

5. MONOTONOST I GEOMETRIJSKI EKSTREMI

5.1. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$

(d) $f(x) = \frac{\ln x}{x} e^{-\ln^2 x}$

5.2. Broj 2 prikažite u obliku umnoška dvaju pozitivnih brojeva kojima je zbroj kvadrata minimalan.

5.3. U prvi kvadrant elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ upišite pravokutnik maksimalne površine. Odredite mu stranice.

5.4. Iz kvadratne limene ploče stranice duljine 3 izrežu se kutovi tako da se od nastalog komada može napraviti kvadratna kutija (bez poklopca) maksimalnog volumena. Odredite taj volumen.

- 5.5. Od pravokutne ploče sa stranicama $a = 4$ i $b = 5$ odlomljen je trokut sa stranicama $c = 2$ i $d = 3$. Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču maksimalne površine. Odredite tu površinu.
- 5.6. Presjek kanala za dovod vode ima oblik pravokutnika s polukrugom. Ako je površina presjeka kanala jednaka 1, izračunajte polumjer polukruga tako da troškovi izgradnje budu što manji (troškovi su proporcionalni opsegu presjeka).
- 5.7. Brod je udaljen od najbliže točke A na obali 9 km. Čovjek u brodu mora što hitnije stići u mjesto udaljeno 15 km duž obale od točke A . Ako vesla brzinom od 4 km/h, a pješači brzinom od 5 km/h, gdje se čovjek mora iskrcati da bi stigao što prije u mjesto?
- 5.8. Odredite točku D iz prvog kvadranta tako da tangenta na krivulju $y = e^{-x}$ u točki D s koordinatnim osima zatvara trokut maksimalne površine.
- 5.9. Odredite tangentu na kružnicu $x^2 + y^2 = 2$ s diralištem u prvom kvadrantu tako da udaljenost između sjecišta te tangente i koordinatnih osi bude minimalna.

- 5.1. (a) **Intervali monotonosti:** f je rastuća na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, padajuća na $\langle -2, 1 \rangle$
Lokalni ekstremi: u $x = -2$ je lokalni maksimum, u $x = 1$ je lokalni minimum
- (b) **Intervali monotonosti:** f je padajuća na $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$, rastuća na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$
Lokalni ekstremi: u $x = 2$ je lokalni maksimum, u $x = 0$ je lokalni minimum
- (c) **Intervali monotonosti:** f je rastuća na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, padajuća na $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$
Lokalni ekstremi: u $x = -1$ je lokalni maksimum, u $x = 1$ je lokalni minimum
- (d) **Intervali monotonosti:** f je padajuća na $\langle 0, \frac{1}{e} \rangle \cup \langle \sqrt{e}, +\infty \rangle$, rastuća na $\langle \frac{1}{e}, \sqrt{e} \rangle$
Lokalni ekstremi: u $x = \sqrt{e}$ je lokalni maksimum, u $x = \frac{1}{e}$ je lokalni minimum

5.2. $x = y = \sqrt{2}$

5.3. $x = 3, y = 1$

5.4. $V = 2$

5.5. $P = \frac{32}{3}$ ako je stranica trokuta duljine 2 odrezana od stranice ploče duljine 4, a $P = 12$ ako je ona odrezana od stranice ploče duljine 5

5.6. $x \approx 0.53$

5.7. 12 km od točke A

5.8. $D\left(1, \frac{1}{e}\right)$

5.9. $y = -x + 2$