

Tema br. 1:

## Račun veličina i ocjenjivanje u matematičkoj analizi

Vjekoslav Kovač, 8. 3. 2024.

<https://web.math.pmf.unizg.hr/~vjkovac/>

### Asimptotska notacija: O i o

Poznati matematičar Terence Tao jednom je prilikom izjavio da je (u prošlom stoljeću) matematička analiza naglo počela napredovati nakon što je prestala mariti za točne konstante. Naučit ćemo korisnu notaciju i neke trikove, koji nam mogu olakšati račun i ubrzati razmišljanje ako su nam jedino važni redovi veličina i kvalitativna svojstva, a ne i konkretni brojevi koji se pojavljuju u ocjenama. Notaciju koja slijedi osmisili su Paul Bachmann (1837.–1920.), Edmund Landau (1877.–1938.) i drugi te se ona nekada naziva i *Bachmann–Landau-ova notacija*.

*Definicija.* Za realne funkcije  $f$  i  $g$  pišemo

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow c$$

ako postoje  $M > 0$  i okolina  $U$  točke  $c$  tako da za svaki  $x \in U \setminus \{c\}$  vrijedi

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

*Definicija.* Za realne funkcije  $f$  i  $g$  pišemo

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow c$$

ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji okolina  $U$  točke  $c$  takva da za svaki  $x \in U \setminus \{c\}$  vrijedi

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

U ovim definicijama obično smatramo da su  $f$  i  $g$  definirane na nekom podskupu od  $\mathbb{R}^n$ , ali definicije u istoj formulaciji imaju smisla i kada je domena funkcija općeniti topološki prostor (za one koji znaju što je to). Isto tako, funkcije mogu biti i kompleksne, tj. kodomena im može biti  $\mathbb{C}$ . Konačno, ako su  $f$  i  $g$  definirane na nekom podskupu od  $\mathbb{R}$ , dozvoljavamo i mogućnosti  $c = -\infty$  ili  $c = +\infty$ . Ponekad se točka  $c$  podrazumijeva pa izostavljamo dodatak " $x \rightarrow c$ "; recimo to je česti slučaj u teorijskom računarstvu, gdje su  $f$  i  $g$  tipično definirane na  $\mathbb{N}$  i gleda se  $c = +\infty$ , tj. riječ je o usporedbi brzina rasta nizova realnih brojeva.

Kod korištenja gornje notacije često dozvoljavamo sljedeću nepreciznost u svrhu elegantnijeg zapisa. U izrazima pišemo samo  $O(g(x))$  ili  $o(g(x))$  na mjestu neke (možda nepoznate) funkcije  $f(x)$  koja zadovoljava  $f(x) = O(g(x))$  odnosno  $f(x) = o(g(x))$ . Tako naprimjer pišemo:

- $\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0$  sa značenjem  $\sin x = x + f(x), f(x) = o(x^2), x \rightarrow 0$ .

- $f(x) = e^x(3x+2+O(\frac{1}{x}))$ ,  $x \rightarrow +\infty$  sa značenjem  $f(x) = e^x(3x+2+g(x))$ ,  $g(x) = O(\frac{1}{x})$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .
- $O(2^n) + O(n!) + O(n^n) = O(n^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$  sa značenjem: ako je  $f(n) = O(2^n)$ ,  $g(n) = O(n!)$ ,  $h(n) = O(n^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , tada vrijedi  $f(n) + g(n) + h(n) = O(n^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Umjesto  $f(x) = O(g(x))$  nekada se piše  $f(x) \lesssim g(x)$  ili  $f(x) \ll g(x)$ , a koriste se i razne druge oznake.

*Svojstva simbola O:*

- Ako postoji okolina  $U$  od  $c$  takva da je  $g(x) \neq 0$  za sve  $x \in U \setminus \{c\}$ , tada vrijedi:  
 $f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow c \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty$   
 $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$  je omeđena na nekoj okolini od  $c$  bez točke  $c$ .
- $f(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow c \Leftrightarrow f$  je omeđena na nekoj okolini od  $c$
- $f_1(x) = O(g(x))$ ,  $f_2(x) = O(g(x))$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = O(g(x))$
- $f_1(x) = O(g_1(x))$ ,  $f_2(x) = O(g_2(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$
- $f(x) = O(g(x))$ ,  $g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = O(h(x))$
- $f \in C^{p+1}(\langle c - \delta, c + \delta \rangle)$ ,  $p \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + O((x - c)^{p+1})$ ,  $x \rightarrow c$
- Ako je  $f(y) = O(g(y))$ ,  $y \rightarrow d$ , zatim  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$  te još postoji okolina  $U$  od  $c$  takva da je  $h(x) \neq d$  za sve  $x \in U \setminus \{c\}$ , tada vrijedi  $f(h(x)) = O(g(h(x)))$ ,  $x \rightarrow c$ .  
(Kao da smo supstituirali  $y = h(x)$ .)

*Svojstva simbola o:*

- Ako postoji okolina  $U$  od  $c$  takva da je  $g(x) \neq 0$  za sve  $x \in U \setminus \{c\}$ , tada vrijedi:  
 $f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .
- $f(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$
- $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
- $f_1(x) = o(g(x))$ ,  $f_2(x) = o(g(x))$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = o(g(x))$
- $f_1(x) = o(g_1(x))$ ,  $f_2(x) = O(g_2(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$
- $f(x) = o(g(x))$ ,  $g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$   
 $f(x) = O(g(x))$ ,  $g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$
- $f \in C^p(\langle c - \delta, c + \delta \rangle)$ ,  $p \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + o((x - c)^p)$ ,  $x \rightarrow c$
- Ako je  $f(y) = o(g(y))$ ,  $y \rightarrow d$ , zatim  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$  te još postoji okolina  $U$  od  $c$  takva da je  $h(x) \neq d$  za sve  $x \in U \setminus \{c\}$ , tada vrijedi  $f(h(x)) = o(g(h(x)))$ ,  $x \rightarrow c$ .  
(Kao da smo supstituirali  $y = h(x)$ .)

# Uvodni primjeri

**Primjer 1.** Ako su poznati razvoji

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad \text{kada } x \rightarrow 0,$$

izvedite razvoj funkcije tangens:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

(Naravno da se može i direktno, primjenom Taylorovog teorema na  $\operatorname{tg}$ .)

*Rješenje primjera 1.* Zapišimo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left( x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right) \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{2} + O(x^4))}.$$

Sada supstituirajmo  $y = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$  u razvoj  $\frac{1}{1-y} = 1 + y + O(y^2)$ ,  $y \rightarrow 0$ . Dobivamo

$$\operatorname{tg} x = \left( x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) = x + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + O(x^5),$$

što je i trebalo pokazati.

**Primjer 2.** Ako je  $f : \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad x \rightarrow 1^+ \quad \text{i} \quad f(x) = O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

pokažite da postoji konstanta  $C > 0$  takva da je

$$|f(x)| \leq C \frac{x}{x-1} \quad \text{za svaki } x \in \langle 1, +\infty \rangle.$$

*Rješenje primjera 2.* Po definiciji postoje  $1 < \alpha < \beta$  i  $M_1, M_2 > 0$  takvi da vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{M_1}{x-1} \quad \text{za } x \in \langle 1, \alpha \rangle \quad \text{i} \quad |f(x)| \leq M_2 \quad \text{za } x \in \langle \beta, +\infty \rangle.$$

Na segmentu  $[\alpha, \beta]$  je funkcija  $f$  neprekidna pa je i ograničena, tj. postoji konstanta  $N > 0$  takva da je  $|f(x)| \leq N$  za  $x \in [\alpha, \beta]$ . Primijetimo konačno da za svaki  $x \in \langle 1, +\infty \rangle$  zbog  $x > 1$  i  $\frac{x}{x-1} > 1$  vrijedi  $|f(x)| \leq \max\{M_1, M_2, N\} \frac{x}{x-1}$ .

**Primjer 3.** Lako je vidjeti da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  jednadžba  $t + \ln t = x$  ima jedinstveno rješenje  $t = f(x) > 0$ . Dokažite:

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

*Rješenje primjera 3.* Za  $x \geq 1$  vrijedi  $t \geq 1$ , jer bi  $t < 1$  zbog strogog rasta lijeve strane jednadžbe dalo  $t + \ln t < 1 \leq x$ . Sada se odmah vidi da za  $x \geq 1$  mora biti  $t \leq x$ , odakle pak slijedi  $f(x) = t \geq x - \ln x$ , što ima za posljedicu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Sada napišimo

$$f(x) = t = x - \ln t = x - \ln(x - \ln t) = x - \ln x - \ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right).$$

Korištenjem  $\ln(1 + y) = y + O(y^2)$ ,  $y \rightarrow 0$  i  $\frac{\ln t}{x} \leq \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$  dobivamo

$$\ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right) = -\frac{\ln t}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

što pak u kombinaciji s prethodnim daje

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln t}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Koristeći se istim trikom zaključujemo i

$$\frac{\ln t}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right) = \frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty$$

pa je konačno

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) + O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Preostaje uočiti  $(\frac{\ln x}{x})^2 = O(\frac{1}{x})$ ,  $\frac{\ln x}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

## Primjene na limese

**Primjer 4.** Zapišite Stirlingovu formulu za aproksimaciju faktorijela

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1$$

koristeći gornju notaciju. Pronađite u literaturi profinjenje Stirlingove formule.

*Rješenje primjera 4.* Kako imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} - 1 \right) = 0,$$

možemo pisati

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} - 1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

tj.

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Preciznija varijanta Stirlingove formule glasi:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Primjer 5.** Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

*Rješenje primjera 5.* Koristeći razvoje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

dobivamo

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

a supstitucija daje i

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(\sin^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(\sin^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{3} \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Zato je traženi limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 + o(1))}{x^3(\frac{1}{2} + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = 2.$$

**Primjer 6.** Niz  $(x_n)_{n=1}^\infty$  zadan je rekurzivno sa

$$x_1 \in \langle 0, \pi \rangle \text{ proizvoljan}, \quad x_{n+1} = \sin x_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je on asimptotski jednak nizu  $\left( \sqrt{\frac{3}{n}} \right)_{n=1}^\infty$ , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{3/n}} = 1.$$

*Rješenje primjera 6.* Tvrđnju možemo ekvivalentno formulirati kao

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = \frac{1}{3}.$$

Lako je vidjeti da niz konvergira u 0 pa je relevantan razvoj

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

kojeg primjenjujemo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2} = \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{3} + o(x^2))} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1), \quad x \rightarrow 0\end{aligned}$$

pa supsticija  $x = x_n$  daje

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Dakle je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

pa iz *Stolzovog teorema* slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{(n+1) - n} = \frac{1}{3}.$$

## Ocjene integrala i redova

**Primjer 7.** Dokažite:

$$\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt = x + \frac{x^3}{18} + O(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

*Rješenje primjera 7.* Lako se (kao ranije) dobije razvoj

$$\frac{t}{\sin t} = 1 + \frac{t^2}{6} + O(t^4), \quad t \rightarrow 0.$$

To znači da postoje  $\delta > 0$  i  $M > 0$  takvi da za  $t \in (-\delta, \delta)$  vrijedi

$$\frac{t}{\sin t} = 1 + \frac{t^2}{6} + f(t), \quad |f(t)| \leq Mt^4.$$

Integriranje za svaki  $x \in (-\delta, \delta)$  daje

$$\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt = x + \frac{x^3}{18} + \int_0^x f(t) dt, \quad \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq M \left| \int_0^x t^4 dt \right| = \frac{M|x|^5}{5},$$

što je upravo tražena tvrdnja.

**Primjer 8.** Dokažite da konvergira red

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})}.$$

*Rješenje primjera 8.* Za  $n \geq 0$  ocijenimo

$$\frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})} \lesssim \frac{2^n}{1 \cdot 2^{2n}} = 2^{-n},$$

dok za  $n < 0$  ocijenimo

$$\frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})} \lesssim \frac{2^n}{1 \cdot 1} = 2^n.$$

Zato je traženi red dominiran s (konstantnim višekratnikom od)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n < +\infty.$$

**Primjer 9.** Dokažite da postoji konstanta  $C > 0$  takva da za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  vrijedi

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} \leq C \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

*Rješenje primjera 9.* Najprije ocijenimo gornju sumu odozgo (nepravim) integralom

$$I(n) := \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x \ln x}}.$$

Supstitucijom  $t = \sqrt{\frac{\ln x}{2}}$ , tj.  $x = e^{2t^2}$  dobivamo

$$I(n) = \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} \frac{e^{2t^2} 4t dt}{e^{t^2} \sqrt{2} t} = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} e^{t^2} dt = \sqrt{2\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{2}}\right),$$

pri čemu je

$$\operatorname{erfi}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

tzv. *imaginarna funkcija greške*. Koristeći poznatu asimptotiku

$$\begin{aligned} \operatorname{erfi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty \\ &= O\left(\frac{e^{z^2}}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

dobivamo

$$I(n) = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Posebno je

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

pa tvrdnja slijedi za dovoljno velike  $n$ , dok je za prvih konačno mnogo vrijednosti od  $n$  trivijalna.

## Domaća zadaća

Za domaću zadaću riješite neka 4 zadatka od navedenih 6 zadataka za vježbu. Rok za predaju domaće zadaće je tri tjedna od izlaganja, tj. najkasnije u petak 29.3.2024. Napišite rješenja vlastoručno i najbolje ih uslikajte ili skenirajte pa pošaljite na moju email adresu [vjekovac@math.hr](mailto:vjekovac@math.hr). Rješenja će biti objavljena na web stranici nakon isteka roka za predaju.

**Zadatak 1.** Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)^5}{(\operatorname{sh} x + \sin x - 2x)^4}.$$

**Zadatak 2.** Dokažite da limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$$

postoji i izračunajte ga.

**Zadatak 3.** Dokažite da za svaki parametar  $p \in [2, +\infty)$  postoji konstanta  $c_p \in (0, +\infty)$  takva da za svake  $a, b \in \mathbb{R}$  vrijedi nejednakost

$$|a|^p - |b|^p - p(a - b)b|b|^{p-2} \geq c_p|a - b|^p.$$

**Zadatak 4.** Dokažite da za svaki  $a \in (1, +\infty)$  postoji konstanta  $C_a \in (0, +\infty)$  takva da za svaki  $b > 0$  vrijedi

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^a} \leq C_a \min\{b, 1\}.$$

**Zadatak 5.** Ako su  $1 > a > b > 0$ , dokažite da konvergira red

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{(b+1-a)j} \int_0^\infty e^{-2^j s} \frac{s^a ds}{1+s^{2a}}.$$

**Zadatak 6.** Koristeći literaturu (knjige, internet i sl.) za fiksirani parametar  $\beta > 1$  izračunajte prva tri člana asimptotskog razvoja funkcije  $I_\beta(R) := \int_R^{+\infty} \frac{dx}{(x \ln x)^\beta}$  kada  $R \rightarrow +\infty$ .