

Prvi zadatak iz prve objavljene knjige o vjerojatnosti

Mia Klis

Zadatak: A i B se igraju zajedno s parom kockica. A pobjeđuje ako dobije 6 kao zbroj brojeva na kockicama, a B pobjeđuje ako dobije 7 kao zbroj brojeva na kockicama. Prvi baca A obje kockice jednom, zatim B baca obje dvaput, zatim A obje dvaput i tako dalje sve dok netko ne pobijedi. Kolika je šansa da jedan drugog pobijede?

Rješenje:

Računamo vjerojatnost da A pobijedi u jednom bacanju. Ukupni broj mogućih ishoda je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni ishodi za slučaj da A pobijedi su kombinacije (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1). Npr. (1,5) označava slučaj da na prvoj kockici padne 1, a na drugoj 5. Tih kombinacija je 5 pa dobivamo

$$P(A \text{ pobijedi, tj. dobije } 6) = \frac{5}{36}.$$

Računamo vjerojatnost da B pobijedi u jednom bacanju. Ukupni broj mogućih ishoda je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni ishodi za slučaj da B pobijedi su kombinacije (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Tih kombinacija je 6 pa dobivamo

$$P(B \text{ pobijedi, tj. dobije } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Budući da ćemo, radi lakšeg računa, razmatrati slučajeve u kojima A i B neće pobijediti računamo

$$P(A \text{ ne dobije } 6) = 1 - P(A \text{ pobijedi, tj. dobije } 6) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}.$$

$$P(B \text{ ne dobije } 7) = 1 - P(B \text{ pobijedi, tj. dobije } 7) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Pogledajmo slijedeće slučajeve.

Prvi slučaj: A pobijedi odmah, u prvom bacanju

Vjerojatnost da A pobijedi i da se igra završi je

$$P(A \text{ pobijedi, tj. dobije } 6) = \frac{5}{36}.$$

Drugi slučaj: A ne pobijedi u prvom bacanju pa igra B

Vjerojatnost da A ne pobijedi u prvom bacanju je

$$P(A \text{ ne dobije } 6) = \frac{31}{36}.$$

Vjerojatnost da B ne pobijedi u svom bacanju je

$$P(B \text{ ne dobije } 7) = \frac{5}{6},$$

ali B baca dvaput pa njegova vjerojatnost da ne pobijedi je $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Dakle, vjerojatnost da početak igre prođe bez pobjede je $\frac{31}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Nastavak igre ide tako da svaki igrač baca kockice dvaput. Vjerojatnost da krug (situacija u kojoj i A i B bacaju dvaput) prođe bez pobjede jednaka je vjerojatnosti da A ne pobijedi i da B ne pobijedi.

Vjerojatnost da A ne pobijedi, a baca kockice dvaput je $\left(\frac{31}{36}\right)^2$. Vjerojatnost da B ne pobijedi, a baca kockice dvaput je $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Sada označimo sa z vjerojatnost da nitko ne pobijedi u jednom krugu. Dakle, $z = \left(\frac{31}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Pogledajmo vjerojatnost da A pobijedi kada baca dvaput. Lakše nam je gledati komplement. Stoga, vjerojatnost da A pobijedi kada baca dvaput je $1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2$.

Uočimo da A može pobijediti odmah na početku igre ili u prvom krugu ili u drugom ili trećem krugu itd. Promotrimo slijedeće slučajeve.

Prvi slučaj: vjerojatnost da A ne pobijedi na početku, B ne pobijedi u svom bacanju, a zatim A pobijedi je

$$\left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2\right).$$

Drugi slučaj: vjerojatnost da A ne pobijedi na početku, ni A ni B ne pobijede u prvom krugu, zatim A pobijedi je

$$\left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot z \cdot \left(1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2\right).$$

Drugi slučaj: vjerojatnost da A ne pobijedi na početku, ni A ni B ne pobijede u prvom i drugom krugu, zatim A pobijedi je

$$\left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot z^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2\right).$$

Uočimo da ako nastavimo postupak, članu z će se povećavati potencija za 1.

Sada, kada sve zbrojimo, „ukupna“ vjerojatnost da A pobijedi je

$$P(A \text{ pobijedi u igri}) = \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2\right) \cdot (1 + z + z^2 + \dots).$$

Sjetimo se da $(1 + z + z^2 + \dots)$ čini geometrijski red čija je suma $\frac{1}{1-z}$.

Izračunajmo pomoćnu vrijednost z .

$$z = \left(\frac{31}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{24025}{46656}$$

Dakle, vjerojatnost da A pobijedi u igri je

$$\begin{aligned} P(A \text{ pobijedi u igri}) &= \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2}{1-z} \\ &= \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2}{1 - \frac{24025}{46656}} = \frac{10355}{22631}. \end{aligned}$$

Budući da pobjeđuje ili A ili B, vjerojatnost da B pobijedi u igri je

$$P(B \text{ pobijedi u igri}) = 1 - P(A \text{ pobijedi u igri}) = 1 - \frac{10355}{22631} = \frac{12276}{22631}.$$

Konačno, šansa da A pobijedi naprema šansi da B pobijedi je 10355 : 12276.

Reference:

Christiani Hugonii, *Libellus de ratiociniis in ludo aleae*, 1714.