

Devete vježbe

Fran Mišković

14. svibnja 2026.

Zadatak 1. Rijesi jednadžbu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + (2x - y)\psi = 0.$$

Rješenje. Karakteristika je $t = 2x - y$ i okomiti pravac je $s = 2x + y$ pa imamo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

pa se jednadžba svodi na:

$$4 \frac{\partial \psi}{\partial s} + t\psi = 0$$

što separacijom varijabli daje:

$$-4 \frac{d\psi}{\psi} = t ds \implies -4 \log \psi = ts + f(t) \implies \psi = f(2x - y) e^{-\frac{4x^2 - y^2}{4}}.$$

Zadatak 2. Rijesi jednadžbu:

$$\frac{d\psi}{dx} - 2 \frac{d\psi}{dy} + x + y = 0.$$

Rješenje. Karakteristika je $t = 2x + y$ i okomiti pravac je $s = 2x - y$ pa imamo

$$\frac{d\psi}{dx} = 2 \frac{d\psi}{dt} + 2 \frac{d\psi}{ds}, \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\psi}{ds}$$

i jednadžba se svodi na:

$$4 \frac{d\psi}{ds} + (t + s)/4 + (t - s)/2 = 0$$

pa separacijom imamo:

$$16\psi = 3ts - \frac{s^2}{2} + f(t) \implies \psi = \frac{3}{16}(4x^2 - y^2) - \frac{(2x - y)^2}{2} + f(2x + y) = \frac{-20x^2 + 32xy - 11y^2}{16} + f(2x + y).$$

Zadatak 3. Čestica je zatvorena u kutiju s dimenzijama $a \times b \times c$. Valna funkcija čestice ψ zadovoljava jednadžbu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$$

Ako valna funkcija iščezava na rubovima kutije, koja je najmanja vrijednost od E za koju postoji rješenje?

Rješenje.