

13. POVRŠINA I TEŽIŠTE RAVNINSKOG LIKA, VOLUMEN ROTACIJSKOG TIJELA

13.1. Izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int_{-5}^5 x \sqrt{x^2 + \cos x} dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx$

13.2. Ako je $y = f(x)$ neparna funkcija takva da je $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$, koliko je $\int_{-1}^{-2} 5f(x) dx$?

13.3. Ako je $y = f(x)$ neparna funkcija takva da je $\int_1^3 f(x) dx = 7$ i

$\int_{-1}^2 f(x) dx = 4$, koliko iznosi $\int_2^3 6f(x) dx$?

13.4. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^2$, x -osi i pravcima $x = -1$ i $x = 2$.

- 13.5. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.
- 13.6. Izračunajte površinu lika koji se nalazi između krivulje $y = x^2 - x - 6$ i x -osi od $x = -5$ do $x = 1$.
- 13.7. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$ (unutar parabole).
- 13.8. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.
- 13.9. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = \frac{3}{4}x^2$ i pravcem $x + y = 5$.
- 13.10. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \frac{1}{x}$ i pravcima $y = x$, $y = 0$, $x = e$.
- 13.11. Izračunajte površinu lika koji se nalazi između krivulja $y = \sin x$ i $y = \cos x$ od $x = 0$ do $x = \pi$.
- 13.12. Izračunajte površinu elipse $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje su $a, b > 0$.
- 13.13. Izračunajte površinu astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje je $a > 0$.

- 13.14. Izračunajte površinu Bernoullijeve lemniskate $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$.
- 13.15. Izračunajte površinu kardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$, gdje je $a > 0$.
- 13.16. Izračunajte koordinate težišta trokuta s vrhovima $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ i $C(6, 3)$.
- 13.17. Izračunajte koordinate težišta dijela ravnine omeđenog krivuljom $y = x^2$ i pravcem $y = 4$.
- 13.18. Izračunajte koordinate težišta dijela ravnine omeđenog pravcima $y = x$, $y = 2x$ i $x = 2$.
- 13.19. Izračunajte koordinate težišta dijela ravnine omeđenog krivuljom $y = \ln x$ i pravcem $y = 0$ iznad segmenta $[1, e]$.
- 13.20. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \cos \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ oko x -osi.
- 13.21. Izračunajte volumen kugle radijusa $r > 0$.
- 13.22. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$ oko x -osi.
- 13.23. Izračunati volumen tijela koje nastaje kada luk parabole $y^2 = 2x$, $x \in [0, 5]$, rotira oko y -osi .

- 13.24. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ oko y -osi.
- 13.25. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$ oko y -osi.
- 13.26. Izračunajte volumen eliposoida nastalog rotacijom elipse $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje su $a, b > 0$, oko x -osi.
- 13.27. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje je $a > 0$, oko x -osi.
- 13.28. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdje je $a > 0$, oko y -osi.
- 13.29. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom kardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$, gdje je $a > 0$, oko polarne osi.
- 13.30. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom krivulje $r = a \sin(2\varphi)$, gdje je $a > 0$, oko polarne osi.

- 13.1. (a) 0
(b) $\sqrt{2}$
- 13.2. -15
- 13.3. 18
- 13.4. 3
- 13.5. 9
- 13.6. 45
- 13.7. $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$
- 13.8. $\frac{9}{2}$
- 13.9. $\frac{13}{2}$
- 13.10. $\frac{3}{2}$
- 13.11. $2\sqrt{2}$
- 13.12. $ab\pi$
- 13.13. $\frac{3a^2\pi}{8}$
- 13.14. a^2
- 13.15. $\frac{3a^2\pi}{2}$

13.16. $T(4, 1)$

13.17. $T(0, \frac{12}{5})$

13.18. $T(\frac{4}{3}, 2)$

13.19. $T(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2})$

13.20. $\frac{\pi^2}{2}$

13.21. $\frac{4\pi}{3}r^3$

13.22. $\frac{4\pi}{5}$

13.23. $10\sqrt{10}\pi$

13.24. $\frac{\pi}{3}$

13.25. $\frac{\pi}{10}$

13.26. $\frac{4}{3}ab^2\pi$

13.27. $5\pi^2a^3$

13.28. $\frac{32\pi}{105}a^3$

13.29. $\frac{8}{3}\pi a^3$

13.30. $\frac{64\pi}{105}a^3$