

Zadaci za vježbu: diskretne razdiobe, očekivanje i varijanca

Vježbe 5

Napomena. Oznaka $B(n, p)$ predstavlja binomnu razdiobu. Pri simulacijama koristite `set.seed(105)` i barem 10000 nezavisnih ponavljanja. Za zadatke na papiru dovoljan je običan kalkulator; potrebne tablične vrijednosti navedene su uz zadatke. U radu u Ru koristite osnovnu instalaciju bez dodatnih paketa.

1 Zadaci za rješavanje olovkom i papirom

Zadatak 1. Nepotpuna tablica razdiobe.

Broj cvjetova koji se otvore tijekom jutra na jednoj biljci označimo s X . Model je

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.3	a	0.1

- (a) Odredite a i $P(X \geq 2)$.
- (b) Izračunajte $E(X)$, $E(X^2)$ i $\text{Var}(X)$.
- (c) Mora li broj cvjetova na nekoj biljci biti jednak izračunatom očekivanju?

Zadatak 2. Trošak ponovne analize.

Jedna analiza stoji 4 eura. S vjerojatnošću 0.2 potrebno ju je ponoviti još točno jednom, uz dodatnih 4 eura. Neka I bude 1 ako se analiza ponavlja, a 0 inače; ukupni trošak je $C = 4 + 4I$.

- (a) Napišite razdiobe od I i C .
- (b) Izračunajte očekivanje i varijancu ukupnog troška, s mjernim jedinicama.
- (c) Koliki je očekivani ukupni trošak 20 takvih analiza? Treba li za računanje tog očekivanja pretpostavka nezavisnosti?

Zadatak 3. Kada model jest binoman?

Svaka od četiri sjemenke klija neovisno s vjerojatnošću 0.75. Neka X bude broj proklijalih sjemenki.

- (a) Navedite razdiobu, očekivanje i varijancu od X .
- (b) Izračunajte vjerojatnost da prokliju barem tri sjemenke.
- (c) U drugom pokusu sve četiri sjemenke kliju ako je zajednička posuda prikladna (vjerojatnost 0.75), a inače nijedna. Odredite razdiobu, očekivanje i varijancu broja proklijalih sjemenki u tom pokusu. Objasnite koja pretpostavka binomnog modela tada ne vrijedi.

Zadatak 4. Zajednički izvor dvaju uzoraka.

Najprije se jednako vjerojatno odabere spremnik A ili B. Zatim se iz odabranog spremnika uzmu dvije sjemenke s vraćanjem. U A je udio obojenih sjemenki 0.2, a u B 0.8. Uz poznat spremnik dva su izbora nezavisna. Neka je X ukupan broj obojenih sjemenki.

- (a) Odredite $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ i $P(X = 2)$ razmatrajući oba spremnika.
- (b) Izračunajte očekivanje i varijancu od X i usporedite ih s $B(2, 0.5)$.
- (c) Ako su obje sjemenke obojene, kolika je vjerojatnost da potječu iz B?

Zadatak 5. Dvije strategije za jednak očekivani broj opažanja.

Strategija A obuhvaća dvije nezavisne terenske provjere, svaku s vjerojatnošću opažanja vrste 0.5. Strategija B obuhvaća četiri nezavisne provjere, svaku s vjerojatnošću opažanja 0.25. Broje se uspješne provjere.

- (a) Odredite očekivanje i varijancu broja uspjeha za obje strategije.
- (b) Izračunajte vjerojatnosti barem jednog uspjeha i barem dvaju uspjeha.
- (c) Koju biste strategiju odabrali ako je cilj barem jedno opažanje, a koju ako su nužna barem dva? Obrazložite zašto očekivanje nije dovoljno.

2 Zadaci za rad u R-u

Zadatak 1. Računanje iz tablice razdiobe.

Broj uočenih kukaca pri jednoj provjeri ima razdiobu zadanu vektorima:

```
x <- 0:5  
p <- c(.10, .20, .30, .25, .10, .05)
```

- (a) Provjerite uvjete razdiobe te izračunajte očekivanje i varijancu ponderiranim zbrojevima. Objasnite zašto `mean(x)` i `var(x)` ne koriste zadane vjerojatnosti.
- (b) Nacrtajte stupčasti dijagram vjerojatnosti i izračunajte $P(X \geq 3)$.
- (c) Simulirajte 10000 opažanja naredbom:

```
uzorak <- sample(x, 10000, replace = TRUE, prob = p  
)
```

Usporedite relativne frekvencije, sredinu i varijancu s teorijskim vrijednostima.

Zadatak 2. Oblik binomne razdiobe.

Broj uspješnih reakcija među 12 nezavisnih reakcija ima razdiobu $B(12, p)$.

- (a) Za $p = 0.1, 0.5, 0.9$ izračunajte sve vjerojatnosti pomoću `dbinom()`. Nacrtajte tri grafa s jednakim skalama i označite očekivanja.
- (b) Za svaki p izračunajte $P(X \leq 2)$ i $P(X \geq 10)$ pomoću `pbinom()`.
- (c) Povežite zrcaljenje grafova za $p = 0.1$ i $p = 0.9$ s brojanjem uspjeha odnosno neuspjeha. Usporedite njihove varijance.

Zadatak 3. Koliko nezavisnih provjera provesti?

Jedna provjera otkriva prisutnu vrstu s vjerojatnošću 0.18. Pretpostavite da je vrsta prisutna i da su ponovljene provjere nezavisne.

- (a) Za $n = 1, \dots, 40$ izračunajte vjerojatnost barem jednog opažanja pomoću binomne razdiobe i pomoću komplementa.
- (b) Nacrtajte vjerojatnost u ovisnosti o n i odredite najmanji n za koji ona iznosi barem 0.95.
- (c) Za taj n simulacijom provjerite rezultat. Objasnite na koji se događaj odnosi prag 0.95; nemojte ga poistovjetiti s očekivanim udjelom uspjeha.

Zadatak 4. Brojanje uspjeha i vrednovanje rezultata.

U šest nezavisnih reakcija uspjeh se događa s vjerojatnošću 0.4. Ako uspije najviše jedna reakcija, dobiva se 0 mg proizvoda; ako uspiju dvije ili tri, dobiva se 5 mg; ako uspiju barem četiri, dobiva se 12 mg.

- (a) Odredite razdiobu mase proizvoda Y iz binomnih vjerojatnosti.
- (b) Izračunajte $E(Y)$ i $\text{Var}(Y)$ te prikažite razdiobu grafom.
- (c) Simulirajte broj uspjeha s `rbinom()` i pretvorite ga u masu pomoću `ifelse()`. Usporedite simuliranu sredinu s teorijskim očekivanjem.

Zadatak 5. Skrivena razlika između serija.

Svaka serija sadrži osam sjemenki. S vjerojatnošću 0.5 potječe iz izvora A, gdje je vjerojatnost klijanja 0.2, a inače iz izvora B, gdje je ona 0.8. Uz poznat izvor, klijanja unutar serije su nezavisna. Različite serije su nezavisne.

- (a) Za $k = 0, \dots, 8$ izračunajte razdiobu broja proklijalih sjemenki ponderiranjem dviju binomnih razdioba.
- (b) Usporedite graf, očekivanje i varijancu s modelom $B(8, 0.5)$.
- (c) Simulirajte izvor svake serije pa broj proklijalih sjemenki. Provjerite vjerojatnost potpuno neprokljale serije i objasnite zašto zajednički izvor može promijeniti rezultat i uz isti pojedinačni udio klijanja.