Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

VEKTORSKI PROSTORI - nastavnički smjer

prvi kolokvij - 19. studenog 2024.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih triju zadataka. Obrazložite svoje tvrdnje.
Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

1. a) (2 boda) Neka je dan $A \in L(V, W)$. Kako definiramo A', adjungirani operator operatora A?

   b) (5 bodova) Dokažite da je rang operatora A jednak rangu operatora A'. Sve tvrdnje detaljno obrazložite!

2. a) (2 boda) Kako definiramo minimalni polinom $\mu_A(x)$ operatora $A \in L(V)$, gdje je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$?

   b) (5 bodova) Dokažite tvrdnju: $\mu_A(\lambda) = 0$ ako i samo ako $A - \lambda I$ nije regularan operator.

3. Dani su vektori $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$ i $a_3 = (0, 1, 0)$ u $\mathbb{R}^3$.

   a) (4 boda) Pokažite da je $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$ i odredite njoj dualnu bazu.

   b) (3 boda) Odredite potprostor $L = [\{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (3, 0, 1)\}]$ kao skup rješenja

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}.$$

4. (7 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ zadan je u nekoj bazi (e) matrično s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Odredite minimalni polinom, karakteristični polinom i spektar od A, te odredite može li se A dijagonalizirati.

5. (7 bodova) Neka je $N \in L(\mathbb{C}^5)$ operator zadan matrično u kanonskoj bazi (e) s

$$N(e) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Pokažite da je N nilpotentan, odredite mu indeks nilpotentnosti, Jordanovu klijetku i neku njegovu Jordanovu bazu.