Opišimo najprije općenitu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi oblika

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{1}$$

pri čemu $f(t)$ **nije** suma izraza iz tablice partikularnih rješenja. Riječ je o **metodi varijacije konstanti**.

Prvi korak je pronalaženje općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe

$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0. \tag{2}$$

Rješenje će biti oblika

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{3}$$

gdje su y_1 i y_2 funkcije u varijabli t, a C_1 i C_2 realne konstante. Uočimo da su y_1 i y_2 rješenja homogene jednadžbe (2), jer ih dobivamo uvrštavanjem $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, odnosno $C_1 = 0$ i C_2=1 u izraz (3).

Rješenje polazne jednadžbe (1) tražimo u obliku

$$y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2, \tag{4}$$

pri čemu su sada C_1 i C_2 također funkcije u varijabli t. Tada je

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'. \tag{5}$$

Kako bi postupak bio jednostavniji, tražit ćemo rješenje koje dodatno zadovoljava uvjet

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \tag{6}$$

jer tada izraz (5) prelazi u

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \tag{7}$$

pa je

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''. \tag{8}$$

Uvrstimo (4), (7) i (8) u polaznu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \Leftrightarrow \quad & \left(C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''\right) + a\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(t) \\
\Leftrightarrow \quad & C_1(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by}_{=0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=0}) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(t).
\end{aligned}$$

Kako su y_1 i y_2 rješenja od (2), zaključujemo

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(t). \tag{9}$$

Dakle, C_1' i C_2' moraju biti takvi da vrijedi (6) i (9), tj. moraju zadovoljavati sustav

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(t) \end{cases}$$

Odavde lako možemo odrediti C_1' i C_2', a zatim integriranjem dobivamo C_1 i C_2.

Zadatak. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}.$$

Rješenje. Najprije odredimo rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe

$$y_H'' + y_H = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

čija rješenja su $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_H = e^{0\cdot t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

za neke $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Sada koristimo metodu varijacije konstanti kako bismo pronašli opće rješenje polazne jednadžbe. Ono će biti oblika

$$y = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \tag{10}$$

pri čemu C_1 i C_2 možemo dobiti rješavanjem sustava

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases} \tag{11}$$

Iz prve jednadžbe imamo $C_1' = -\frac{\sin t}{\cos t} C_2'$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$C_2' \frac{\sin^2 t}{\cos t} + C_2' \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

odnosno

$$C_2' \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}$$

odakle slijedi $C_2' = 1$, tj. $C_2(t) = t + D_1$, $D_1 \in \mathbb{R}$. Tada je $C_1' = -\frac{\sin t}{\cos t}$, pa je

$$C_1(t) = \int -\frac{\sin t}{\cos t} dt = \begin{bmatrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + D_2 = \ln|\cos t| + D_2, \quad D_2 \in \mathbb{R}$$

Konačno, uvrštavanjem u C_1 i C_2 u (10) dobivamo opće rješenje polazne jednadžbe:

$$\begin{aligned} y &= (\ln|\cos t| + D_2)\cos t + (t + D_1)\sin t \\ &= \ln|\cos t| \cos t + t \sin t + D_1 \sin t + D_2 \cos t, \qquad D_1, D_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$