

# Deseti tjedan

Fran Mišković

1. lipnja 2026.

**Zadatak 1.** Riješi valnu funkciju za  $\psi(x, 0) = \sin x$  i  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \cos x$ .

*Rješenje.* Uvrštavamo u d'Alembertovo rješenje:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{2}(\sin(x + ct) + \sin(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x + ct) + \sin(x - ct)) + \frac{1}{2c}(\cos(x + ct) - \cos(x - ct)).\end{aligned}\tag{1}$$

$$\mathcal{L}y = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

$$\mathcal{L}G(x, t) = \delta(x, t) \implies y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) \, dt$$

Vidi se:

$$G(x, t) = \begin{cases} Ay_1(x)y_2(t), & x < t \\ Ay_2(x)y_1(t), & x > t \end{cases}$$

gdje je  $y_1(a) = 0$ ,  $y_2(b) = 0$ .

**Zadatak 2.** Nađi Greenovu funkciju za:

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{4}, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo homogenu ODJ  $\mathcal{L}y = 0$  koristeći karakteristični polinom:  $y(x) = C_1 \cos(x/2) + C_2 \sin(x/2)$ . Da bismo zadovoljili prvi rubni uvjet uzimamo  $y_1(x) = \sin(x/2)$ , a za drugi  $y_2(x) = \cos(x/2)$ . Računamo koeficijent  $A$ :

$$\begin{aligned}A &= (p(t)[y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)])^{-1} \\ &= (-2^{-1} \sin(t/2) \sin(t/2) - 2^{-1} \cos(t/2) \cos(t/2))^{-1} \\ &= 2(-\sin^2(t/2) - \cos^2(t/2))^{-1} = -2\end{aligned}\tag{2}$$

pa je Greenova funkcija:

$$G(x, t) = \begin{cases} -2 \sin(x/2) \cos(t/2), & 0 \leq x < t \\ -2 \cos(x/2) \sin(t/2), & t < x \leq \pi. \end{cases}$$

**Zadatak 3.** Nađi Greenovu funkciju za:

$$\mathcal{L}y(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo homogenu ODJ  $\mathcal{L}y = 0$  koristeći karakteristični polinom:  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Da bismo zadovoljili prvi početni uvjet uzimamo  $y_1(x) = \sin x$ , a da bismo zadovoljili drugi:

$$\begin{aligned}y'(x) &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ 0 = y'(1) &= -C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 \\ \implies \frac{C_2}{C_1} &= \tan 1\end{aligned}\tag{3}$$

tj. dobar izbor je  $y_2(x) = \cos x + \tan 1 \sin x$ . Računamo koeficijent  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= (p(t)[y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)])^{-1} \\ &= ((-\sin t + \tan 1 \cos t) \sin t - \cos t(\cos t + \tan 1 \sin t))^{-1} \\ &= (-\sin^2 t - \cos^2 t)^{-1} = -1 \end{aligned} \quad (4)$$

Dakle, Greenova funkcija je:

$$G(x, t) = \begin{cases} -\sin x(\cos t + \tan 1 \sin t), & x < t \\ -\sin t(\cos x + \tan 1 \sin x), & x > t. \end{cases}$$

**Zadatak 4.** Zapiši ODJ u integralnom obliku:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y + V_0 \frac{e^{-x}}{x} y = 0, \quad y(0) = y(\infty) = 0.$$

*Rješenje.* Zapisujemo jednadžbu kao  $\mathcal{L}y = -V_0 \frac{e^{-x}}{x} y$  uz  $\mathcal{L}y = \frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y$ . Korištenjem karakterističnog polinoma dobijamo rješenje homogene varijante  $y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$ . Prvi rubni uvjet daje  $y_1(x) = e^{kx} - e^{-kx}$ , a drugi  $y_2(x) = e^{-kx}$ . Onda je:

$$\begin{aligned} A &= (-k e^{-kt}(e^{kt} - e^{-kt}) - k(e^{kt} + e^{-kt})e^{-kt})^{-1} \\ &= -\frac{1}{2k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dakle,

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{k} e^{-kt} \sinh(kx), & 0 \leq r < t \\ -\frac{1}{k} e^{-kx} \sinh(kt), & t < r < \infty \end{cases}$$

pa je integralna jednadžba upravo:

$$y(x) = -V_0 \int_0^\infty G(x, t) \frac{e^{-t}}{t} y(t) dt.$$