# Vektorski prostori - nastavnički smjer

## 2. ispit
## 20.2.2024.

---

**Zadatak 1**

(14 bodova) Definirajte nilpotentne i poluproste operatore na kompleksnom vektorskom prostoru. Iskažite teorem o karakterizaciji poluprostih operatora. Opišite nilpotentne operatore čiji je indeks nilpotentnosti jednak dimenziji prostora.

**Zadatak 2**

(14 bodova) Definirajte unitarne i normalne operatore. Iskažite teorem o dijagonalizaciji unitarnih operatora. Iskažite i dokažite propoziciju koja opisuje spektar hermitski adjungiranog operatora normalnog operatora.

**Zadatak 3**

Operator $T \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi $(e)$ sa

$$T(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (8 bodova) Odredite karakteristični i minimalni polinom od $T$.

(b) (6 bodova) Označimo sa $R(T)$ sliku od $T$. Odredite realne brojeve $A, B, C, D$ takve da je

$$R(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0\}.$$

**Zadatak 4**

(a) (6 bodova) Neka je $N \in L(\mathbb{C}^{100})$ nilpotentan operator indeksa 10 takav da brojevi

$$\mathrm{r}(I) > \mathrm{r}(N) > \mathrm{r}(N^2) > \ldots > \mathrm{r}(N^9) > \mathrm{r}(N^{10})$$

čine aritmetički niz. Odredite Jordanovu formu od $N$.

(b) (8 bodova) Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^{10})$ za koji vrijedi

$$\mu_A(x) = (x-2)^4(x-4)^2,\ \det(A) = 2^{14},\ d(A-2I) + d(A-4I) = 4.$$

**Zadatak 5**

(a) (8 bodova) Na prostoru $\mathbb{R}^3$ dano je preslikavanje $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$\langle (v_1, v_2, v_3) \mid (w_1, w_2, w_3) \rangle = (v_1 + v_2)(w_1 + w_2) + (v_2 + v_3)(w_2 + w_3) + (v_3 + v_1)(w_3 + w_1).$$

Dokažite da je to skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ i odredite neku ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^3$.

(b) (6 bodova) Neka je $V$ konačnodimenzionalan unitaran vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Neka je $A \in L(V)$ regularan operator takav da je $A^3 = A^*$. Dokažite da je $A^4 = I$.

---

Vrijeme pisanja: 2h
Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja
zadnjih tri zadatka.