

Zadaci za vježbu: zajednička razdioba i primjene razdioba

Vježbe 6

Napomena. Geometrijska varijabla T broji pokušaje *uključujući prvi uspješan*, pa u R koristite `rgeom(..., prob = p) + 1`. Pri simulacijama postavite `set.seed(106)`. Za zadatke na papiru dovoljan je običan kalkulator; potrebne tablične vrijednosti navedene su uz zadatke.

1 Zadaci za rješavanje olovkom i papirom

Zadatak 1. Dvije osobine iste biljke.

Neka $X = 1$ označava prisutnost cvijeta, a $Y = 1$ prisutnost ploda; vrijednost 0 označava odsutnost. Za slučajno odabranu biljku vrijedi:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	0.1
1	0.2	0.3

- (a) Odredite rubne razdiobe od X i Y te njihova očekivanja.
- (b) Izračunajte $P(Y = 1 \mid X = 1)$ i provjerite nezavisnost.
- (c) Odredite razdiobu zbroja $X + Y$. Provjerite da je njegovo očekivanje zbroj očekivanja, iako varijable nisu nezavisne.

Zadatak 2. Čekanje uspješne pripreme uzorka.

Nezavisni pokušaji pripreme uspijevaju s vjerojatnošću 0.25. T je broj pokušaja do prvog uspjeha, uključujući uspješan pokušaj.

- (a) Izračunajte $P(T = 3)$, $P(T > 3)$, očekivanje i varijancu od T .
- (b) Ako prva tri pokušaja nisu uspjela, odredite vjerojatnost uspjeha u sljedeća dva pokušaja. Usporedite je s $P(T \leq 2)$.
- (c) Dva laboratorija rade nezavisno. Kolika je vjerojatnost da nakon tri pokušaja u svakom laboratoriju nijedan još nije uspio?

Zadatak 3. Veličina promatranog područja.

Broj čestica u površini od 1 mm^2 ima Poissonovu razdiobu s parametrom 2. Pretpostavite da parametar raste razmjerno površini.

- (a) Odredite razdiobu, očekivanje i varijancu broja čestica u 0.5 mm^2 .
- (b) Izračunajte vjerojatnost da na toj manjoj površini nema čestica ili ima barem dvije. Koristite $e^{-1} \approx 0.3679$.
- (c) Dva područja po 0.5 mm^2 imaju nezavisne brojeve čestica. Kolika je vjerojatnost da je barem jedno prazno?

Zadatak 4. Dopušteno odstupanje mjerenja.

Pogreška očitavanja X , u mg/L , ima razdiobu $N(0, 0.04)$.

- (a) Odredite standardnu devijaciju i $P(-0.2 \leq X \leq 0.4)$. Koristite $\Phi(1) = 0.8413$ i $\Phi(2) = 0.9772$.
- (b) Odredite $d > 0$ za koji je $P(|X| \leq d) = 0.95$; koristite $\Phi(1.96) = 0.975$.
- (c) Ako se pogreška izrazi u $\mu\text{g/L}$, pomnoži se s 1000. Navedite novu razdiobu i provjerite da se vjerojatnost prihvatljivog odstupanja ne mijenja ako se i granice pretvore u iste jedinice.

Zadatak 5. Diskretan broj, neprekidna aproksimacija.

U 100 nezavisnih reakcija vjerojatnost uspjeha je 0.5. Neka X broji uspjehe.

- (a) Navedite točnu razdiobu te parametre pripadne normalne aproksimacije.
- (b) Aproksimirajte $P(40 \leq X \leq 60)$ s korekcijom po neprekidnosti: koristite interval $[39.5, 60.5]$ i $\Phi(2.1) = 0.9821$.
- (c) Ponovite bez korekcije, uz $\Phi(2) = 0.9772$. Skicom objasnite zašto korigirani interval ima te granice. Bi li isti postupak bio uvjerljiv za $B(100, 0.005)$? Provjerite veličine np i $n(1 - p)$.

2 Zadaci za rad u R-u

Zadatak 1. Rubne razdiobe iz matrice.

Brojevi cvjetova $X \in \{0, 1, 2\}$ i plodova $Y \in \{0, 1, 2\}$ na biljci imaju sljedeću zajedničku razdiobu (redci odgovaraju X , stupci Y):

```
P <- matrix(c(.20, .08, .02, .10, .20, .10, .05, .10, .15),
            nrow = 3, byrow = TRUE)
```

- (a) Provjerite zbroj vjerojatnosti i izračunajte rubne razdiobe pomoću `rowSums()` i `colSums()`.
- (b) Usporedite P s `outer(rowSums(P), colSums(P))`. Jesu li X i Y nezavisne? Navedite konkretan par vrijednosti kao provjeru.
- (c) Izračunajte i stupčasto prikažite razdiobu od $X+Y$ te odredite $P(X > Y)$.

Zadatak 2. Dvije konvencije geometrijske razdiobe.

Pokušaji uspijevaju neovisno s vjerojatnošću 0.12.

- (a) Simulirajte 20000 vrijednosti broja pokušaja T do prvog uspjeha. Usporedite sredinu i varijancu s $1/p$ i $(1-p)/p^2$.
- (b) Izračunajte točne i simulirane vrijednosti $P(T = 1)$, $P(T > 10)$ i $P(T \leq 15)$. Pazite da `pgeom()` broji *neuspjeh* prije uspjeha.
- (c) Nacrtajte frekvencije za $T = 1, \dots, 30$, a sve veće vrijednosti sažmite u poseban stupac. Navedite udio opažanja u tom stupcu.

Zadatak 3. Prag za broj čestica.

Broj čestica u standardnom uzorku slijedi Poissonovu razdiobu s parametrom 3.2.

- (a) Pomoću `dpois()` i `ppois()` izračunajte $P(X = 0)$, $P(X \geq 6)$ i $P(2 \leq X \leq 5)$.
- (b) Pomoću `qpois()` pronađite najmanji cijeli broj k za koji je $P(X \leq k) \geq 0.95$. Provjerite vrijednosti funkcije distribucije u $k-1$ i k .
- (c) Simulirajte 20000 uzoraka, usporedite relativne frekvencije s teorijom te objasnite zašto kumulativna vjerojatnost u kvantilu ne mora biti točno 0.95.

Zadatak 4. Preciznost mjernih uređaja.

Pogreške dvaju uređaja imaju razdiobe $N(0, 0.2^2)$ i $N(0, 0.5^2)$ u mg/L.

- (a) Na istom grafu nacrtajte gustoće pomoću `dnorm()`.
- (b) Za oba uređaja odredite vjerojatnost apsolutne pogreške najviše 0.3 mg/L i središnji interval koji sadrži 90% pogrešaka.
- (c) Simulirajte po 20000 pogrešaka i provjerite dobivene vjerojatnosti. Objasnite razliku između visine gustoće u nuli i vjerojatnosti pogreške točno nula.

Zadatak 5. Koliko je dobra normalna aproksimacija?

Razmotrite binomne modele $(n, p) = (20, 0.1), (100, 0.1), (100, 0.5)$.

- (a) Za sve $k = 0, \dots, n$ usporedite `pbinom(k,n,p)` s normalnom aproksimacijom bez korekcije i s korekcijom, dobivenima u k odnosno $k + 0.5$.
- (b) Za svaki model nacrtajte apsolutne pogreške u ovisnosti o k te ispišite najveću pogrešku obiju aproksimacija.
- (c) Povežite razlike s veličinama np i $n(1 - p)$. Razlikujte tvrdnju o najvećoj pogrešci na cijeloj mreži od tvrdnje o svakom pojedinačnom k .