Vjerojatnost

Bilješke s predavanja

Sadržaj

3. Vjerojatnost **2**

3.1. Pojam vjerojatnosti 2

3.2. Vjerojatnost slučajnog događaja 4

3.3. Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost 10

4. Razdiobe **16**

4.1. Slučajne varijable 16

4.2. Diskretne slučajne varijable 16

3. Vjerojatnost

Osnovna literatura: bilješke su samo nadopuna skripti prof. Basraka; **Dodatna literatura:** Blitzstein i Hwang.

3.1. Pojam vjerojatnosti

Motivacijski primjer: problem Montyja Halla Tri zatvorenika su A, B i C. Predsjednik nasumično odabire dvojicu koje će pustiti. Prije nego što sazna bilo kakvu dodatnu informaciju, zatvorenik A ima vjerojatnost $\frac{2}{3}$ da će biti pušten.

Čuvar ne želi reći A-u je li odabran, ali mu kaže da je B odabran. Mijenja li ta informacija vjerojatnost da će A biti pušten? Odgovor ovisi o načinu na koji čuvar bira što će otkriti.

Protokol 1.

(a) A odabran $\longrightarrow$ otkriva drugog odabranog (B ili C)

(b) A nije odabran $\longrightarrow$ otkriva B ili C s jednakom vjerojatnošću

$\Longrightarrow$ vjerojatnost da je A odabran ostaje $\dfrac{2}{3}$.

Formalni račun ćemo vidjeti kasnije. Intuitivno, ključno je ovdje da informacija o tome je li A odabran ili ne, ne mijenja vjerojatnost da će B biti otkriven B (u oba slučaja vjerojatnost je $1/2$).

Protokol 2.

(a) ako je A odabran, čuvar otkriva drugog odabranog (B ili C)

(b) A nije odabran $\longrightarrow$ uvijek B

$\Longrightarrow$ sada je vjerojatnost da je A odabran $\dfrac{1}{2}$. □

- **Slučajni pokus** je pojava, mehanizam ili eksperiment čiji ishod nije jednoznačno određen.
  $\Rightarrow$ primjeri: bacanje kocke, rezultat ankete ili sutrašnja cijena dionice.
- **Elementarni ishodi** — svi mogući ishodi pokusa
- **Prostor elementarnih ishoda** — skup svih mogućih ishoda pokusa; obično se označava s Ω.
- **Događaj** — bilo koji podskup od Ω.

Primjeri

(a) Bacamo kocku

$$\longrightarrow \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad (4 = \text{„pao je broj 4”})$$

$\Rightarrow$ primjer događaja je npr.

$$A = \{\text{pao je paran broj}\} = \{2, 4, 6\},$$
$$B = \{\text{pala je šestica}\} = \{6\}.$$

Važno: događaje često zadajemo riječima! □

(b) Bacamo dvije kocke

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\\ &\quad \ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}\\ &= [\text{bolje}] = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}.\end{aligned}$$

– $A = \{\text{pala je barem jedan šestica}\}$

$$= \{(6,1),\ldots,(6,5),(1,6),\ldots,(5,6),(6,6)\}$$

– $B = \{\text{u prvom bacanju pala šestica}\} = \{(6,1),\ldots,(6,6)\}$ □

(c) Slučajno odabiremo jednu bebu iz promatrane skupine.

$$\longrightarrow \quad \Omega = \{b_1,\ldots,b_n\} \qquad \begin{array}{l} n \text{ – ukupan broj beba}\\ b_i \text{ – } i\text{-ta beba}\end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= \{\text{odabrana beba je curica}\}\\ &= \{b \in \Omega : b \text{ je curica}\}.\end{aligned}$$

□

- za događaj A kažemo da se „dogodio" ako se dogodio ishod $\omega \in \Omega$ takav da je $\boxed{\omega \in A}$ (npr. pala šestica $\longrightarrow$ dogodio se $A = \{\text{pao paran broj}\}$)
- Važno: za događaje A, B, događaji su i

$$\boxed{A^c = \Omega \setminus A, \quad A \cup B, \quad A \cap B, \quad \ldots}$$

Primjer Bacamo dvije kocke, stavimo

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{na 1. kocki pala šestica}\},\\ B_2 &= \{\text{na 2. kocki pala šestica}\}.\end{aligned}$$

Imamo

- $$\begin{aligned} B_1^c &= \{(6,1),\ldots,(6,6)\}^c\\ &= \{\text{svi } (i,j) \in \Omega : i \neq 6\}\\ &= \{\text{na 1. kocki nije pala šestica}\}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 &= \{(6,1),\ldots,(6,6)\} \cup \{(1,6),\ldots,(6,6)\}\\ &= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,5),(1,6),\ldots,(5,6),(6,6)\}\\ &= \{\text{u dva bacanja pala je barem jedna šestica}\}\end{aligned}$$
- $B_1 \cap B_2 = \{(6,6)\} = \{\text{u oba bacanja pala šestica}\}$

Nadalje, ako je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{zbroj na kockama je 5}\},\\ C &= \{\text{na prvoj kocki pao paran broj}\},\end{aligned}$$

imamo

- $A \cap B_1 = \underbrace{\varnothing}_{\text{„prazan skup"}}$, tj. A i B_1 se ne mogu dogoditi istovremeno

- $B_1 \subseteq C$ (tj. $(i,j) \in B_1$ povlači $(i,j) \in C$), kažemo da „B_1 povlači C". □

Općenito,

$$A^c = \text{„}A \text{ se nije dogodio"},$$
$$A \cup B = \text{„dogodio se } A \text{ ili } B\text{"} \quad \text{(ili oba)},$$
$$A \cap B = \text{„dogodio se i } A \text{ i } B\text{"},$$

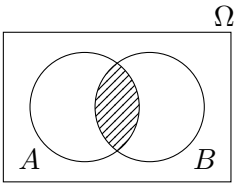
itd.

Zadatak

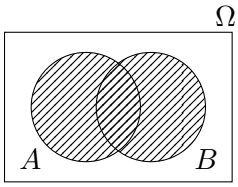
$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = ?$$

Rješenje: „ili samo A ili samo B"

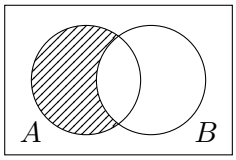
Vennovi dijagrami su često korisni.



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \cap B^c = \text{„}A \setminus B\text{"}$

Napomena Ω ne mora biti konačan. Npr.

(a) biramo broj iz $\boxed{\Omega := [0,1]}$ □

(b) bacamo novčić beskonačno mnogo puta:

$$\Omega = \{(b_1, b_2, \ldots) : b_i = P \text{ ili } G,\ i = 1, 2, \ldots\}.$$ □

3.2. Vjerojatnost slučajnog događaja

Ako je A događaj, njegovu vjerojatnost označavamo s

$$\boxed{P(A) \quad \text{ili} \quad \mathbb{P}(A)}.$$

Osnovna svojstva vjerojatnosti Svaka vjerojatnost zadovoljava:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(nešto se mora dogoditi)*
- ako se $A_1, A_2, \ldots$ međusobno isključuju (tj. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$), vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

$\bigcup_i A_i$: dogodio se barem jedan od događaja A_i
= „dogodio se točno 1 A_i"

Ova svojstva koristimo kao osnovna pravila za računanje vjerojatnosti, te se iz njih izvode sva druga.

Vrijedi i:

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $A \subseteq B$ povlači $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{=0 \text{ ako } A \cap B = \varnothing}$$

Primjer 3.2.2: uniformni vjerojatnosni model

- Bacamo kocku $\longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- $$\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{pao je paran broj}\}}_{=A}) = ? \qquad \left(= \frac{3}{6}\right)$$
- kocka simetrična $\longrightarrow$ svi ishodi jednako vjerojatni, tj.
$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \cdots = \mathbb{P}(6) = a \in [0, 1]$$

$\mathbb{P}(6) := \mathbb{P}(\{6\})$

$$\begin{aligned} \implies \quad 1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \cdots \cup \{6\}) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(i) = 6 \cdot a \\ \implies \quad a = \frac{1}{6} &= \mathbb{P}(i), \qquad i = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

- konačno,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \frac{3}{6}.$$ □

Općenito, ako je

- $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$, tj. $\underbrace{|\Omega|}_{\text{veličina od } \Omega} = n$ (Ω konačan),
- svi ishodi jednako vjerojatni,

prirodan model je

$$\mathbb{P}(a_1) = \cdots = \mathbb{P}(a_n) = \frac{1}{n},$$

te vrijedi

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}, \qquad \text{za svaki događaj } A.$$

$\longleftarrow$ klasični („naivni”) pristup vjerojatnosti

- „naivni” $\longrightarrow$ često nisu svi ishodi jednako vjerojatni

Primjer 3.2.3 Bacamo dva novčića,

$$\mathbb{P}(\{\text{pala su jedno pismo i jedna glava}\}) = ?$$

1. ideja

$$\Omega = \{PP, GG, PG\} \qquad \begin{matrix} PG\text{: 1 } P \text{ i 1 } G \\ \text{(bez obzira na redoslijed)} \end{matrix}$$

te

$$\mathbb{P}(PP) = \mathbb{P}(GG) = \mathbb{P}(PG) = \frac{1}{3}.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{tražimo } \mathbb{P}(PG) = \frac{1}{3}.$$

2. ideja Pazimo na poredak

$$\Omega = \{(P,P), (G,G), \underline{(P,G), (G,P)}\}$$

te $\mathbb{P}((i,j)) = \frac{1}{4},\ \forall (i,j)$.

$$\Longrightarrow \quad \text{tražimo } \mathbb{P}(\{(P,G),(G,P)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Oba dva modela su valjani vjerojatnosni modeli, ali koji model je "razuman" za dani problem? Drugi! Prvi model nije razuman jer ishodi PP, GG i PG u našem pokusu **nisu** jednako vjerojatni. □

Prebrojavanje

- za uniforman model vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\begin{matrix} \text{važno je znati} \\ \text{prebrojiti elemente od } A \end{matrix}}$$

- pravilo množenja: ako se eksperiment sastoji od 2 eksperimenta – A i B, pri čemu
  - A ima ukupno a ishoda, te
  - za svaki ishod od A, B ima b ishoda,

  ukupan broj ishoda velikog pokusa je

$$\underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ puta}} = a \cdot b.$$

Isto pravilo vrijedi za niz od k pokusa. Ako prvi pokus ima a_1 ishoda, nakon svakog od njih drugi ima a_2 ishoda, i tako dalje, ukupan broj nizova ishoda iznosi

$$a_1 a_2 \cdots a_k.$$

Zadatak Deset ljudi trči maraton. Na koliko se načina mogu odrediti prvo, drugo i treće mjesto?

Rješenje.

$$\begin{array}{lll} A & \text{– tko je prvi} & \longrightarrow \quad 10 \text{ ishoda} \\ B & \text{– tko je drugi} & \longrightarrow \quad 10-1=9 \text{ ishoda} \\ C & \text{– tko je treći} & \longrightarrow \quad 10-2=8 \text{ ishoda} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{rješenje je } 10\cdot 9\cdot 8 \quad (=720).$$

□

Zadatak U kutiji je 20 kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, 20$. Izvlačimo k kuglica ($k \leq 20$), jednu za drugom, i to na dva načina:

(i) svaki put se izvučena kuglica vrati u kutiju („s vraćanjem"),

(ii) kuglice se ne vraćaju u kutiju („bez vraćanja").

Koliko je mogućih ishoda za k kuglica?

Rješenje.

$$\begin{array}{lll} & & \text{(i)} \qquad \text{(ii)} \\ A_1 & \text{– prva kuglica} \longrightarrow & 20 \qquad 20 \\ A_2 & \text{– 2. kuglica} \longrightarrow & 20 \qquad 19 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ A_k & \text{– } k\text{-ta kuglica} \longrightarrow & 20 \qquad 20-(k-1)=20-k+1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \text{(i)} \quad 20\cdot 20\cdots 20 = 20^k,$$

$$\text{(ii)} \quad 20\cdot 19\cdots(20-k+1).$$

□

Napomena U slučaju (ii), kada izvučemo svih 20 kuglica, imamo

$$20\cdot 19\cdot 18\cdots 1 = \underline{20!}$$

načina da svih 20 kuglica poredamo u niz
(tzv. „permutacije" skupa $\{1, 2, \ldots, 20\}$). □

- binomni koeficijent: ako u prethodnom zadatku k kuglica izvlačimo bez vraćanja, bez da pazimo na poredak,
  ukupan broj ishoda je

$$\binom{20}{k} = \boxed{\frac{20\cdot 19\cdots(20-k+1)}{k!}} = \frac{20!}{k!\,(20-k)!}.$$

npr. ($k=3$) $(3,6,2)\equiv(6,3,2)$ ako ne pazimo na poredak, a takvih permutacija je točno $3!=6$!

Zadatak Koliko riječi koje se sastoje od 5 slova A i 3 slova L (npr. LALALAAA)?

Rješenje.

$$\begin{array}{cccccc} \underline{L} & \underline{A} & \underline{L} & \cdots & \underline{A} & \\ 1. & 2. & 3. & & 8. & \end{array} \quad \text{mjesto u riječi}$$

$\Rightarrow$ dovoljno odrediti mjesta za L-ove (ili za A-ove)

$$\Longrightarrow \quad \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = \binom{8}{5}.$$

□

Nezavisno ponavljanje pokusa

Ako imamo uniforman model Ω_1 za neki pokus, pri čemu je $|\Omega_1| = n$, te pokus nezavisno ponavljamo k puta (npr. $k = 10$), „veliki" model

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1, a_2, \ldots, a_k \in \Omega_1\} = \Omega_1^k$$

je opet uniforman, tj.

$$\boxed{\mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{1}{\underbrace{n^k}_{=|\Omega|}}}.$$

Primjer Bacamo kocku 3 puta

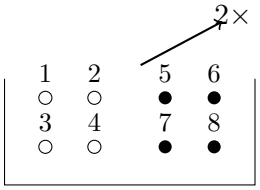
$$\longrightarrow \quad \Omega_1 = \{1, 2, \ldots, 6\}, \quad n = 6, \quad k = 3$$

$$\longrightarrow \quad \mathbb{P}(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}. \qquad \square$$

Primjer 3.2.4 U kutiji su četiri crne i četiri bijele kuglice. Slučajno izvlačimo dvije kuglice, jednu za drugom, na dva načina: izvučemo dvije kuglice, jednu za drugom, na dva načina:

(i) vraćajući 1. kuglicu natrag,

(ii) bez vraćanja



U oba slučaja odredite

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{izvukli smo kuglice različite boje}\}}_{=:A}).$$

Rješenje. **(i)**

$$\Omega = \{(\underbrace{B}_{\text{prvu kuglicu}}, \underbrace{B}_{\text{2. kug.}}), (B, C), (C, B), (C, C)\}$$

te imamo nezavisno ponavljanje uniformnog pokusa dva puta $\quad (\Omega_1 = \{B, C\},\ n = 2,\ k = 2)$.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(B, C), (C, B)\}) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) 1. pokušaj Ω kao u (i), ali vrijedi li

$$\boxed{\mathbb{P}(B, B) = \mathbb{P}(B, C)\ ?} \qquad \text{NE (imamo } <)$$

2. pokušaj Označimo kuglice brojevima

$$\underbrace{1, 2, 3, 4}_{\text{bijele}}, \underbrace{5, 6, 7, 8}_{\text{crne}}.$$

$\Rightarrow$ sada su ishodi oblika $(\underbrace{3}_{B}, \underbrace{2}_{B})$, $(\underbrace{8}_{C}, \underbrace{2}_{B})$ itd., tj.

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \ldots, 8, \ \boxed{i \neq j}\}$$

$\longleftarrow$ jer ne možemo izvući istu kuglicu

KLJUČNO: zbog simetrije svi parovi (i, j) su jednako vjerojatni.

Zbog simetrije nijedan uređeni par različitih kuglica nije povlašten.

$$\implies \quad \mathbb{P}(i,j) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8 \cdot 7} = \frac{1}{56}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{B \text{ pa } C\}) + \mathbb{P}(\{C \text{ pa } B\}).$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4 \cdot 4}{56} + \frac{4 \cdot 4}{56} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7} \quad \left(> \frac{1}{2}\right).$$

$$\{B \text{ pa } C\} = \{(i,j) : i = 1,2,3,4,\ j = 5,6,7,8\}$$
$$\implies \quad |\{B \text{ pa } C\}| = 4 \cdot 4.$$

□

Zadatak U prethodnom primjeru, u slučaju (ii), odredite $\mathbb{P}(B_1)$ i $\mathbb{P}(B_2)$ za

$$B_1 = \{\text{u prvom izvlačenju dobili } B\},$$
$$B_2 = \{\text{u drugom izvlačenju dobili } B\}.$$

Rješenje.

- $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1) &= \mathbb{P}(\{B \text{ pa } C\}) + \mathbb{P}(\{B \text{ pa } B\}) \\ &= \frac{4 \cdot 4}{56} + \frac{4 \cdot 3}{56} \\ &= \frac{28}{56} = \frac{1}{2} \quad \text{(simetrija prvog izvlačenja).}\end{aligned}$$

  Nakon izvlačenja jedne bijele kuglice, u kutiji ostaju tri bijele kuglice.

Promotrimo prvo samo prvo izvlačenje.

$$\Omega_1 = \{\text{svi ishodi 1. izvlačenja}\} = \{1,2,3,\ldots,8\},$$

svi ishodi su jednako vjerojatni, pa

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\{1,2,3,4\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

- $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(\{B \text{ pa } B\}) + \mathbb{P}(\{C \text{ pa } B\}) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

⇒ Ako promatramo samo drugo izvlačenje *tj. nemamo nikakvu informaciju o 1. izvlačenju*,

$$\Omega_2 = \{\text{svi ishodi 2. izvlačenja}\} = \{1,2,\ldots,8\}$$

te su opet svi jednako vjerojatni.

Primjer: problem rođendana (preskočiti)

Imamo k osoba u sobi. Svaka osoba ima rođendan na bilo koji od 365 dana u godini s jednakom vjerojatnosti, „nezavisno" od drugih osoba.

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{barem jedan par osoba ima rođendan na } \underline{\text{isti}} \text{ dan}\}}_{=:A_k}) = ?$$

Rješenje.

$$\Omega_k = \{(b_1, \underbrace{b_2}_{\substack{\text{dan na koji je rođena} \\ \underline{\text{2. osoba}}}}, \ldots, b_k) : b_i \in \{1, 2, \ldots, 365\},\ \forall i\}.$$

Imamo

$$|\Omega_k| = \underbrace{365 \cdot 365 \cdots 365}_{k \text{ puta}} = \underline{365^k}.$$

$$\longrightarrow \quad A_k^c = \{\text{nijedan par ljudi ne dijeli rođendan}\}$$

$$|A_k^c| = \underbrace{365}_{\substack{\text{mogućnosti} \\ \text{za 1. osobu}}} \cdot \underbrace{364}_{\text{2.}} \cdot \underbrace{363}_{\text{3.}} \cdots \underbrace{(365 - k + 1)}_{k\text{-tu}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A_k) = 1 - \mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Primjer

k	10	23	50
$\mathbb{P}(A_k)$	0.11	0.507	0.97

$\longrightarrow$ *intuicija: za 23 ljudi broj parova ljudi* $\binom{23}{2} = 253$ *je velik.* □

3.3. Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Za $A, B \subseteq \Omega$ s $\mathbb{P}(B) > 0$, uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio B jest

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Primjer Bacamo kocku $\longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- za $A = \{\text{pao je paran broj}\} = \{2, 4, 6\}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- za $B = \{\text{pao je broj } \geq 4\} = \{4, 5, 6\}$,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$= \frac{|\{4,6\}|}{\underbrace{|B|}_{\text{„novi } \Omega\text{”}}} = \frac{2}{3} \quad (> \mathbb{P}(A)).$$

□

Ako je $\mathbb{P}(B) > 0$, vrijedi

- $\mathbb{P}(B \mid B) = 1, \quad \mathbb{P}(B^c \mid B) = 0$
- $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$
- $A \cap C = \varnothing \longrightarrow$

$$\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(C \mid B)$$

Slično se dobivaju i ostala svojstva uvjetne vjerojatnosti.

Nezavisnost

Za $A, B \subseteq \Omega$ kažemo da su nezavisni ako

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}.$$

$\Rightarrow$ ako je $\mathbb{P}(B) > 0$, imamo

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \underline{\mathbb{P}(A)},$$

tj. poznavanje da se B dogodio ne daje nam informaciju koja bi promijenila vjerojatnost za A!

Primjer Bacamo dvije simetrične kocke

$$\longrightarrow \quad \Omega = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}.$$

- za $A = \{\text{na 1. kocki } 4\}$, $B = \{\text{na 2. kocki } 1\}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|\{(4,1)\}|}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

$\Longrightarrow$ A i B nezavisni (kao što bismo i htjeli!). □

Važno

- U nastavku pretpostavljamo da su bacanja kocke nezavisna te računamo

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

- Često je poznata uvjetna vjerojatnost $\mathbb{P}(A \mid B)$ za $A, B \subseteq \Omega$ te to koristimo da bi izračunali

$$\underline{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)}.$$

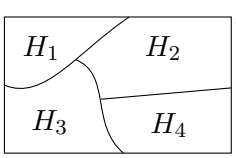
Formula potpune vjerojatnosti (FPV):

Ako su $H_1, \dots, H_n \subseteq \Omega$ događaji takvi da

- $\mathbb{P}(H_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n$
- $H_1, \dots, H_n$ se međusobno isključuju,
- $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ (tj. jedan od H_i-eva se mora dogoditi),

vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i). \tag{FPV}$$



$n = 4$

Primjer Imamo dva novčića, jedan je simetričan, a na drugom je vjerojatnost za P jednaka $\frac{3}{4}$. Izaberemo slučajno 1 novčić i bacimo ga dva puta.

$$\longrightarrow \quad \mathbb{P}(\underbrace{\{\text{pala su dva pisma}\}}_{=:A}) = ?$$

Rješenje.

$$H_1 := \{\text{izabrali novčić 1}\},$$
$$H_2 := \{\text{izabrali novčić 2}\}.$$
$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(H_2).$$

Imamo $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ i $H_1 \cup H_2 = \Omega$, pa

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_2)\mathbb{P}(H_2).$$

$$\longrightarrow \quad \mathbb{P}(A \mid H_1) \overset{?}{=} \cdots = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{\text{novčić simetričan,} \\ \text{bacanja nezavisna}}} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \mid H_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{16} = \boxed{\frac{13}{32}}. \qquad \square$$

Bayesova formula

Općenito

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(B \mid A)}!$$

Vrijedi

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \boxed{\frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}}. \tag{Bayes}$$

Primjer Sve kao u prethodnom primjeru, zanima nas

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) = ?$$

$\Rightarrow$ Što mislite, je li $>$ ili $<$ od $\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{2}$?

$\longrightarrow$ *$<$, tj. dva pisma povećavaju vjerojatnost da smo u startu izabrali 2. novčić!*

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{32}} = \frac{4}{13} < \frac{1}{2}!$$

□

Primjer 3.3.3 (lažno pozitivni nalazi)

- Za test na rijetku bolest vrijedi

$$\mathbb{P}(\text{test je pozitivan} \mid \text{pacijent ima bolest}) = 0.99$$

i

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{test je pozitivan}}_{\text{„lažno pozitivan nalaz”}} \mid \text{pacijent nema bolest}) = 0.02$$

- Bolest se javlja kod jedne od 10 000 osoba.

Kolika je vjerojatnost da osoba s pozitivnim rezultatom testa ima bolest?

Rješenje.

$$H_1 = \{\text{pacijent ima bolest}\},$$
$$H_2 = \{\text{pacijent nema bolest}\}.$$
$$\longrightarrow \quad \mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{10\,000}, \qquad \mathbb{P}(H_2) = \frac{9999}{10\,000}.$$

Za $A = \{\text{test je pozitivan}\}$ tražimo

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\text{FPV}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A \mid H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A \mid H_2)\mathbb{P}(H_2)}.$$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A) \underset{\text{pretpostavke}}{=} \frac{0.99 \cdot \frac{1}{10\,000}}{0.99 \cdot \frac{1}{10\,000} + 0.02 \cdot \frac{9999}{10\,000}} = \cdots \approx 0.0049 = 0.49\% \quad ?!$$

$\Rightarrow$ jer je vjerojatnost $\mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(\text{pacijent nema bolest})$ velika!

Zadatak za samostalni rad. Pretpostavimo da su rezultati triju ponovljenih testova nezavisni uz zadano zdravstveno stanje osobe. Za $A_3 = \{\text{sva tri testa su pozitivna}\}$ pokažite

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A_3) \approx 0.9238.$$

□

Primjer 3.3.4 (tri zatvorenika (sami)) Ovaj primjer ponovno razmatra uvodnu situaciju s tri zatvorenika.

U situaciji imamo

- tri zatvorenika: A, B, C
- dva su nasumično odabrana za puštanje
- čuvar je otkrio da će B biti pušten

Prvi protokol.

Pretpostavimo da je čuvar imao sljedeći način postupanja:

(a) ako je A odabran $\longrightarrow$ otkriva drugog odabranog (B ili C)

(b) ako A nije odabran $\longrightarrow$ otkriva B ili C s jednakom vjerojatnosti

Tražimo

$$\mathbb{P}(A \text{ nije odabran} \mid B \text{ otkriven})$$

$$\underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\overbrace{\mathbb{P}(B \text{ otkriven} \mid A \text{ nije odabran})}^{1^\circ}\ \overbrace{\mathbb{P}(A \text{ nije odabran})}^{2^\circ}}{\underbrace{\mathbb{P}(B \text{ otkriven})}_{3^\circ}}.$$

- $\textcircled{1^\circ} \overset{\text{(b)}}{=} \frac{1}{2}$
- $\textcircled{2^\circ} = \frac{|\{BC\}|}{|\{AB, AC, BC\}|} = \frac{1}{3}$
- $\textcircled{3^\circ} \underset{\text{zbog simetrije}}{=} \mathbb{P}(C \text{ otkriven}) = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A \text{ nije odabran}),$$

tj. $\{B \text{ otkriven}\}$ i $\{A \text{ nije odabran}\}$ su nezavisni.

Ovo dakle slijedi iz simetrije načina na koji čuvar postupa.

Drugi protokol.

(a) ako je A odabran, čuvar otkriva drugog odabranog (B ili C)

(b) ako A nije odabran $\longrightarrow$ uvijek otkriva B.

Za samostalni rad:

$$\mathbb{P}(A \text{ nije odabran} \mid B \text{ otkriven}) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}!$$

Rješenje.

- (1°) $= 1$
- (2°) $= \frac{1}{3}$
- (3°)

$$\frac{|\{AB\}|}{|\{AB, AC\}|} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \overbrace{\mathbb{P}(B \text{ otkriven} \mid A \text{ odabran})}$$

$$+ \frac{1}{3}\mathbb{P}(B \text{ otkriven} \mid A \text{ nije odabran})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

□

4. Razdiobe

4.1. Slučajne varijable

Motivacija Neka je

$$X := \text{visina slučajno odabranog studenta biologije.}$$

$\Rightarrow$ X je slučajan broj jer ovisi o ishodu slučajnog pokusa: ako je odabran student $\omega \in \Omega$, onda je

$$\boxed{X(\omega) = \text{visina studenta } \omega}.$$

$\Rightarrow$ dakle, X je funkcija sa Ω u $\mathbb{R}$ („$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$”).
$\Rightarrow$ zanima nas npr.

$$\mathbb{P}(X \geq 180) = \mathbb{P}(\{\text{odabrani student je visok barem 180}\}). \qquad \square$$

Definicija Slučajna varijabla je svaka funkcija

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}. \qquad \square$$

4.2. Diskretne slučajne varijable

Slučajna varijabla X je **diskretna** ako poprima konačno mnogo vrijednosti ili ako se sve njezine moguće vrijednosti mogu poredati u niz $a_1, a_2, \ldots$.

$\Rightarrow$ brojeve $a_1, a_2, \ldots$ zajedno s vjerojatnostima

$$p_i := \mathbb{P}(X = a_i) = \text{vjerojatnost da } X \text{ poprimi vrijednost } a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

čine **razdiobu** slučajne varijable X.
$\Rightarrow$ razdiobu prikazujemo tablicom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.2.1 Bacamo dva simetrična novčića nezavisno, te definiramo

$$X = \text{broj pisama koja su pala.}$$

$$\longrightarrow \quad \Omega = \{PP, PG, GP, GG\},$$

te

$$X(PP) = 2, \quad X(PG) = X(GP) = 1, \quad X(GG) = 0,$$

pa je dakle

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(GG) = \frac{1}{4},$$

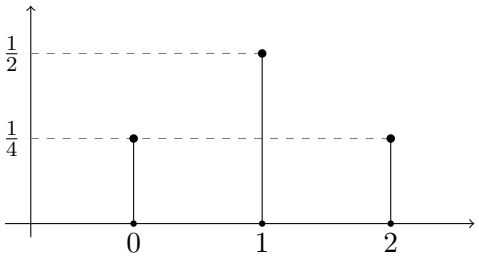
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{PG, GP\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(PP) = \frac{1}{4} \quad \big(= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)\big).$$

$\Longrightarrow$ X je diskretna slučajna varijabla s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ razdiobu možemo prikazati grafički:



$\Rightarrow$ npr.

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$\Rightarrow$ Ako je

$$Y := 2 - X = \text{broj glava},$$

razdioba od Y je ... ?

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

dakle, ista razdioba iako X i Y nisu iste funkcije □

Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

vrijedi

- $p_i \geq 0, \quad \forall i,$
- $\boxed{\sum_i p_i = 1}$.

Bernoullijeva razdioba

Ako u pokusu imamo samo dva ishoda: „uspjeh" i „neuspjeh",

npr. bacanje novčića, pao paran/neparan broj itd.

te je vjerojatnost uspjeha $p \in [0, 1]$, za

$$X := \begin{cases} 1, & \text{uspjeh}, \\ 0, & \text{neuspjeh}, \end{cases}$$

vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \qquad q := 1 - p.$$

$\longleftarrow$ Bernoullijeva razdioba s parametrom p (oznaka „$X \sim B(p)$")

Binomna razdioba

Ponavljamo gornji pokus $\underline{n}$ puta $\underline{\text{nezavisno}}$, te stavimo

$$Y := \text{ukupan broj uspjeha u } n \text{ pokusa.}$$

$\Rightarrow$ Y može biti ... ? $\rightsquigarrow 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\longrightarrow \quad \mathbb{P}(Y = k) = ?$$

npr. $n = 5$, $k = 3$

uspjeh/neuspjeh	$\underline{U}$	$\underline{N}$	$\underline{U}$	$\underline{U}$	$\underline{N}$
redni broj pokusa	1.	2.	3.	4.	5.

$\Rightarrow$ vjerojatnost za gornji ishod je ... ?

$$p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q = p^3 \cdot q^2 = p^k \cdot q^{n-k}.$$

$\Rightarrow$ rasporeda takav da je 3 U, 2 N ima

$$\binom{5}{3} \quad \longleftarrow \quad \text{biramo mjesta za } U$$

vidi raniji primjer s riječima LALALAAA

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(Y = 3) = \binom{5}{3} p^3 \cdot q^2.$$

Općenito,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n}$$

$\longleftarrow$ Binomna razdioba s parametrima $\underline{n}$ i $\underline{p}$

Primjer Neka je Y broj pisama u dva bacanja simetričnog novčića.

$$\longrightarrow \quad Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right). \qquad \square$$

Zadatak Nezavisno bacamo šest simetričnih kocaka. Kolika je vjerojatnost da će pasti barem dvije šestice?

Rješenje. $X :=$ ukupan broj šestica.

kocka	1.	2.	3.	4.	5.	6.
ishod	6	5	5	1	6	2

$$\longrightarrow \quad X = 2.$$

$$\Longrightarrow \quad X \sim B\left(6, \frac{1}{6}\right)$$

„pokusi” = bacanja kocke

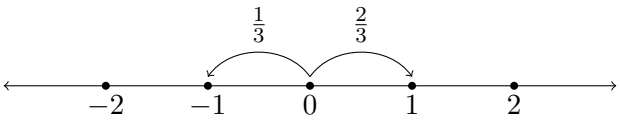
„uspjeh” = šestica

Pa je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 - 6 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx \underline{0.26}.\end{aligned}$$

□

Dodatni zadatak Žaba skače po točkama na pravcu:



U svakom koraku, nezavisno od prethodnih, skoči lijevo ili desno, s time da je skok na desno dva puta vjerojatniji. Ako kreće iz 0, kolika je vjerojatnost da će nakon 6 koraka biti u 2?

Rješenje. Ako je

$$X = \text{pozicija žabe nakon 6 koraka},$$

te

$$Y = \text{broj puta kada je žaba otišla } \underline{\text{desno}},$$

budući da je broj koraka lijevo jednak $6 - Y$, vrijedi

$$X = Y - (6 - Y) = 2Y - 6.$$

Budući da je

$$Y \sim B\left(6, \frac{2}{3}\right),$$

imamo

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 4) = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \cdots = \boxed{\frac{80}{243}} \approx 0.33.$$

□

Očekivanje i varijanca

Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

<u>očekivanje</u> od X definiramo kao

$$\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{očekivanje}} = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots = \sum_i a_ip_i\,.$$

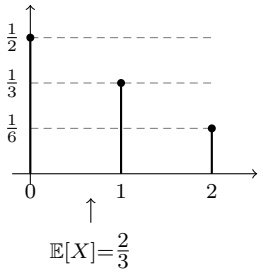
Ako želimo biti skroz precizni, kod beskonačno mnogo vrijednosti, tražimo $\sum_i |a_i|p_i < \infty$ ili da su svi a_i-evi nenegativni.

Primjer Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

imamo

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$



$\mathbb{E}[X]$ je „težinska" sredina □

Vrijedi *uz konačna očekivanja u navedenim formulama*:

- za $a \in \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$,
- za bilo koje slučajne varijable X, Y,

$$\boxed{\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]},$$

- ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(a_i) p_i.$$

Primjer. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

$$\mathbb{E}[X^2] \underset{g(t)=t^2}{=} 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$ □

Varijanca od X definira se kao

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])^2\Big]$$

(„prosječno kvadratno odstupanje X-a od $\mathbb{E}[X]$"), a standardna devijacija je

$$\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

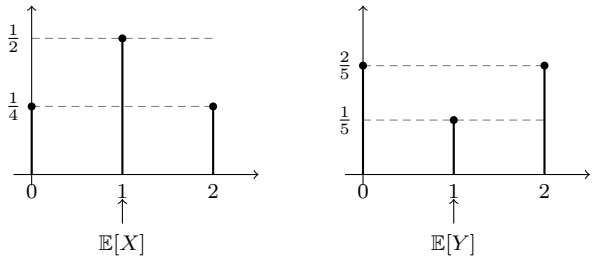
σ_X je u istim mjernim jedinicama kao i X.

Vrijedi:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2, \\ \mathrm{Var}(aX+b) &= a^2 \,\mathrm{Var}(X), \\ \sigma_{aX+b} &= |a|\, \sigma_X. \end{aligned}}$$

Primjer Neka su

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$



Imamo $\mathbb{E}[X] = 1 = \mathbb{E}[Y]$, ali

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$
$$\implies \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{3}{2} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}},$$

te $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.71$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\ &= 0^2 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{2}{5} - 1 \\ &= \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \end{aligned}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.89 > \sigma_X.$$

Dakle, Y je raspršenija oko očekivanja nego X. □

Nezavisnost

Ako su X i Y slučajne varijable takve da

- X poprima vrijednosti $a_1, a_2, \ldots$
- Y poprima vrijednosti $b_1, b_2, \ldots$,

kažemo da su X i Y nezavisne ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X = a_i,\, Y = b_j) = \mathbb{P}(X = a_i)\mathbb{P}(Y = b_j), \qquad \forall i, j.$$
$$\{X = a_i,\, Y = b_j\} = \{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}.$$

Primjer. Bacamo simetričnu kocku dva puta. Za

$$X = \text{broj u 1. bacanju}, \qquad Y = \text{broj u 2. bacanju},$$

imamo

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 5) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 5),$$

te isto za $\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)$ za sve $a_i, b_j \in \{1, \dots, 6\}$.
$\Longrightarrow$ X i Y nezavisne. *U nastavku u ovakim i sličnim primjerima pretpostavljamo da "znamo" da vrijedi nezavisnost te to koristimo kao alat za rješavanje zadataka.* □

Nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, \dots, X_n$ definira se analogno.

Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, vrijedi

$$\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n).$$

Bez nezavisnosti ova formula ne vrijedi općenito. Za $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]$ nezavisnost nije potrebna.

Primjer Ako je

$$X = \text{broj šestica u šest nezavisnih bacanja simetrične kocke},$$

$$\mathbb{E}[X] = ?, \qquad \operatorname{Var}(X) = ?$$

Rješenje. Definiramo

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{u } i\text{-tom bacanju pala šestica}, \\ 0, & \text{u } i\text{-tom bacanju nije pala šestica}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Tada je

$$X = X_1 + \cdots + X_6,$$

te su $X_1, \dots, X_6$ nezavisne jer ovise o različitim bacanjima.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_6],$$

a budući da je

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}, \qquad i = 1, \dots, 6.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

$$\operatorname{Var}(X) \underset{\text{nezavisnost}}{=} \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_6),$$

pa budući da je

$$\operatorname{Var}(X_i) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}, \qquad i = 1, \dots, 6,$$

$$\operatorname{Var}(X) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

□

Općenito, ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \qquad p \in [0,1], \quad q = 1 - p,$$

tj. $X \sim B(p)$, imamo

$$\mathbb{E}[X] = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p \cdot q,$$

a ako je $Y \sim B(n,p)$,

$$\mathbb{E}[Y] = np, \qquad \mathrm{Var}(Y) = npq.$$

(U prethodnom primjeru $X \sim B(6, \frac{1}{6})$.)

Ilustracija binomne razdiobe, te još neke poznate razdiobe na prezentaciji.