $A(x) = [x^{|i-j|}]_{i,j=1}^n$. Dakle, za dokazivanje nenegativnosti navedenog integrala dovoljno je dokazati da je matrica $A(x)$ pozitivno semidefinitna za svaki $x > 0$. Supstitucijom $x = \sin(t)$ i provodeći dekompoziciju Choleskog dobivamo: $A(\sin t) = R^\top(t) R(t)$, gdje je

$$R(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin t & \sin^2 t & \cdots & \sin^{n-1} t \\ 0 & \cos t & \cos t \sin t & \cdots & \cos t \sin^{n-2} t \\ 0 & 0 & \cos t & \cdots & \cos t \sin^{n-3} t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos t \end{bmatrix}$$

Svaka realna matrica oblika $R^\top R$ je pozitivno semidefinitna zbog toga što za proizvoljan vektor v vrijedi

$$\langle R^\top Rv, v\rangle = \langle Rv, Rv\rangle \geq 0$$

Dakle, matrica $A(x)$ je pozitivno semidefinitna za svaki $x \in [0, 1]$ pa je i traženi integral nenegativan. Štoviše, promotrimo li determinantu od $R(t)$, vidimo da je A pozitivno definitna za svaki $x \in (0, 1)$ pa je nejednakost stroga. $\square$

Nastavimo s primjerom koji je također naizgled "očit" ako skiciramo funkcije, ali za formalni dokaz opet je potrebno koristiti određeni integralni identitet koji predstavljamo u nastavku (ili rezultat o izoliranosti nultočaka holomorfne funkcije iz kompleksne analize koji nije tema ovog predavanja).

Primjer 5. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dokažite da je familija funkcija $\{\sin(kx)\}_{k=1}^n$ linearno nezavisna u vektorskom prostoru neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$.

Rješenje. Potrebno je dokazati da

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) = 0$$

povlači $a_k = 0$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$. Budući da su navedene funkcije periodične s periodom 2π, dovoljno je promotriti ponašanje funkcija na tom intervalu. Primijetimo da uz pretpostavku da je gornji izraz jednak 0 vrijedi:

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) \right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} a_k^2 \sin^2(kx) dx + \sum_{k \neq l} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

gdje posljednja jednakost vrijedi zbog

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} \pi & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \tag{3}$$

Odatle zaključujemo da vrijedi $a_k = 0$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$ i time je tvrdnja dokazana.

Primijetimo da jednakost (3) implicira ortogonalnost familije funkcija $\{\sin(kx)\}_{k=1}^{n}$ na unitarnom prostoru neprekidnih funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$, uz standardni skalarni produkt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Zbog toga se navedeni dokaz mogao zapisati i malo elegantnije od kvadriranja izraza, ali navedeni pristup omogućuje poopćenje u kojem nemamo ortogonalnost, a koje je ostavljeno kao zadatak za zadaću. Potpuno analognim računom kao u (3) slijedi da je i familija $\{\sin(kx), \cos(kx)\}_{k=1}^{n}$ ortogonalna na zadanom skupu. Navedena opservacija motivirla je razvoj važne teorije Fourierovih redova budući da navedene funkcije čine svojevrsnu bazu beskonačno dimenzionalnog unitarnog prostora koji je upotpunjenje prostora neprekidnih funkcija na intervalu uz normu induciranu navedenim skalarnim produktom.
Za precizan iskaz tvrdnje o kojim funkcijama i o kakvoj bazi se radi, potrebno je poznavanje teorije Lebesgueovog integrala i osnova beskonačno dimenzionalnih vektorskih prostora pa ga preskačemo. □

Sljedeći zadatak sličnog je tipa kao i prethodni iako se na prvi pogled ne čini tako.

Primjer 6 (Izborno za VJIMC 2007.). Neka je f realni polinom stupnja n čiji koeficijenti zadovoljavaju svojstvo $a_k = a_{n-k}$ za $k = 0, 1, \dots, n$ i među koeficijentima je parno mnogo njih različito od 0. Dokažite da f ima barem jednu kompleksnu nultočku apsolutne vrijednosti 1.

Rješenje. Ako je n neparan, lako se vidi da je -1 nultočka od f pa preostaje dokazati tvrdnju u slučaju kad je $n = 2m$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Iz uvjeta parnosti broja koeficijenata različitih od 0 zaključujemo da je "srednji" koeficijent, a_m, jednak 0. Definirajmo $b_k := a_k = a_{n-k}$ za $k = 0, 1, 2, \dots m-1$ i definirajmo funkciju $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ na način: $g(t) := e^{-imt} f(e^{it})$. Trebamo, dakle, pokazati da funkcija g ima realnu nultočku, nazovimo ju t_0, jer tada je e^{it_0} nultočka polinoma f. Međutim, korištenjem jednakosti koeficijenata i činjenice da je $e^{it} = \cos t + i \sin t$, dobijemo da je:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \cos(kt)$$

pa kako su svi $b_k \in \mathbb{R}$, g je zapravo realna (ne samo kompleksna) neprekidna funkcija. Primijetimo li dodatno da je

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0,$$

zaključujemo da funkcija g ima nultočku na $[0, 2\pi]$. Naime, funkcija g ne može biti strogo pozitivna ni strogo negativna na cijelom $[0, 2\pi]$ zbog navedene integralne jednakosti pa po Bolzano - Weierstrassovom teoremu funkcija g ima nultočku na $[0, 2\pi]$. □

Primjer 7 (IMC 2014.). Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dokažite da je

$$f^{(n)}(x) < \frac{1}{n+1}$$

gdje je sa $f^{(n)}(x)$ označena n-ta derivacija funkcije f.

Rješenje. Primijetimo da je

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(tx) dt$$

Teoremom o deriviranju funkcije pod znakom integrala dobijemo

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 (\cos(xt))dt = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial x^n}(cos(xt))dt = \int_0^1 t^n g_n(xt)dt$$

gdje je $g_n(u)$ neka od funkcija $\pm\sin u, \pm\cos u$. Konačno, kako je $|g_n(u)| \leq 1$ (uz jednakost za samo konačno mnogo točaka), slijedi:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \int_0^1 t^n |g_n(xt)|dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

□

Prelazimo na sljedeći trik sa integralnim identitetima. Parcijalnom integracijom n puta primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeći identitet:

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

Međutim, zbog toga što je funkcija $t \mapsto t^\alpha$ integrabilna na $[0,1]$ u smislu nepravog integrala svaki $\alpha > -1$ i zbog dovoljno brzog pada eksponencijalne funkcije u beskonačnosti, vidimo da gornji integral konvergira u smislu nepravog Riemannovog integrala za svaki realni broj $n > -1$. Potaknuti prethodnim opservacijama uvodimo sljedeću definiciju. Primijetimo da je u sljedećoj definiciji eksponent od t translatiran samo kako bi domena bila $\mathbb{R}^+$ umjesto malo neprirodne domene $\mathbb{R}_{>-1}$.

Definicija 8. *Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiranu s*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

*nazivamo **Gama funkcijom**.*

Prije korištenja gama funckije u zadacima u sljedećoj lemi navodimo nekoliko osnovnih svojstava gama funkcije:

Lema 9. *Za gama funkciju vrijede sljedeće tvrdnje.*

1. *Za $x \in \mathbb{R}^+$ vrijedi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*
2. *$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.*
3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\Gamma(n) = (n-1)!$ (uz konvenciju $0! := 1$) i $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.*
4. *Za $p, s \in \mathbb{R}^+$ vrijedi:*

$$p^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1} e^{-pt} dt \tag{4}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnje redom kojim su napisane.

1. Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$$

2. Koristeći supstituciju $t = s^2$ i poznati Gaussov integral: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ dobivamo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

3. Obje jednakosti slijede indukcijom iz prvog i drugog svojstva.
4. Tvrdnja slijedi zamjenom varijabli $t \mapsto \frac{t}{p}$ u integralu.

□

Identitet (4) iz prethodne propozicije možemo shvatiti kao generaliziranu varijantu više puta korištenog identiteta (2) uz $p = n + 1$ i $s = 1$:

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx = \int_0^\infty e^{-(n+1)t} dt$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz zamjene varijabli $x \mapsto e^{-t}$. Pokažimo primjerom kako koristiti prethodno navedenu generalizaciju na jednom natjecateljskom problemu.

Primjer 10 (VJIMC 2012., seniori)**.** Neka su a, b, c, x, y, z, t pozitivni realni brojevi, takvi da je $1 \leq x, y, z \leq 4$. Dokažite da je

$$\frac{x}{(2a)^t} + \frac{y}{(2b)^t} + \frac{z}{(2c)^t} \geq \frac{y+z-x}{(b+c)^t} + \frac{x+z-y}{(a+c)^t} + \frac{x+y-z}{(a+b)^t}$$

Rješenje. Koristeći prethodnu opservaciju, nakon množenja obje strane sa $\Gamma(t)$, problem je ekvivalentan s:

$$\int_0^\infty s^{t-1} \left(xe^{-2as} + ye^{-2bs} + ze^{-2cs} - (y+z-x)e^{-(b+c)s} - (x+z-y)e^{-(a+c)s} - (x+y-z)e^{-(a+b)s} \right) ds \geq 0$$

Dakle, za dokaz tvrdnje dovoljno je dokazati da je funkcija pod integralom nenegativna za svaki $s \geq 0$. Neka je sad s fiksan, neka je $A = e^{-as}$, $B = e^{-bs}$ i $C = e^{-cs}$. Dovoljno je dokazati da je

$$xA^2 + yB^2 + zC^2 - (y+z-x)BC - (x+z-y)AC - (x+y-z)AB \geq 0$$

što je ekvivalentno s:

$$x(A-B)(A-C) + y(B-A)(B-C) + z(C-A)(C-B) \geq 0.$$

Neka je, bez smanjenja općenitosti $A \leq B \leq C$ (smijemo pretpostaviti uređaj jer je izraz simetričan po A,B,C). U tom slučaju gornji izraz je rastuća funkcija po x i z, a padajuća po y pa se minimum postiže za $x = z = 1$ i $y = 4$, a u tom slučaju izraz postaje:

$$(A-B)(A-C) + 4(B-A)(B-C) + (C-A)(C-B) = (A-2B+C)^2 \geq 0.$$

Time je dokaz završen. □

Sljedeći problem postavljen na stranici Mathoverflow, a elegantni dokaz koji predstavljamo dao je poznati matematičar Fedor Nazarov.

Primjer 11. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}} > 0$$

Prije nego napišemo dokaz, prokomentirat ćemo jednostavniji slučaj kao motivaciju. Promotrimo najprije slučaj bez korijena u nazivniku, tj. kako bismo dokazali da je izraz $g(x) = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$ pozitivan za sve $x \in \mathbb{R}$. Poznato je da je navedeni izraz jedan od ekvivalentnih zapisa funkcije e^x, ali pokušat ćemo dokazati pozitivnost bez korištenja svih činjenica koje znamo o eksponencijalnoj funkciji kako bismo dobili ideju za dokaz početnog problema. Naime, očito je da nultočka može postojati samo za $x < 0$ budući da za $x \geq 0$ imamo red s pozitivnim članovima. Red kojim je zadana funkcija g je uniformno konvergentan na svakom intervalu pa je funkcija g neprekidna. Također, zbog toga što je red derivacija članova reda uniformno konvergentan, funkcija g je derivabilna i deriviranjem član po član vidimo da vrijedi $g'(x) = g(x)$. Pretpostavimo sada da g ima nultočku i da je x_0 najveća nultočka funkcije (skup nultočaka neprekidne funkcije koji je ograničen odozgo ima maksimum). Dakle, za svaki $x > x_0$ vrijedi $g(x) = g'(x) > 0$ pa odatle za svaki $x > x_0$ slijedi:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} g'(t)dt = \int_{x_0}^{x_0} g(t)dt < \int_{x_0}^{x} g(x)dt = g(x)(x - x_0)$$

gdje stroga nejednakost vrijedi zbog toga što je funkcija rastuća na intervalu gdje je pozitivna. Konačno, dijeljenjem obje strane sa $g(x)$ dobijemo kontradikciju ako odaberemo x takav da je $x - x_0 < 1$.

Primijetimo da je u prethodnom rješenju ključna jednakost $g' = g$ posljedica jednostavnog identiteta $(x^n)' = nx^{n-1}$. Pokušajmo stoga na sličan način dokazati i početni problem.

Rješenje. Označimo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$$

Vidimo da je funkcija dobro definirana jer je zadana apsolutno konvergentnim redom. Htjeli bismo naći operator koji će "pokratiti" samo $\sqrt{n}$ iz nazivnika uz x^n. Nazarov tu svrhu konstruira operator "polovične derivacije" pogodan za navedeni problem. Iako je njegova konstrukcija motivirana dubokim rezultatima matematičke analize, zapravo je posljedica identiteta koji možemo shvatiti kao (netrivijalno) proširenje identiteta (4) na negativne s. Uvrštavanjem $s = -\frac{1}{2}$ u (4) dobili bismo integral koji ne konvergira zbog singulariteta funkcije $t \mapsto t^{-\frac{3}{2}}$, međutim, nadamo se da ukoliko ublažimo singularitet u 0 da ćemo dobiti sličnu formulu. To je sadržaj sljedeće leme.

Lema 12. *Postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $p \in \mathbb{R}^+$ i $s \in (-1, 0)$ vrijedi:*

$$p^{-s} = C \int_0^{\infty} t^{s-1}(1 - e^{-pt})dt \tag{5}$$

Dokaz. Integral na desnoj strani dobro je definiran u smislu nepravog Riemannovog integrala jer je $1 - e^{-pt} = O(t)$ za $t \to 0^+$ i $1 - e^{-pt} = O(1)$ za $t \to \infty$ a funkcije $t \mapsto t^s$ i $t \mapsto t^{s-1}$ su integrabilne u okolini 0 odnosno ∞ u smislu nepravog Riemannovog integrala. Zamjenom varijabli $t \mapsto t/p$ u sljedećem integralu dobivamo

$$\int_0^{\infty} t^{s-1}(1 - e^{-pt})dt = p^{-s} \int_0^{\infty} t^{s-1}(1 - e^{-t})dt$$

pa tvrdnja vrijedi uz konstantu $C = (\int_0^{\infty} t^{s-1}(1 - e^{-t})dt)^{-1}$. □

Napomena. Ukoliko bismo htjeli dobiti analogni identitet od (5) za ne-cjelobrojne potencije od p veće od 1, tada bismo od funkcije e^{-ps} trebali oduzeti više početnih članova Taylorovog reda oko 0 kako bismo ublažili singularitet.

Uvrštavanjem $p = n$ i $s = -\frac{1}{2}$ u (5) te zamjenom varijabli $t \mapsto \ln t$ vidimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$n^{\frac{1}{2}} = C^{-1} \int_0^1 (1 - t^n) \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dt}{t}$$

Množenjem obje strane sa x^n dobivamo:

$$n^{\frac{1}{2}} x^n = C^{-1} \int_0^1 (x^n - (xt)^n) \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dt}{t}$$

Sada množenjem obje strane sa $(n!)^{-\frac{1}{2}}$ i sumiranjem po svim $n \geq 0$ dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$xf(x) = C^{-1} \int_0^1 (f(x) - f(xt)) \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dt}{t}$$

Ostatak dokaza sada je sličan kao u lakšem slučaju koji smo prokomentirali prije početka dokaza. Za $x \geq 0$ imamo red s pozitivnim članovima pa funkcija f može imati samo negativnu nultočku. Pretpostavimo da nultočka postoji i označimo najveću nultočku sa x_0 (kao i prije, uniformna konvergencija implicira neprekidnost pa skup nultočaka, ako je neprazan, ima maksimum). Tada za x_0 vrijedi:

$$0 = x_0 f(x_0) = C^{-1} \int_0^1 (f(x_0) - f(tx_0)) \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} < 0$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi zbog toga što je $x_0 < 0$ i što je najveća nultočka pa je $f(x_0) - f(tx_0) < 0$ za sve $t \in [0, 1)$. Dakle, funkcija f nema nultočaka u $\mathbb{R}$ i time je tvrdnja dokazana. □

Odjeljak završavamo dokazom jedne poznate netrivijalne tvrdnje iracionalnosti od π, koja je također posljedica još jednog integralnog identiteta.

Primjer 13. π je iracionalan.

Dokaz. Za $n \geq 0$ definirajmo

$$I_n := \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t \, dt \tag{6}$$

Navedeni integral prirodno se pojavljuje kod računanja jezgre koja odgovara Bochner-Rieszovovom multiplikatoru u teoriji Fourierovih redova. Međutim ta činjenica nije potrebna za razumijevanje ostatka dokaza koji je nakon ovog koraka elementaran.

Direktnim računanjem dobivamo $I_0 = 2$ i $I_1 = 4$ te dvostrukom parcijalnom integracijom dobivamo:

$$I_{n+1} = (4n+2)I_n - \pi^2 I_{n-1} \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Iz prethodne rekurzije indukcijom slijedi da je $I_n = P_n(\pi^2)$, gdje je P_n polinom sa cjelobrojnim koeficijentima stupnja najviše n.

Pretpostavimo da je π racionalan. Tada je π^2 također racionalan pa označimo $\pi^2 = \frac{p}{q}$, gdje su $p, q \in \mathbb{N}$ relativno prosti. Kako je P_n polinom sa cjelobrojnim koeficijentima stupnja najviše n, tada vrijedi

$$q^n I_n = q^n P_n(\pi^2) = q^n P_n(p/q) \in \mathbb{Z}$$

Zbog pozitivnosti funkcije unutar integrala u (6) očito vrijedi:

$$q^n I_n > 0$$

pa iz prethodne dvije jednakosti zaključujemo da mora vrijediti

$$q^n I_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

S druge strane, iz jednostavne ocjene:

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t \leq \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n, \quad \text{za} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

slijedi:

$$q^n I_n \leq q^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^{2n}}{4^n} dt = q^n \cdot \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}$$

pa kako desna strana prethodnog izraza konvergira u 0, po teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n \to \infty} q^n I_n = 0.$$

Međutim, to je kontradikcija sa ocjenom (7) koju smo dobili uz pretpostavku da je π racionalan. Dakle, pretpostavka je kriva pa slijedi da je π iracionalan.

□

2 Integral kao očekivanje

Često se u matematici susrećemo s problemima u kojima moramo dokazati da je maksimum nekog skupa ograničen odozdo ili odozgo. Dva navedena problema, iako imaju sličan iskaz, fundamentalno su različiti. Naime, ako želimo pokazati da je maksimum nekog skupa ograničen odozgo, onda trebamo koristiti svojstva elemenata tog skupa i dokazati da tvrdnja vrijedi za proizvoljan element. S druge strane, ako tražimo donju ocjenu za maksimum nekog skupa, najčešće je potrebno naći element ili mali skup elemenata za koji se (skoro) postiže maksimum i onda pokazati ocjenu za taj skup. Ukoliko je teško reći nešto o veličini pojedinih elemenata skupa, često se korisnom pokazuje sljedeća jednostavna vjerojatnosna ideja - ako je očekivana vrijednost slučajnog elementa veća od tražene donje ograde, tada je maksimalni element sigurno veći od tražene donje ocjene. Navedeni princip ima široku primjenu u kombinatorici, a u analizi je, u osnovnom obliku, jednostavna posljedica definicije integrala i može se zapisati kao:

Za svaki "dovoljno lijep skup"[1] A (najčešće interval ili uniju intervala) i integrabilnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, vrijedi

$$\sup_{x \in A} f(x) \geq \frac{1}{|A|} \int_A f(x) dx$$

[1]Upućen čitatelj primijetit će da "dovoljno lijep skup" označava zapravo Jordan izmjeriv skup u slučaju Rimemannovog integrala odnosno Lebesgue izmjeriv skup u slučaju Lebesgueovog integrala kako bi njegova veličina bila definirana, ali namjerno smo izostavili preciznu definiciju budući da navedena općenitost nije potrebna za razumijevanje primjera koje navodimo.

gdje je $|A|$ veličina skupa A, tj. integral jedinice po tom skupu.

Kod primjene navedene tehnike moramo paziti da ograničavanjem maksimuma prosjekom često radimo neoptimalnu ocjenu pa problem možemo svesti ili na značajno teži, a nekada prosjek neće biti dovoljno velik pa moramo tražiti drugi način rješavanja problema.

Započnimo ovaj odjeljak jednim teškim natjecateljskim problemom da vidimo kako navedeni pristup nije pogodan isključivo za slabe ocjene.
Iako se na prvi pogled može učiniti da je tako, sljedeći problem nije nikako posljedica svojstva Čebiševljevih polinoma o minimizaciji supremuma na intervalu normiranih polinoma (polinoma s vodećim koeficijentom 1).

Primjer 14 (IMC 2015., problem 10)**.** Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p(x)$ polinom stupnja n sa cjelobrojnim koeficijentima. Dokažite da je:

$$\max_{x\in[0,1]} |p(x)| > e^{-n}$$

Rješenje. Ideja rješenja slična je, kao što smo rekli, supremum funkcije odozdo ograničiti prosjekom te funkcije po intervalu, tj.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq \int_0^1 |f(x)|dx$$

Funkcija $f(x) := \ln|p(x)|$ neprekidna je na komplementu nultočaka polinoma p pa tvrdimo da je dovoljno dokazati:

$$\int_0^1 \ln|p(x)| \geq -n.$$

Naime, za proizvoljan $r \in \mathbb{R}$, oko svake nultočke polinoma p možemo naći neku otvorenu okolinu gdje će vrijediti $|f(x)| < r$ pa se supremum funkcije f sigurno nalazi u komplementu unije takvih skupova. Kako je navedeni komplement zatvoren skup unutar $[0,1]$, on je kompaktan pa funkcija na njemu postiže maksimum, tj. $\sup_{x\in[0,1]} f(x) = \max_{x\in[0,1]} f(x)$.

Ako polinom p ima nultočke u skupu $\{0,1\}$, zapišimo ga u obliku $p(x) = x^k(1-x)^l q(x)$, gdje je $q(x)$ polinom kojemu ni 0 ni 1 nisu nultočke. Iz algoritma za dijeljenje polinoma slijedi da je polinom q opet polinom sa cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći svojstvo logaritma da produkt prevodi u zbroj i činjenicu da je

$$\int_0^1 \ln|x| = \int_0^1 \ln|1-x| = -1$$

preostaje nam dokazati da je

$$\int_0^1 \ln|q(x)|dx \geq -\deg(q)$$

Polinom q također ćemo napisati kao produkt monoma, ali on općenito ima kompleksne nultočke pa nam je potrebna sljedeća ocjena za veličinu pojedinog monoma.

Lema 15. *Za proizvoljan kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, 1$ vrijedi:*

$$\int_0^1 \ln|x-z|dx \geq -1 + \frac{\ln|z| + \ln|z-1|}{2}$$

Primijetimo da je dana ocjena potpuno neoptimalna u slučaju kad je z jednak 0 ili 1 pa smo integral po takvim članovima morali eksplicitno izračunati (srećom, to je bio jednostavan problem).

Dokaz. Neka je $z = a + bi$. Tada primjenjujući parcijalnu integraciju na na način $u = \ln((x-a)^2 + b^2)$ i $dv = (x-a)dx$ vrijedi (uvjerite se da ova formalna parcijalna integracija vrijedi i u slučaju $a \in (0,1)$, $b = 0$ u smislu nepravog Riemannovog integrala rastavom na $(0,a)\cup(a,1)$ i primjenom navedene parcijalne integracije na svakom intervalu posebno):

$$\int_0^1 \ln|x-z|dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln((x-a)^2+b^2)dx = \frac{1}{2}(x-a)\ln\left((x-a)^2+b^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Primijetimo da je

$$-\int_0^1 \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+b^2}dx = -1 + \int_0^1 \frac{b^2}{(x-a)^2+b^2}dx \geq -1$$

pa preostaje dokazati da je:

$$\frac{1}{2}\left[(1-a)\ln\left((1-a)^2+b^2\right)+a\ln(a^2+b^2)\right]\geq\frac{\ln(a^2+b^2)+\ln\left((1-a)^2+b^2\right)}{4}$$

tj. ekvivalentno:

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)\left[\ln\left((1-a)^2+b^2\right)-\ln(a^2+b^2)\right]\geq 0.$$

Međutim, ln je rastuća funkcija i vrijedi:

$$\frac{1}{2}-a\geq 0\Longleftrightarrow (1-a)^2+b^2\geq a^2+b^2,$$

pa je time posljednja nejednakost dokazana. □

Označimo li nultočke od $q(x)$ sa $q_1,\dots,q_k$, gdje je $k=\deg(q)$, vrijedi:

$$\int_0^1 \ln|q(x)|dx=\sum_{j=1}^{k}\int_0^1 \ln|x-x_k|dx\geq -k+\sum_{j=1}^{k}\frac{\ln|x_k|+\ln|1-x_k|}{2}=-k+\frac{\ln|q(0)|+\ln|q(1)|}{2}\geq -k$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi zbog toga što je polinom q sa cjelobrojnim koeficijentima kojemu 0 i 1 nisu nultočke pa je $|q(0)|,|q(1)|\geq 1$. □

U sljedeća dva primjerima pokazat ćemo jednakost, do na multiplikativnu konstantu, maksimuma apsolutne vrijednosti sume podskupova i sume apsolutnih vrijednosti svih brojeva skupa. U slučaju realnih brojeva imamo jednostavan dokaz zbog toga što imamo samo "2 smjera" kretanja kod zbrajanja brojeva, ali dokaz postaje značajno teži u slučaju kompleksnih brojeva i "najprirodnija" metoda postaje korištenje integrala.

Započnimo jednostavnim primjerom, sa realnim brojevima. U oba primjera koristimo oznaku: $[n]=\{1,2,\dots,n\}$

Primjer 16. Za realne brojeve $x_1,\dots,x_n$ vrijedi:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|x_j|\leq\max_{S\subset[n]}\left|\sum_{j\in S}x_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}|x_j|.$$

Rješenje. Desna nejednakost očita je posljedica nejednakosti trokuta pa preostaje dokazati lijevu. Međutim, označimo li:

$$A=\{j\in[n]:x_j\geq 0\},$$

tada je očito:

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j|=\left|\sum_{j\in A}x_j\right|+\left|\sum_{j\in A^c}x_j\right|$$

Kako je zbroj dvije apsolutne vrijednosti na desnoj strani jednak lijevoj, barem jedna od njih je veća ili jednaka pola lijeve strane (u suprotnom bi zbroj očito bio manji od lijeve strane). Tada označimo $S=A$ ako je prva veća od polovice, odnosno $S=A^c$ u suprotnom. Time smo našli barem jedan podskup od $[n]$ za koji vrijedi lijeva strana nejednakosti pa je maksimum veći ili jednak tome (u ovom trivijalnom slučaju, maksimum je očito baš jednak odabranom S) i time je tvrdnja dokazana. □

Vidimo da koristeći prethodni zadatak možemo dokazati i analognu tvrdnju za kompleksne brojeve, ali uz konstantu $\frac{1}{4}$ umjesto $\frac{1}{2}$ na lijevoj strani. Međutim, pitanje pronalaska optimalne konstante značajno je teže.

Primjer 17. Za kompleksne brojeve $z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ vrijedi:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}|z_j|\leq\max_{S\subset[n]}\left|\sum_{j\in S}z_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

Konstanta $\frac{1}{\pi}$ je optimalna, tj. zamijenimo li $\frac{1}{\pi}$ sa bilo kojim realnim brojem $C>\frac{1}{\pi}$, tvrdnja ne vrijedi.

Rješenje. Desna nejednakost posljedica je nejednakosti trokuta za kompleksne brojeve pa ostaje samo dokazati lijevu.

Biranjem brojeva koji svi imaju pozitivan/negativan realan/imaginaran dio i korištenjem prethodnog primjera dobit ćemo ocjenu sa konstantom $\frac{1}{4}$ umjesto $\frac{1}{\pi}$ pa vidimo da to nije dobra strategija.

Sljedeća opservacija o zbrajanju vektora daje nam alternativnu strategiju: zbroj vektora koji zatvaraju kut manji od $\frac{\pi}{2}$ ima veću duljinu od svakog od vektora posebno, tj. iskazano pomoću kompleksnih brojeva: za kompleksne brojeve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi: $\Re(z\overline{w}) \geq 0 \Rightarrow |z+w| \geq \max\{|z|, |w|\}$. Dakle, ideja za maksimalnost skupa je promotriti fiksan pravac kroz ishodište i promotriti sve kompleksne brojeve koji se nalaze u istoj poluravnini određenoj tim pravcem. Međutim, nemoguće je za specifičan pravac reći kolika je suma svih vektora koji se nalaze s jedne strane njega. Srećom, jednostavnije je reći je koliko je prosjek sume po svim takvim pravcima.

Za $t \in [0, 2\pi]$ definiramo

$$S_t = \{z_j : \Re(z_j e^{-it}) > 0\}.$$

Označimo li $z_j = |z_j|e^{it_j}$, vrijedi:

$$\left|\sum_{j\in S_t} z_j\right| = \left|\sum_{j\in S_t} |z_j|e^{i(t_j-t)}\right| \geq \Re\left(\sum_{j\in S_t} |z_j|e^{i(t-t_j)}\right) = \sum_{j\in S_t} |z_j|\cos(t_j-t) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|\cos^+(t_j-t)$$

gdje je $\cos^+(u) = \max\{\cos(u), 0\}$. Zbog toga što je funkcija

$$F(t) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|\cos^+(t_j-t)$$

neprekidna na $[0, 2\pi]$, ona postiže maksimum u točki t_0 i tada vrijedi:

$$\left|\sum_{j\in S_{t_0}} z_j\right| \geq F(t_0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|\cos^+(t_j-t)dt = \frac{1}{\pi}\sum_j |z_j|$$

Dakle, uzimajući $S := S_{t_0}$ našli smo jedan podskup za koji vrijedi lijeva nejednakost pa tvrdnja vrijedi i za maksimum po svim podskupovima.

Da dokažemo optimalnost definirajmo $z_j = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje je $n = 2m+1$ za $m \in \mathbb{N}$. Neka je $S \subset [n]$ skup za koji se postiže maksimum u prvom izrazu i označimo $v := \sum_{j\in S} z_j$. Kada bi postojao neki $k \in S$ takav da je $\Re(z_k\overline{v}) < 0$, tada bi vrijedilo:

$$\left|\sum_{j\in S\setminus\{k\}} z_j\right|^2 = |v - z_k|^2 = |v|^2 - 2\Re(z_k\overline{v}) + |z_k|^2 > |v|^2 = \left|\sum_{j\in S} z_j\right|^2,$$

a to bi bila kontradikcija s maksimalnošću. Dakle, zaključujemo da je $\Re(z_j\overline{v}) \geq 0$ za sve $j \in S$. Slično, kad bi postojao $k \in [n] \setminus S$ takav da je $\Re(z_k\overline{v}) \geq 0$ i $z_k \neq 0$, tada bi vrijedilo:

$$\left|\sum_{j\in S\cup\{k\}} z_j\right|^2 = |v + z_k|^2 = |v|^2 + 2\Re(z_k\overline{v}) + |z_k|^2 > |v|^2 = \left|\sum_{j\in S} z_j\right|^2,$$

što bi opet bila kontradikcija s maksimalnošću. Dakle, ako je S skup za koji se postiže maksimum, tada postoji $\theta := \arg(v)$ takav da je $S = S_\theta = \{j \in [n] : \Re(e^{-i\theta}z_j) \geq 0\}$. Međutim, za dane odabrane brojeve z_j i n lako je izračunati sumu brojeva po takvim skupovima budući da za proizvoljan kut θ točno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ uzastopnih j-ova zadovoljava da je $\Re(e^{-i\theta}z_j) \geq 0$, a tada zbog rotacijske simetrije vrijedi:

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| = \left|\sum_{j:\Re(e^{-i\theta}z_j)>0} z_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e^{\frac{2\pi i j}{n}}\right| = \frac{\sin(\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{n}\pi)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Konačno, zbog toga što je $\sum_{j=1}^{n} |z_j| = n$, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{S\subset[n]} |\sum_{j\in S} z_j|}{\sum_{j=1}^{n} |z_j|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{n}\pi)}{n\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi},$$

pa slijedi da je $\frac{1}{\pi}$ optimalna konstanta. □

Sljedeća propozicija u iskazu je tehnički nešto zahtjevnija, ali prezentira povezanost duljine vektora i prosjeka duljine njegovih projekcija po svim jediničnim vektorima, što je vrlo usko povezano sa pristupom u prethodnom problemu.

Propozicija 18. *Neka je $v \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor. Tada postoji konstanta C takva da je*

$$\|v\| = C \int_{S^{n-1}} |\langle x, v\rangle| d\sigma(x)$$

gdje je S^{n-1} jedinična sfera u $\mathbb{R}^n$, a $d\sigma$ prirodna mjera na sferi, tj. integral na desnoj strani je plošni integral neprekidne funkcije $x \mapsto |\langle x, v\rangle|$ po sferi.

Dokaz. Definirajmo funkciju $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa:

$$\phi(v) := \int_{S^{n-1}} |\langle x, v\rangle| d\sigma(x)$$

Zbog invarijantnosti sferne mjere (odnosno navedenog plošnog integrala) na rotacije, za $u, v \in S^{n-1}$ vrijedi $\phi(u) = \phi(v)$. Nadalje, iz neprekidnosti funkcije $x \mapsto \langle x, v\rangle$ i činjenice da je $\langle v, v\rangle = 1 > 0$ za $v \in S^{n-1}$ slijedi da postoji $C > 0$ takav da za sve $v \in S^{n-1}$ vrijedi $\phi(v) = C^{-1}$. Konačno, iz definicije se lako vidi da za proizvoljan $\lambda > 0$ i $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ pa konačno za proizvoljan $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$\phi(v) = \|v\|\phi\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = C^{-1}\|v\|$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Prikažimo korist prethodnog rezultata na sljedećem teoremu koji ima na prvi pogled vrlo neočekivan iskaz - za dokazivanje određenog tipa nejednakosti u unitarnom prostoru dovoljno je dokazati nejednakost samo u slučaju kad su svi vektori jednaki.

Teorem 19. *Neka je U unitaran prostor, neka su $m, n \in \mathbb{N}$ te $(\alpha_i)_{i=1}^m$ i $(\beta)_{i,j=1}^{m,n}$ kolekcije proizvoljnih realnih brojeva. Tada nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left\| \sum_{n=1}^{n} \beta_{i,j} u_j \right\| \geq 0 \tag{8}$$

vrijedi za sve $u_1, \dots, u_n \in U$ ako i samo ako nejednakost

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \sum_{n=1}^{n} \beta_{i,j} x_j \right| \geq 0 \tag{9}$$

vrijedi za sve $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$

U prijevodu, da bismo dokazali da nejednakost oblika (8) vrijedi za proizvoljne vektore u proizvoljnom unitarnom prostoru, dovoljno je provjeriti pripadnu nejednakost (9) za realne brojeve, što je na prvi pogled vrlo iznenađujući rezultat budući da je druga nejednakost trivijalna posljedica prve za slučaj kad su svi vektori jednaki.

Dokaz. Kao što smo prokomentirali, tvrdnja da nejednakost (8) implicira nejednakost (9) slijedi uvrštavanjem slučaja $u_j = u$ za sve $j = 1, 2, \dots, n$.

Dokažimo sada da nejednakost (9) implicira nejednakost (8). Koristeći prethodnu propoziciju i nejednakost (9) za $x_j = \langle x, u_j\rangle$, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left\| \sum_{n=1}^{n} \beta_{i,j} u_j \right\| = \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \left\langle x, \sum_{n=1}^{n} \beta_{i,j} u_j \right\rangle \right| d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \sum_{n=1}^{n} \beta_{i,j} \langle x, u_j\rangle \right| d\sigma(x) \geq 0.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Pokažimo na primjeru kako iskoristiti navedeni teorem.

Primjer 20. Za proizvoljne vektore $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ dokažite da vrijedi:

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x + y + z\| \geq \|x + y\| + \|x + z\| + \|y + z\|$$

Rješenje. Koristeći teorem 19, dovoljno je dokazati sljedeću nejednakost za realne brojeve:

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|$$

Međutim, po Dirichletovom principu dva broja među x, y, z su sigurno istog predznaka pa neka su to, bez smanjenja općenitosti, x i y. Tada je $|x + y| = |x| + |y|$ pa ostaje za dokazati:

$$|z| + |x + y + z| \geq |x + z| + |y + z|$$

Kvadriranjem obje strane ostaje za dokazati da je

$$xy + |z(x + y + z)| \geq |(x + z)(y + z)|$$

Međutim, kako su x i y istog predznaka, to je $xy = |xy|$ pa gornja nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta. $\square$

Prethodni primjer preuzet je iz predavanja *Podijeli pa vladaj, proiciraj pa vladaj* profesora Vjekoslava Kovača koje se može naći na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/sn_podijeli.pdf`. Zainteresirani čitatelj na navedenom linku može pronaći još zanimljivih problema u kojima teorem (19) svodi problem na realni slučaj, koji i dalje nije trivijalan.

3 Zadaci za domaću zadaću

Riješite barem 4 od sljedećih 8 zadataka za uspješno polaganje zadaće.

1. Neka su $a, b, c > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{1}{(3a)^n} + \frac{1}{(3b)^n} + \frac{1}{(3c)^n} \geq \frac{1}{(2a + b)^n} + \frac{1}{(2b + c)^n} + \frac{1}{(2c + a)^n}$$

2. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ i $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Dokažite da je:

$$\sum_{i,j} x_i x_j |a_i - a_j| \leq 0.$$

Dodatno, dokažite da jednakost vrijedi ako i samo ako postoji particija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u disjunktne skupove $A_1, \ldots, A_m$ tako da ako su i i j u istom skupu A_k, tada je $a_i = a_j$ i vrijedi $\sum_{j \in A_i} x_j = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$.

(*Uputa.*) Imitirajte dokaz zadatka 2.

3. Neka su $(a_k)_{k=1}^n$ različiti pozitivni realni brojevi i $(b_k)_{k=1}^n$ realni brojevi. Dokažite da je familija funkcija

$$\{\sin(a_k x + b_k)\}_{k=1}^n$$

linearno nezavisna u vektorskom prostoru realnih funkcija.

(Uputa.) Imitirajte dokaz primjera 5 integrirajući po skupovima oblika $[0, M]$ te promotrite ponašanje za $M \to \infty$.

4. Niz realnih brojeva $(a_k)_{k=0}^\infty$ zadan je rekurzivno s:

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k + 1} = 0 \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Dokažite da je $a_n > 0$ za svaki $n \geq 1$.

(*Uputa.*) Smijete koristiti Descartesovo pravilo predznaka koje kaže da polinom s realnim koeficijentima ima nultočaka najviše koliko ima promjena predznaka u padajućem zapisu koeficijenata.

5. Dokažite da vrijedi:

   (a)
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

   (*Uputa.*) Iskoristite identitet (4). Kao poznato smijete koristiti sljedeći rezultat. Za neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takvu da je $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dxdy < \infty$ vrijedi $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$.

   (b)
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

   (*Uputa.*) Svedite na prvi integral.

6. Za $x, y > 0$ definiramo *Beta funkciju* na način:
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

   (a) Dokažite da je $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

   (*Uputa.*) Izračunajte $\int_0^\infty\int_0^\infty u^{x-1}v^{y-1}e^{-u-v}dudv$ na dva načina.

   (b) Neka je $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ takva da za svaki $k \geq 1$ limes $\lim_{x\to 0} g^{(k)}(x)$ postoji i konačan je. Dokažite da je $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   (c) Ako je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i $m \geq \mathbb{N}_0$, dokažite da se funkcija
$$g(x) := \frac{f(x) - \sum_{j=0}^m \frac{f^{(j)}}{j!}x^k}{x^{m+1}}$$
   može proširiti do funkcije u $C^\infty(\mathbb{R})$.

   (*Uputa.*) Iskoristite integralni oblik ostatka u Taylorovom teoremu, deriviranje pod integralom i prva dva dijela zadatka.

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1}$$

   (Uputa.) Iskoristite prvi identitet u prethodnom zadatku za prikaz lijeve strane te integralni identitet (2) za desnu stranu.

8. Neka su $v_1, \ldots, v_n$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Dokažite da je:
$$C(n)\sum_{j=1}^n \|v_j\| \leq \max_{S\subset[n]} \left\|\sum_{j\in S} v_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|,$$
   gdje je:
$$C(n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-1)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

   (*Uputa.*) Imitirajte dokaz primjera 17. Umjesto S_t, za fiksan jedinični vektor ω označite sa $S_\omega := \{i : \langle v_i, \omega\rangle \geq 0\}$ te prointegrirajte po sferi.
   Napomena. Iz Stirlingove formule slijedi da je $C(n) \sim (2\pi n)^{-\frac{1}{2}}$.