

9. METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE

9.1. Izračunajte neodređene integrale:

(a) $\int x \sin x \, dx$

(b) $\int x \ln x \, dx$

(c) $\int x \sqrt{1+x} \, dx$

(d) $\int x^2 \sin x \, dx$

(e) $\int (x^2 + 2x + 3)e^x \, dx$

(f) $\int x e^{2x} \, dx$

(g) $\int e^x \sin x \, dx$

(h) $\int e^x \cos x \, dx$

(i) $\int \cos(\ln x) \, dx$

9.2. Izračunajte neodređene integrale:

(a) $\int \ln^2 x \, dx$

(b) $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$

(c) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$

(d) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx$

(e) $\int x \cos^2 x \, dx$

(f) $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$

(g) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

(h) $\int x^2 \arccos x \, dx$

(i) $\int x e^x \sin x \, dx$

9.3. Izračunajte neodređene integrale:

(a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

(c) $\int e^{2x} \sin(e^x) dx$

9.4. Izračunajte određene integrale:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(c) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

(e) $\int_0^1 e^{-x} \sin(\pi x) dx$

(f) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

9.5. Odredite rekurzivnu formulu za sljedeće integrale:

(a) $I_n = \int \sin^n x \, dx, n \in \mathbb{N}$

(b) $I_n = \int \ln^n x \, dx, n \in \mathbb{N}$

(c) $I_n = \int (a^2 - x^2)^n \, dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$

(d) $I_n = \int x^n e^{ax} \, dx, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$

- 9.1. (a) $-x \cos x + \sin x + c$
(b) $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$
(c) $\frac{2x}{3} \sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(1+x)^5} + c$
(d) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$
(e) $(x^2 + 3)e^x + c$
(f) $\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$
(g) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$
(h) $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$
(i) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c$

- 9.2. (a) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$
- (b) $\sqrt{x^3} \left(\frac{2}{3} \ln^2 x - \frac{8}{9} \ln x + \frac{16}{27} \right) + c$
- (c) $-\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + c$
- (d) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln \frac{1+x}{1-x} + x + c$
- (e) $\frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + c$
- (f) $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c$
- (g) $\frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} + c$
- (h) $\frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{1}{9}(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2} + c$
- (i) $\frac{1}{2}e^x(x \sin x - x \cos x + \cos x) + c$

- 9.3. (a) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$
 (b) $2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c$
 (c) $\sin e^x - e^x \cos e^x + c$

- 9.4. (a) $\frac{\pi}{4}$
 (b) $\frac{\pi}{2} - 1$
 (c) 1
 (d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
 (e) $\frac{\pi}{\pi^2 + 1} \cdot \frac{1 + e}{e}$
 (f) $\frac{1 - \ln 2}{2}$

- 9.5. (a) $I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \geq 2$
 (b) $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$
 (c) $I_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$
 (d) $I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$