

7. TOK FUNKCIJE

7.1. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = x - \sqrt[3]{x-1}$

(c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

7.2. Odredite asimptote i skicirajte graf sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$

(d) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+5}$

(e) $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$

(f) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2+x+1}$

7.3. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

(b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

(c) $f(x) = \frac{7}{x^2+3} - 1$

(d) $f(x) = x^2 + 2/x$

(e) $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

(f) $f(x) = x + 1 - 2/x$

(g) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$

7.4. Bez računanja infleksija i intervala zakrivljenosti ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x^2+x-2} \right)$

(b) $f(x) = x - 2 \ln(1 - 1/x)$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{2x+4}$

7.5. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija:

$$(a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$(b) f(x) = \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(c) f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}$$

$$(d) f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$(e) f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$(f) f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$(g) f(x) = \ln(\cos x)$$

- 7.1. (a) **Intervali konveksnosti i konkavnosti:** f je konveksna na $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \rangle$, konkavna na $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
Točke infleksije: u $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (b) **Intervali konveksnosti i konkavnosti:** f je konveksna na $\langle -\infty, 1 \rangle$, konkavna na $\langle 1, +\infty \rangle$
Točke infleksije: nema
- (c) **Intervali konveksnosti i konkavnosti:** f je konveksna na $\langle -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3} \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, konkavna na $\langle -\infty, -2 - \sqrt{3} \rangle \cup \langle -2 + \sqrt{3}, 1 \rangle$
Točke infleksije: u $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ i $x_3 = 1$

- 7.2. (a) $x = -5$ i $x = 5$ su vertikalne asimptote, $y = 1$ je horizontalna asimptota
(b) $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote, $y = 0$ je horizontalna asimptota
(c) $x = 2$ je vertikalna asimptota, $y = x + 4$ je kosa asimptota
(d) $x = -5$ je vertikalna asimptota, $y = x - 3$ je kosa asimptota
(e) $y = 2x + \frac{1}{4}$ je desna kosa asimptota., $y = -2x - \frac{1}{4}$ je lijeva kosa asimptota
(f) $y = -x - 1$ je desna kosa asimptota, $y = 3x + 1$ je lijeva kosa asimptota

7.3. (a) **Područje definicije:** $\mathbb{R}$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = -2, x_2 = 1$

Asimptote: nema

Ekstremi: $m(1,0)$ je lokalni minimum, $M(-1,4)$ je lokalni maksimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$,
padajuća na $\langle -1, 1 \rangle$

Točke infleksije: $T(0,2)$

Intervali zakrivljenosti: f je konkavna na $\langle -\infty, 0 \rangle$, konveksna na $\langle 0, +\infty \rangle$

7.3. (b) **Područje definicije:** $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = 1$

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = -2$ je vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ je horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema kosih asimptota

Ekstremi: nema

Intervali monotonosti: f je svuda rastuća

Točke infleksije: nema

Intervali zakrivljenosti: f je konveksna na $\langle -\infty, -2 \rangle$, konkavna na $\langle -2, +\infty \rangle$

7.3. (c) Područje definicije: $\mathbb{R}$

Parnost: f je parna

Nul-točke: $x_1 = -2, x_2 = 2$

Asimptote:

Područje definicije je $\mathbb{R}$ pa nema vertikalnih asimptota.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ je horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema kosih asimptota

Ekstremi: $M(0, \frac{4}{3})$ je lokalni maksimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle -\infty, 0 \rangle$, padajuća na $\langle 0, +\infty \rangle$

Točke infleksije: $T_1(-1, \frac{3}{4}), T_2(1, \frac{3}{4})$

Intervali zakrivljenosti: f je konveksna na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, konkavna na $\langle -1, 1 \rangle$

7.3. (d) **Područje definicije:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = -\sqrt[3]{2}$

Asimptote:

$x = 0$ je vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow$ nema kosih asimptota

Ekstremi: $m(1, 3)$ je lokalni minimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle 1, +\infty \rangle$, padajuća na $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$

Točke infleksije: $T(\sqrt[3]{2}, 0)$

Intervali zakrivljenosti: f je konveksna na $\langle -\infty, -\sqrt[3]{2} \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$, konkavna na $\langle -\sqrt[3]{2}, 0 \rangle$

7.3. (e) Područje definicije: $\mathbb{R}$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = -1, x_2 = 1$

Asimptote:

Područje definicije je $\mathbb{R}$ pa nema vertikalnih asimptota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ nema lijevu horizontalnu asimptotu

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ nema lijevu kosu asimptotu

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ je desna horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema desnu kosu asimptotu

Ekstremi: u $x = 1 + \sqrt{2}$ je lokalni minimum, u $x = 1 - \sqrt{2}$ je lokalni maksimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na

$\langle -\infty, 1 - \sqrt{2} \rangle \cup \langle 1 + \sqrt{2}, +\infty \rangle$, padajuća na $\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$

Točke infleksije: u $x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{3}$ su infleksije

Intervali zakrivljenosti: f je konveksna na $\langle 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} \rangle$, konkavna na $\langle -\infty, 2 - \sqrt{3} \rangle \cup \langle 2 + \sqrt{3}, +\infty \rangle$

7.3. (f) **Područje definicije:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = -2, x_2 = 1$

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = 0$ je vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 1 \Rightarrow y = x + 1$ je kosa asimptota

Ekstremi: nema

Intervali monotonosti: f je svuda rastuća

Točke infleksije: nema

Intervali zakrivljenosti: f je konveksna na $\langle -\infty, 0 \rangle$, konkavna na $\langle 0, +\infty \rangle$

7.3. (g) **Područje definicije:** $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Parnost: f je neparna

Nul-točke: $x_0 = 0$

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow \pm 2 \pm} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = 2$ i $x = -2$ su vertikalne asimptote

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - 2x] = 0 \Rightarrow y = 2x$ je kosa asimptota

Ekstremi: $T_1 = (-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ je lokalni maksimum,

$T_2 = (2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ je lokalni minimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle -\infty, -2\sqrt{3} \rangle \cup \langle 2\sqrt{3}, +\infty \rangle$,
padajuća na $\langle -2\sqrt{3}, -2 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$

Točke infleksije: $T_3 = (0, 0)$

Intervali zakrivljenosti: f je konkavna na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle$,
konveksna na $\langle -2, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

7.4. (a) **Područje definicije:** $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: nema

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$ je lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ je desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ je lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ je desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ je horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema kosih asimptota

Ekstremi: $T = (-\frac{1}{2}, -\ln 9)$ je lokalni maksimum

Intervali monotonosti:

f je rastuća na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$, padajuća na $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

7.4. (b) **Područje definicije:** $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: ne računamo

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ je lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ je desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 0 \Rightarrow y = x$ je kosa asimptota

Ekstremi: $T_1 = (2, 2 + 2 \ln 2)$ je lokalni minimum,

$T_2 = (-1, -1 - 2 \ln 2)$ je lokalni maksimum

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$,
padajuća na $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$

7.4. (c) **Područje definicije:** $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle \cup [4, +\infty)$

Parnost: f nije ni parna ni neparna

Nul-točke: $x_1 = -1, x_2 = 4$

Asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ nije lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 0 \Rightarrow x = 4$ nije desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -2\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -2$ je vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ je desna horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema desnu kosu asimptotu

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ je lijeva horizontalna asimptota $\Rightarrow$ nema lijevu kosu asimptotu

Ekstremi: $T_1 = (-1, 0), T_2 = (4, 0)$ su lokalni minimumi

Intervali monotonosti: f je rastuća na $\langle 4, +\infty \rangle$, padajuća na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle$