

# Osme vježbe

Fran Mišković

7. svibnja 2026.

Kad rješavamo obične diferencijalne jednadžbe našu jednadžbu često možemo svesti na oblik:

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$$

pri čemu je  $\mathcal{L}$  neki linearni operator,  $\psi$  traženo rješenje, a  $\lambda$  neka konstanta. Očito je u ovom slučaju da tražimo  $\psi$  koja je svojstvena funkcija operatoru  $\mathcal{L}$  s pripadajućom svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ . Često promatramo diferencijalnu jednadžbu s uvjetima na nekom rubnom području (npr. iščezavanje  $\psi$  na  $\{a, b\}$  kada je domena funkcije  $[a, b]$ ). Za rješavanje ovog problema obično koristimo klasični skalarni produkt:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x) dx.$$

Kada je diferencijalni operator oblika:

$$\mathcal{L}(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)$$

i kada je  $p'_0 = p_1$  kažemo da je  $\mathcal{L}$  samoadjungiran. Doista, tada je:

$$\langle v|\mathcal{L}u \rangle = [v^*p_0u' - (v^*)'p_0u]_a^b + \langle (\mathcal{L}v)^*|u \rangle,$$

tj. Hermitski u slučaju da je zadovoljen rubni uvjet  $[\dots]_a^b$ . Također, ako su  $u, v$  svojstvene funkcije operatora  $\mathcal{L}$  s različitim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_u, \lambda_v$ , onda se lako vidi:

$$(\lambda_u - \lambda_v)\langle v|u \rangle = [\dots]_a^b,$$

tj. kada su još i rubni uvjeti zadovoljeni te će funkcije biti ortogonalne.

Međutim, uvjet  $p'_0 = p_1$  je rijetko zadovoljen. Tada tražimo funkciju težine  $w(x)$  takvu da je  $w(x)\mathcal{L}(x)$  samoadjungiran. Ta funkcija se konstruira na sljedeći način:

$$w(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp\left(\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx\right).$$

U tom slučaju težina se dodaje i u skalarni produkt:

$$\langle v|u \rangle := \int_a^b v^*(x)u(x)w(x) dx$$

te je tada doista

$$\langle v|\mathcal{L}u \rangle = [wv^*p_0u' - w(v^*)'p_0u] + \langle \mathcal{L}v|u \rangle$$

i ponovno je  $\mathcal{L}$  Hermitski kada je zadovoljen rubni uvjet. Također, kao i prije, za  $u, v$  svojstvene funkcije imamo:

$$(\lambda_u - \lambda_v)\langle v, u \rangle = [wp_0(v^*u' - (v^*)'u)]_a^b,$$

tj. kada je zadovoljen rubni uvjet svojstvene funkcije su ortogonalne.

**Zadatak 1.** Hermiteova obična diferencijalna jednadžba je oblika:

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$$

Zapiši jednadžbu u formi operatora i nađi pripadajuću težinu koja čini jednadžbu samoadjungiranom. Koja domena funkcije je potrebna da bi rubni uvjeti uvijek bili zadovoljeni?

*Rješenje.* Jednadžbu možemo zapisati kao:

$$\mathcal{L}\psi = -2\alpha\psi$$

pri čemu je  $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ . Tada je pripadajuća težina:

$$w(x) = \frac{1}{1} \exp\left(\int -\frac{2x}{1} dx\right) = e^{-x^2}.$$

Za traženu domenu dovoljno je da su njeni rubovi nultočke funkcije  $w$ . U ovom slučaju to su  $\pm\infty$  pa je domena čitav  $\mathbb{R}$ .

## 1 Metoda varijacije

Poznato je da se očekivana vrijednost hermitskog operatora  $H$  za normiranu funkciju  $\psi$  može zapisati kao  $\langle H \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$ . Ako  $\psi$  zapišemo u ortonormiranoj bazi svojstvenih funkcija  $(e_\mu)_\mu$  imamo  $\psi = \sum_\mu a_\mu e_\mu$  pa se lako vidi:

$$\langle H \rangle = \sum_\mu |a_\mu|^2 \lambda_\mu$$

pri čemu je  $\lambda_\mu$  svojstvena vrijednost sv. vektora  $e_\mu$ . Jer je  $\sum_\mu |a_\mu|^2 = 1$  očekivana vrijednost je uvijek veća ili jednaka najmanjoj sv. vrijednosti. Često ne znamo točnu vrijednost od  $\langle H \rangle$ , ali je možemo aproksimirati i time naći aproksimativnu gornju granicu najmanje svojstvene vrijednosti. Često se ta aproksimacija sastoji od nekoliko parametara, a pošto tražimo što bolju gornju granicu nastojimo minimizirati  $\langle H \rangle$  u ovisnosti o danim parametrima.

**Zadatak 2.** Funkcija  $\psi : [0, \infty)$  dana je s:

$$\psi = 2\alpha^{3/2} x e^{-\alpha x}.$$

Koristeći metodu varijacije nađi vrijednost  $\alpha$  koja minimizira očekivanu vrijednost operatora:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x}.$$

*Rješenje.* Računamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi \frac{1}{x} \psi dx &= 4\alpha^3 \int_0^\infty x e^{-2\alpha x} dx \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{-2\alpha x} dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{2}\alpha^{-1} e^{\alpha x} \end{array} \right] \\ &= -2\alpha^2 x e^{-2\alpha x} \Big|_0^\infty + 2\alpha^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha x} dx \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Analogno vidimo  $\langle d^2/dx^2 \rangle = -\alpha^2$  pa minimiziramo to po alfa.