Jedanaesti tjedan

Fran Mišković

28. svibnja 2026.

Zadatak 1. Riješi jednadžbu provođenja topline u $\mathbb{R}^3$:

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

U cilindričnim koordinatama, koristeći metodu separacije.

Rješenje. Cilindrične koordinatame:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z,$$

Promatramo Laplaceov operator

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Treba izraziti derivacije po x, y pomoću derivacija po r, φ.
Po lančanom pravilu:

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x.$$

Računamo parcijalne derivacije:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pa je

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi.$$

Također,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

pa je

$$\varphi_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Dakle,

$$u_x = u_r\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}u_\varphi.$$

Slično:

$$u_y = u_r\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}u_\varphi.$$

Sad deriviramo još jednom. Za u_{xx}:

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}u_\varphi\right).$$

Nakon računanja (primjena produkta i lančanog pravila) dobiva se

$$u_{xx} = u_{rr}\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r}u_r + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}u_{\varphi\varphi} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}u_{r\varphi} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}u_\varphi.$$

Slično,

$$u_{yy} = u_{rr}\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{r}u_r + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}u_{r\varphi} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}u_\varphi.$$

Zbrojimo i mješoviti članovi se ponište:

$$-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}u_{r\varphi}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}u_{r\varphi}=0.$$

Isto vrijedi za članove s u_φ. Koristimo identitet $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$. Dobivamo

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.$$

Zato Laplaceova jednadžba

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

u cilindričnim koordinatama postaje

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+u_{zz}=0.$$

Zato jednadžba postaje

$$u_t=\alpha^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+u_{zz}\right).$$

Tražimo rješenje metodom separacije varijabli u obliku

$$u(r,\varphi,z,t)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z)T(t).$$

Računamo derivacije:

$$u_t=R\Phi ZT',$$

$$u_{rr}=R''\Phi ZT,$$

$$u_r=R'\Phi ZT,$$

$$u_{\varphi\varphi}=R\Phi''ZT,$$

$$u_{zz}=R\Phi Z''T.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$R\Phi ZT'=\alpha^2\left(R''\Phi ZT+\frac{1}{r}R'\Phi ZT+\frac{1}{r^2}R\Phi''ZT+R\Phi Z''T\right).$$

Dijeljenjem s $R\Phi ZT$:

$$\frac{T'}{\alpha^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{Z''}{Z}.$$

Lijeva strana ovisi samo o t, pa obje strane moraju biti jednake konstanti $-\lambda$:

$$\frac{T'}{\alpha^2T}=-\lambda.$$

Dakle,

$$T'+\alpha^2\lambda T=0.$$

Preostaje

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{Z''}{Z}=-\lambda.$$

Separiramo z-dio:

$$\frac{Z''}{Z} = -\mu^2,$$

pa vrijedi

$$Z'' + \mu^2 Z = 0.$$

Dobivamo

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = -(\lambda - \mu^2).$$

Separiramo kutni dio:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2,$$

odnosno

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0.$$

Napokon ostaje radijalna jednadžba:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left((\lambda - \mu^2) - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0.$$

Množenjem s r^2 dobivamo standardni oblik:

$$r^2 R'' + rR' + \left((\lambda - \mu^2)r^2 - m^2\right) R = 0.$$

To je Besselova diferencijalna jednadžba. Uz supstituciju $r = \frac{x}{\sqrt{\lambda - \mu^2}}$ imamo doista

$$x^2 R''(x) + xR'(x) + (x^2 - m^2)R(x) = 0$$

tj. $R(x) = J_m(x) \implies R(r) = J_m(r\sqrt{\lambda - \mu^2})$.

Besselove funkcije prve vrste

Besselove funkcije prve vrste J_ν su rješenja Besselove jednadžbe:

$$x^2 J_\nu'' + x J_\nu' + (x^2 - \nu^2) J_\nu = 0$$

dobijena Frobeniusovom metodom (regularni u 0?). Rekurzivne formule su:

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n$$

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J_n'.$$

Zadatak 2. Koristeći rekurzivne formule za J_n dokaži sljedeće formule:

1. $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$
2. $J_n(x) = J_{n+1}'(x) + \frac{n+1}{x} J_{n+1}(x)$

Rješenje. 1. Računamo derivaciju:

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n) = n x^{n-1} J_n + x^n J_n'.$$

Faktoriramo x^{n-1}:

$$= x^{n-1}\left(n J_n + x J_n'\right).$$

Koristimo formulu:

$$J_n' = \frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}.$$

Dobivamo:

$$n J_n + x J_n' = n J_n + \frac{x}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}).$$

Iz prve relacije:

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n \quad \Rightarrow \quad n J_n = \frac{x}{2}(J_{n-1} + J_{n+1}).$$

Uvrštavanjem:

$$= \frac{x}{2}(J_{n-1} + J_{n+1}) + \frac{x}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}).$$

Sređivanjem:

$$= \frac{x}{2}(2J_{n-1}) = x J_{n-1}.$$

Zato:

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}.$$

2. Koristimo iste relacije za indeks $n+1$:

$$J_n - J_{n+2} = 2J'_{n+1}.$$

Dakle:

$$J'_{n+1} = \frac{J_n - J_{n+2}}{2}.$$

Također:

$$J_n + J_{n+2} = \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{x} J_{n+1} = \frac{J_n + J_{n+2}}{2}.$$

Zbrajanjem:

$$J'_{n+1} + \frac{n+1}{x} J_{n+1} = \frac{J_n - J_{n+2}}{2} + \frac{J_n + J_{n+2}}{2}.$$

Sređivanjem:

$$= \frac{2J_n}{2} = J_n.$$

Zadatak 3. Uz pomoć funkcije izvodnice:

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

pokažite identitete:

$$J_n(-x) = J_{-n}(x).$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

Rješenje. Uvrštavamo $-x$ pa je:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x) t^n = e^{-x/2(t-1/t)} = e^{x/2(1/t-t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x) t^n.$$

Zbog jedinstvenosti Laurentovog reda imamo traženu tvrdnju.

Uvrštavamo $-x$ pa je:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x) t^n = e^{-x/2(t-1/t)} = e^{x/2(-t-1/(-t))} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(-t)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x) t^n.$$

Zbog jedinstvenosti Laurentovog reda imamo traženu tvrdnju.