Fakultativni kolegij Studentska natjecanja, ak. god. 2024./2025.
https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a

Tema br. 6:
Skup postignuća reda i Erdősovi problemi o jediničnim razlomcima

Vjekoslav Kovač, 11. 4. 2025.

Cijeli članak trenutno nije dostupan radi autorskih prava i objavljivanja u stručnom časopisu. Naknadno ću staviti link na eventualnu objavljenu verziju, a u međuvremenu mi pišite ako želite cjelokupni tekst članka.

Domaća zadaća

Za domaću zadaću riješite neka 4 zadatka od navedenih 7 zadataka za vježbu. Rok za predaju domaće zadaće je tri tjedna od izlaganja, tj. najkasnije u petak 2. 5. 2025. Napišite rješenja vlastoručno i najbolje ih uslikajte ili skenirajte pa pošaljite na moju email adresu `vjekovac@math.hr`. Rješenja će biti objavljena na web stranici nakon isteka roka za predaju.

Zadatak 1. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentni red u $\mathbb{R}^d$ s članovima $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, dokažite da je $A(x)$ uvijek kompaktan skup (tj. zatvoren je i ograničen).

Zadatak 2. Dokažite svojevrstan obrat Kakeyinog teorema 1: ako je $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ padajući niz brojeva iz $\langle 0, \infty\rangle$ takav da red $\sum_n x_n$ konvergira i da je $A(x)$ jednak segmentu $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ mora vrijediti (1).

Zadatak 3. Skup

$$A(x) = \Big\{ \sum_{n\in S} \frac{1}{2^n - 1} \,:\, S \subseteq \mathbb{N} \Big\}$$

iz primjera 4 je tzv. *debeli Cantorov skup*, što znači da ima pozitivnu duljinu (tj. Lebesgueovu mjeru). Dokažite to!

Zadatak 4. Dokažite sljedeće poopćenje (a) dijela Kakeyinog teorema, formulirano u nedavnom članku Tonćija Crmarića i autora [2]. Neka su $X_1, X_2, X_3, \ldots$ konačni podskupovi od $[0, \infty\rangle$ s barem dva elementa i takvi da $\sum_n \max X_n$ konvergira. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(\max X_k - \min X_k \big)$$

i neka je Δ_n najveća duljina intervala na koje X_k dijeli $[\min X_k, \max X_k]$. Ako vrijedi $r_n \geq \Delta_n$ za sve dovoljno velike indekse $n \in \mathbb{N}$, tada je skup

$$\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,:\, x_n \in X_n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \Big\}$$

jednak konačnoj uniji nedegeneriranih segmenata. Prvi dio teorema 1 se dobiva u posebnom slučaju $X_n = \{0, x_n\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. Erdős i Graham [5] su pitali postoji li ograničeni niz prirodnih brojeva $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + b_n} \in \mathbb{Q}.$$

Iskoristite prethodni zadatak kako biste pokazali da doista postoji takav niz $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, čak štoviše s vrijednostima u skupu $\{1,2,3,4,5\}$. Ovo je posebni slučaj općenitijeg rezultata iz [11].

Zadatak 6. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentni red s članovima $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{R}^2$.

(a) Može li $A(x)$ biti jednak kvadratu $[0,1]^2$?

(b) Može li $A(x)$ biti jednak trokutu $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$?

Zadatak 7. Dokažite da postoje niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i prirodni brojevi $m_1, \ldots, m_6$ takvi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} = \sqrt{m_3} - \sqrt{m_4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 2} = \sqrt{m_5} - \sqrt{m_6}.$$

Literatura

[1] Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak i Franciszek Prus-Wiśniowski, *Topological and algebraic aspects of subsums of series*, Traditional and present-day topics in real analysis, 345–366, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź, 2013.

[2] Tonći Crmarić i Vjekoslav Kovač, *On the irrationality of certain super-polynomially decaying series*, preprint, 2025. `https://arxiv.org/abs/2504.18712`

[3] Paul Erdős, *On the irrationality of certain series*, Math. Student **36** (1968), 222–226.

[4] Paul Erdős, *On the irrationality of certain series: problems and results*, New advances in transcendence theory (Durham, 1986), Alan Baker (Ed.), 102–109, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[5] Paul Erdős i Ronald L. Graham, *Old and new problems and results in combinatorial number theory*, Monographies de L'Enseignement Mathématique **28**, Université de Genève, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 1980.

[6] Paul Erdős i Ernst G. Straus, *On the irrationality of certain Ahmes series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **27** (1964), 129–133.

[7] Joe A. Guthrie i James E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. **55** (1988), 323–327.

[8] Sōichi Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Tôhoku Sci. Rep. **3** (1914), 159–164.

[9] Sōichi Kakeya, *On the set of partial sums of an infinite series*, Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc., 2nd ser. **7** (1914), 250–251.

[10] Vjekoslav Kovač, *On the set of points represented by harmonic subseries*, prihvaćen za objavljivanje u Amer. Math. Monthly, 17 pp., 2024. `https://arxiv.org/abs/2405.07681`

[11] Vjekoslav Kovač i Terence Tao, *On several irrationality problems for Ahmes series*, prihvaćen za objavljivanje u Acta Math. Hungar., 37 pp., 2025. `https://arxiv.org/abs/2406.17593`

[12] Manuel Morán, *Fractal series*, Mathematika, **36** (1989), 334–348.

[13] James E. Nymann i Ricardo A. Sáenz, *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. **83** (2000), 1–4.

[14] Alek D. Weinstein i Boris Zalmanovich Shapiro. *On the structure of the set of $\overline{\alpha}$-representable numbers*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **24** (1980), 8–11.

Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2024./2025.

Tema br. 6:

Skup postignuća reda

Rješenja zadataka za vježbu

Vjekoslav Kovač

Rješenje zadatka 1. Neka $\|v\|$ označava euklidsku duljinu vektora $v \in \mathbb{R}^d$. Svakako se $A(x)$ nalazi u zatvorenoj kugli oko ishodišta radijusa $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$, a taj broj je konačan po našoj pretpostavci o apsolutnoj konvergenciji pa je $A(x)$ ograničen. Za zatvorenost uzmimo niz $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ u skupu $A(x)$ koji konvergira prema nekoj točki $y \in \mathbb{R}^d$. Postoje brojevi $(\varepsilon_{m,n} : m, n \in \mathbb{N})$ iz $\{0, 1\}$ takvi da je $y_m = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m,n} x_n$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. U nizu $(\varepsilon_{m,1})_{m=1}^{\infty}$ ima beskonačno mnogo istih elemenata (nula ili jedinica); neka je njihova zajednička vrijednost ε_1 i neka oni odgovaraju indeksima $m_{1,1} < m_{2,1} < m_{3,1} < \cdots$. Potom u nizu $(\varepsilon_{m_{k,1},2})_{k=2}^{\infty}$ ima beskonačno mnogo istih elemenata; neka je njihova zajednička vrijednost ε_2 i neka oni odgovaraju indeksima $m_{1,2} < m_{2,2} < m_{3,2} < \cdots$. Potom u nizu $(\varepsilon_{m_{k,2},2})_{k=2}^{\infty}$ ima beskonačno mnogo istih elemenata; neka je njihova zajednička vrijednost ε_3 i neka oni odgovaraju indeksima $m_{1,3} < m_{2,3} < m_{3,3} < \cdots$, itd. Ako kratko označimo $m_k = m_{1,k}$, tada je

$$y_{m_k} = \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_{m_k,n} x_n,$$

odakle slijedi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n - y \Big\| \leq \|y_{m_k} - y\| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\|$$

pa, po teoremu o sendviču, puštanjem na limes kada $k \to \infty$ dobivamo

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \in A(x).$$

Zaključujemo da je $A(x)$ zatvoren.

Rješenje zadatka 2. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{k=m+1} x_k < x_m$. Uzmimo proizvoljni niz $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ iz skupa $\{0, 1\}$. Ako je $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_m = 0$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n,$$

a u protivnom je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \geq \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n x_n \geq x_m.$$

Zaključujemo

$$A(x) \subseteq \Big[0, \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k\Big] \cup \Big[x_m, \sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big],$$

što je kontradikcija s pretpostavkom.

Rješenje zadatka 3. Iz dokaza teorema 1 znamo da je $A(x) = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$, pri čemu vrijedi $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ te je, za svaki $N \in \mathbb{N}$, skup A_N jednak uniji od 2^N disjunktnih intervala duljine $r_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} 1/(2^k - 1)$. Dakle, duljina od $A(x)$ se može računati kao limes:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2^N}{2^k - 1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 2^{-N}}.$$

Taj broj je svakako veći ili jednak $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$, tj. $A(x)$ ima duljinu barem 1. Čitatelj upoznat s osnovama teorije mjere i integrala će lako opravdati (korištenjem teorema o dominiranoj konvergenciji) da je duljina od $A(x)$ zapravo baš jednaka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^k - 2^{-N}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Rješenje zadatka 4. Dokaz tvrdnje zapravo usko prati dokaz (a) dijela teorema 1. Detalje možete naći i u spomenutom članku na linku `https://arxiv.org/abs/2504.18712`. Zanimljivo je da taj članak primjenjuje ovaj zadatak na rješenje još jednog otvorenog pitanja Erdősa i Grahama u vezi jediničnih razlomaka.

Rješenje zadatka 5. Stavimo

$$X_n := \left\{ \frac{1}{2^n + j} \;:\; j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\Delta_n = \max_{1\le j\le 4} \left(\frac{1}{2^n + j} - \frac{1}{2^n + j + 1} \right) = \frac{1}{(2^n + 1)(2^n + 2)} = \frac{1}{4^n + 3 \cdot 2^n + 2}$$

te

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k + 1} - \frac{1}{2^k + 5} \right) \ge \frac{1}{2^{n+1} + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 5} = \frac{1}{(2^n + 1/2)(2^n + 5/2)} = \frac{1}{4^n + 3 \cdot 2^n + 5/4}.$$

Kako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $r_n \ge \Delta_n$, iz prethodnog zadatka znamo da sume željenog oblika poprimaju sve vrijednosti iz konačne unije nedegeneriranih intervala pa je, posebno, neka od njih svakako jednaka racionalnom broju.

Rješenje zadatka 6. (a) Može. Uzmimo $x_{2n-1} = (1/2^n, 0)$ i $x_{2n} = (0, 1/2^n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz Kakeyinog teorema 1 odmah slijedi da je skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1}$ jednak $\{(u, 0) : u \in [0, 1]\}$, dok je skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}$ jednak $\{(0, v) : v \in [0, 1]\}$. Slijedi da cijeli red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ima skup postignuća jednak zbroju ta dva skupa (u smislu "svaki sa svakim"), što je upravo $[0, 1]^2$.

(b) Ne može. Kada bi takav red $\sum_n x_n$ postojao, iz $A(x) \subset [0, \infty\rangle^2$ bi slijedilo $x_n \in [0, \infty\rangle^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, postojali bi $S, T \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je $\sum_{n\in S} x_n = (1, 0)$ i $\sum_{n\in T} x_n = (0, 1)$. Za svaki $n \in S \cap T$ tada imamo $x_n = (0, 0)$ pa je

$$\sum_{n\in S\cup T} x_n = \sum_{n\in S} x_n + \sum_{n\in T} x_n = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1).$$

Dobili smo da je $(1, 1)$ također u skupu postignuća $A(x)$, što je protivno pretpostavci.

Rješenje zadatka 7. Najprije tvrdimo da je skup

$$\left\{ \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} \;:\; m_1, m_2 \in \mathbb{N} \right\}$$

gust u $[0, \infty\rangle$. Naime, za svaki $\epsilon > 0$ uzmimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $1/2\sqrt{N} < \epsilon$. Tada formula $t_n := \sqrt{N + n} - \sqrt{N}$ definira niz realnih brojeva $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$, čiji susjedni članovi se razlikuju za manje od ϵ pa niz $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ dolazi ϵ-blizu svakom nenegativnom realnom broju. Nadalje, sada odmah slijedi i da je

$$\left\{ \left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3} - \sqrt{m_4}, \sqrt{m_5} - \sqrt{m_6} \right) \;:\; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \in \mathbb{N} \right\}$$

gust u $[0, \infty\rangle^3$ pa prestaje iskoristiti trodimenzionalni slučaj teorema 3.