

Permutacijski i randomizacijski

STATISTIČKI PRAKTIKUM 2

10. VJEŽBE

Randomizacijski testovi čine grupu statističkih testova u kojima se distribucija testne statistike određuje permutacijom dobivenih podataka. S obzirom na to da su sve permutacije početnih podataka jednako vjerojatne, moguće je egzaktno izračunati distribuciju testne statistike (pogodno za mali niz podataka).

Prednosti:

- ▶ ne ovise o distribuciji iz koje dolaze sami podaci
- ▶ ne zahtijevaju dovoljno veliki uzorak (čak i za male uzorke, vjerojatnost pogreške ne prelazi 0.05)
- ▶ p -vrijednosti se (u slučaju permutacijskih testova) računaju egzaktno
- ▶ ne ovise o uzimanju poduzoraka iz neke prilagođene populacije
- ▶ lako se poopćuju do testova s nekoliko nezavisnih djelujućih tretmana

Poseban slučaj: *permutacijski testovi*, kada se distribucija testne statistike izračuna egzaktno.

Primjer

Bila jednom jedna britanska gospođa koja je tvrdila da po okusu može prepoznati što je bilo prvo uliveno u šalicu, čaj ili mlijeko ... Fisher je napravio eksperiment da bi njezine tvrdnje testirao:

- ▶ od 8 šalica, u 4 je prvo uliveno mlijeko, a u 4 čaj
- ▶ šalice su prezentirane po slučajnom redoslijedu
- ▶ gospođa ih je probala i na temelju okusa dala ocjenu za svaku šalicu (pritom je znala da od svakog okusa ima 4 šalice)

Formiranje nulte hipoteze i testiranje

H_0 : gospođa nema sposobnost raspoznavanja razlike u okusima

Ako je H_0 istinita, svi mogući rasporedi njezinih odgovora u odnosu na istinu o šalicama moraju biti jednako vjerojatni (naime, raspored prezentiranja šalica je odabran na slučajan način).

Testna statistika:

T = broj pogodjenih okusa ili broj točnih odgovora za šalice s mlijekom

Distribucija testne statistike

U uvjetima H_0 , razlog za njezinu odluku nije poznat, osim što nema veze s istinom o šalicama. Taj niz fiksiramo. Na koliko načina možemo odabrati raspored za prezentaciju šalica? Na 8! načina. Međutim, nama je samo bitno koji se okus, od dva moguća, nalazi u pojedinoj šalici. Stoga imamo onoliko rasporeda koliko ima načina da odaberemo 4 šalice u koje ćemo prvo uliti čaj:

$$\binom{8}{4} = 70.$$

Svi rasporedi su jednako vjerojatni. Samo jedan raspored je u potpunosti identičan kao i gospođini odgovori, a njegova je vjerojatnost pod uvjetima H_0 jednaka $\frac{1}{70} = 0.0413 < 0.05$. Dakle, ako je gospođa u potpunosti pogodila okuse, H_0 bismo odbacili na nivou značajnosti $\alpha = 0.05$.

U ostalim slučajevima:

$$\mathbb{P}(T = t) = \frac{\binom{4}{t} \binom{4}{4-t}}{\binom{8}{4}}, \quad t = 0, \dots, 4.$$

	t	P(T=t)
[1,]	0	0.01428571
[2,]	1	0.22857143
[3,]	2	0.51428571
[4,]	3	0.22857143
[5,]	4	0.01428571

Da je gospođa probala 10 šalica, mogli bismo odbaciti H_0 i u slučaju da nije savršeno pogodila okuse.

Permutacijski testovi

Općenito, postupak formiranja testa je sljedeći:

1. definirati testnu statistiku T
2. odrediti skup mogućih vrijednosti od T (dobivenih permutacijom podataka)
3. pod uvjetima H_0 , svi mogući rasporedi (permutacije) podataka su jednako vjerojatni
4. odrediti distribuciju statistike T : $\mathbb{P}(T = t)$ je proporcija onih rasporeda kojima se dobila vrijednost t
5. p -vrijednost testa: vjerojatnost da se dobije vrijednost statistike T koja je jednako ili više "ekstremna" od one opažene (trenutne), tj. koja jednako ili još više od opažene potvrđuje alternativnu hipotezu

Nedostaci

Glavni nedostatak – **teško je izračunati egzaktnu distribuciju** čim broj podataka malo naraste. S pojavom kompjutera to je djelomično olakšano. Ipak, čak i uz pomoć računala, računanje svih permutacija može biti nemoguće ili neefikasno.

Rješenja

- ▶ umjesto podataka, promatrati njihove rangove
 - ▶ današnji neparametarski testovi s rangovima su u principu permutacijski testovi napravljeni nad rangovima
- ▶ promatrati samo dio permutacija (**randomizacijski testovi**)
 - ▶ na slučajan način permutirati podatke i izračunati testnu statistiku
 - ▶ ponoviti puno puta
 - ▶ Zakon velikih brojeva: p -vrijednost aproksimiramo proporcijom slučajnih vrijednosti statistike T koje su jednake ili premašuju opaženu vrijednost

Primjer: nekategorijski podaci

Imamo dvije populacije, iz svake su uzeta 4 podatka (podaci se mogu kombinirati). Dobiveni brojevi su:

grupa 1	grupa 2
11	2
14	9
7	0
8	5
aritm. sredina	aritm. sredina
10	4

T = razlika između aritm. sredina
realizacija: $t = \mathbf{6}$

Permutacija podataka: na koliko se načina može podijeliti ovih 8 brojeva u dvije skupine po 4? $\binom{8}{4} = 70$

H_0 : nema razlike među populacijama

H_a : Grupa 1 ima veće očekivanje

p -vrijednost: proporcija onih rasporeda za koje je razlika u aritmetičkim sredinama jednaka ili veća od trenutne (t.j. one koja se dobila na danim podacima).

Veću razliku od 6 možemo dobiti u još samo dva rasporeda (zamjena brojeva 9 i 7 ili 9 i 8). Dakle:

$$p - vr. = \frac{3}{70} = 0.0429.$$

Za dvostrani test uzeli bismo u obzir i slučajeve gdje razlika ide u korist druge grupe pa je

$$p - vr. = \frac{6}{70} = 0.0857.$$