

Zadaci za vježbu: točkovna procjena parametara

Vježbe 7

1 Zadaci za rješavanje olovkom i papirom

Zadatak 1. Parametar i opaženi udio.

Od 20 nezavisno odabranih sjemenki iste serije proklijalo ih je 14. Svaka klija s istom nepoznatom vjerojatnošću p .

- (a) Procijenite p . Razlikujte nepoznati parametar od njegove procjene.
- (b) Procijenite očekivanje i varijancu broja proklijalih sjemenki u novom pokusu s 10 nezavisnih sjemenki iz iste serije.
- (c) Znači li dobivena procjena očekivanja da će novi pokus sigurno dati upravo taj broj proklijalih sjemenki? Obrazložite.

Zadatak 2. Procjena iz prebrojavanja.

Na šest nezavisnih jednako velikih površina prebrojano je 0, 1, 1, 2, 3, 5 čestica. Pretpostavite zajednički Poissonov model s parametrom λ .

- (a) Procijenite λ aritmetičkom sredinom i interpretirajte ga.
- (b) Odredite procjenu varijance koju daje Poissonov model te zasebno S^2 . Moraju li te dvije brojčane procjene biti jednake u konačnom uzorku?
- (c) Procijenite vjerojatnost prazne površine; za račun koristite $e^{-2} \approx 0.1353$.

Zadatak 3. Procjena parametara normalnog modela.

Nezavisna mjerenja mase pet istovrsnih uzoraka (g) su 8, 9, 10, 11, 12. Pretpostavite normalnu populaciju s nepoznatim parametrima.

- (a) Procijenite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju populacije.
- (b) Usporedite procjenu varijance s empirijskom varijancom uz nazivnik n .
- (c) Izračunajte procijenjenu standardnu pogrešku sredine $S/\sqrt{n}$. Objasnite razliku između raspršenosti pojedinačnih masa i nesigurnosti sredine.

Zadatak 4. Prvi uspjeh i odabir podataka.

Šest nezavisnih nizova pokušaja praćeno je sve do prvog uspjeha. Brojevi pokušaja su 1, 1, 2, 3, 3, 8. Pretpostavite isti geometrijski model u svim nizovima.

- (a) Iz $E(T) = 1/p$ izvedite procjenu $\hat{p} = 1/\bar{T}$ i izračunajte je.
- (b) Uvrštavanjem $\hat{p}$ procijenite očekivanje i varijancu od T .
- (c) Netko predlaže izostaviti niz s osam pokušaja zato što dugo traje. Izračunajte novu procjenu p i objasnite zašto takav odabir može narušiti procjenu.

Zadatak 5. Usporedba dvaju procjenitelja.

Nezavisna mjerenja $X_1, \dots, X_4$ imaju zajedničko očekivanje μ i varijancu $\sigma^2 = 16 \text{ mg}^2$. Razmatramo procjenitelje $T_1 = X_1$ i $T_2 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$.

- (a) Odredite njihova očekivanja. Jesu li nepristrani procjenitelji od μ ?
- (b) Odredite varijance i standardne pogreške obaju procjenitelja.
- (c) Koliko bi nezavisnih mjerenja trebalo usrednjiti da standardna pogreška iznosi najviše 1 mg? Objasnite ulogu nezavisnosti u računu.

2 Zadaci za rad u R-u

Zadatak 1. Procjene iz podataka o klijanju.

Za 12 nezavisnih posuda s po 10 sjemenki brojevi proklijalih sjemenki su:

```
x <- c(6, 7, 8, 5, 9, 7, 6, 8, 7, 4, 8, 9)
```

Pretpostavite da sve sjemenke kličaju nezavisno s istom vjerojatnošću p .

- (a) Procijenite p iz svih 120 sjemenki. Provjerite podudaranje s prosjekom udjela po posudama.
- (b) Za novu posudu s 10 sjemenki procijenite očekivanje, varijancu i vjerojatnost barem osam proklijalih sjemenki.
- (c) Usporedite opažene frekvencije s vjerojatnostima modela $B(10, \hat{p})$ na zajedničkom grafu. Opišite odstupanja bez provođenja testa.

Zadatak 2. Normalni model mjerenja.

Mase uzoraka (g) su:

```
x <- c(9.4, 10.2, 9.8, 10.5, 9.7, 10.1, 10.6, 9.9,
       10.3, 9.5, 10.0, 10.4, 9.6, 10.1, 9.8, 10.2)
```

Pretpostavite nezavisna opažanja iz iste normalne populacije.

- (a) Procijenite μ , σ^2 , σ i standardnu pogrešku sredine.
- (b) Nacrtajte histogram gustoće te dodajte gustoću s procijenjenim parametrima.
- (c) Procijenite $P(X > 10.5)$ i usporedite s opaženim udjelom masa iznad 10.5 g. Objasnite zašto modelna i izravna procjena nisu nužno jednake.

Zadatak 3. Procjena geometrijskog parametra.

Brojevi pokušaja do prvog uspjeha u 15 nezavisnih nizova su:

```
t <- c(1, 4, 2, 1, 7, 3, 2, 5, 1, 6, 2, 4, 3, 1, 8)
```

- (a) Procijenite $p = 1/E(T)$ zamjenom očekivanja uzoračkom sredinom.
- (b) Procijenite $P(T \leq 3)$ i $P(T > 6)$ uz ispravnu konvenciju za `pgeom()` te usporedite s opaženim udjelima.
- (c) Simulirajte 5000 novih uzoraka iste veličine iz procijenjenog modela. Za svaki izračunajte $\hat{p}$ i nacrtajte histogram procjena. Objasnite što raspršenost tog histograma govori o promjenjivosti procjene.

Zadatak 4. Zašto nazivnik $n - 1$?

Pretpostavite $X_i \sim N(10, 4)$, nezavisno.

- (a) Za 10000 uzoraka veličine $n = 5$ izračunajte varijancu s nazivnikom n i s nazivnikom $n - 1$.
- (b) Usporedite prosjeke procjena s pravom varijancom 4 i teorijskim očekivanjem $(n - 1)\sigma^2/n$ prve procjene.
- (c) Ponovite za $n = 30$ i prikažite rezultate u tablici. Objasnite zašto nepristranost opisuje prosjek kroz ponavljanja, a ne točnost svake pojedine procjene.

Zadatak 5. Veličina uzorka i preciznost sredine.

Broj čestica po uzorku ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = 3$.

- (a) Za $n = 5, 20, 80$ simulirajte po 10000 nezavisnih uzoraka i izračunajte njihove sredine kao procjene parametra λ .
- (b) Za svaki n usporedite sredinu i varijancu procjena s teorijskim vrijednostima 3 i $3/n$. Nacrtajte histograme na jednakim skalama.
- (c) Izračunajte udio procjena udaljenih najviše 0.5 od prave vrijednosti. Povežite promjenu tog udjela s promjenom standardne pogreške.