

## 2. Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja

**Zadatak 8.** Dan je CRR model s parametrima  $a = -0.2$ ,  $b = 0.25$ ,  $r = 0.1$  i  $T = 3$ . Početna cijena dionice je  $S_0 = 100$ .

- (a) Odredite vrijednost američke put opcije za  $K = 90$ .
- (b) Izračunajte hedging portfelj za  $S_1 = 80$ ,  $S_2 = 64$ .
- (c) Nađite optimalno vrijeme izvršenja opcije.
- (d) Usporedite s cijenom europske put opcije.

**Zadatak 9.** Neka je  $(B_t)_{t \geq 0}$  Brownovo gibanje.

- (a) Odredite razdiobu slučajne varijable  $X = B_1 + B_2 + B_3$ .
- (b) Neka je  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ . Izračunajte funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable  $Y$ , te  $\mathbb{E}[Y^3]$  i  $\mathbb{E}[Y^4]$ . Neka je  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Odredite funkciju izvodnicu momenata za  $Z$ .
- (c) Neka je  $W = \int_0^1 B_t^2 dt$ . Dokažite da je  $W$  slučajna varijabla i izračunajte  $\text{Var}(W)$ .

**Zadatak 10.** Neka je  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  Brownovo gibanje. Je li proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  također Brownovo gibanje, gdje je:

- (a)  $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ ,  $t \geq 0$ ,  $c > 0$ .
- (b)  $X_t = tB_{1/t}$ ,  $t > 0$  i  $X_0 = 0$ .
- (c)  $X_t = \sqrt{t}B_1$ ,  $t \geq 0$ .
- (d)  $X_t = -B_t$ ,  $t \geq 0$ .
- (e)  $X_t = B_{3t} - B_t$ ,  $t \geq 0$ .
- (f)  $X_t = B_T - B_{T-t}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ .

**Zadatak 11.** Neka su  $B^{(1)} = (B_t^{(1)})_{t \geq 0}$  i  $B^{(2)} = (B_t^{(2)})_{t \geq 0}$  nezavisna Brownova gibanja. Za koje vrijednosti parametara  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  je proces  $W$ ,

$$W_t = \alpha B_t^{(1)} + \beta B_t^{(2)}, \quad t \geq 0$$

Brownovo gibanje? Objasnite

**Zadatak 12.** Neka je  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  Brownovo gibanje. Dokažite da je proces  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  Gaussovski (odnosno da je  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$  normalno distribuiran slučajni vektor za sve  $m \in \mathbb{N}$  i  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ), odredite mu kovarijacijsku funkciju ( $\gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ ), te funkciju gustoće slučajnog vektora  $(X_s, X_t)$ ,  $0 < s < t$ , gdje je

- (a)  $X_t = B_t - tB_1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- (b)  $X_t = e^{-\alpha t/2} B_{e^{\alpha t}}$ ,  $t \geq 0$ .

**Zadatak 13.** Neka je  $(B_t)_{t \geq 0}$  Brownovo gibanje. Dokažite da je proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definiran s

$$X_t = B_t^3 - 3 \int_0^t B_s ds, \quad t \geq 0,$$

martingal obzirom na prirodnu filtraciju za  $B$ .

**Zadatak 14.** Neka je  $(B_t)_{t \geq 0}$  Brownovo gibanje i  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dokažite da je slučajni proces  $X = X_t : t \geq 0$  definiran s  $X_t = \exp(aB_t + bt)$ ,  $t \geq 0$  martingal ako i samo ako je  $a^2 + 2b = 0$ .

**Zadatak 15.**

- (a) Odredite 1-varijaciju and 2-varijaciju funkcije  $f(t) = t$ .
- (b) Pokažite da je kvadratna kovarijacija dvaju nezavisnih Brownovih gibanja konačna i jednaka 0.

---

8. a)  $U_0 = 3.58$ , b)  $\phi_1 = (23.58, -0.2)$ ,  $\phi_2 = (55.491, -0.638)$ ,  $\phi_3 = (74.636, -1)$ , c) Ukoliko je u trenutku  $t = 1$  cijena dionice  $S_1 = 80$  iskoristimo opciju, inače opciju ne koristimo. U trenutku  $t = 2$  ne koristimo opciju, neovisno o ishodu. Ukoliko je cijena dionice u trenutku  $t = 3$  jednaka  $S_3 = 80$  iskoristimo opciju. U protivnom opciju ne koristimo. d)  $P_0 = 2.75 < U_0$ .

9. a)  $X \sim N(0, 14)$ , b)  $\varphi_Y(\lambda) = e^{\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$ ,  $\mathbb{E}[Y^3] = 0$ ,  $\mathbb{E}[Y^4] = 3\sigma^4$ ,  $\varphi_Z(\lambda) = e^{\mu\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$ , (c)  $\text{Var}(W) = \frac{1}{3}$ .

10. a) da, b) da, c) ne, d) da, e) ne, f) da.

11.  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

12. a)  $\gamma(s, t) = \min\{s, t\}(1 - \max\{s, t\})$ , b)  $\gamma(s, t) = e^{\frac{\alpha}{2}(\min\{s, t\} - \max\{s, t\})}$ .

13. c) Neka  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  v.p. Prvo pokažite da vrijedi:  $\mathbb{E}[\int_0^t X_s ds | \mathcal{G}] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s | \mathcal{G}] ds$ , za svaku  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ .

15. a)  $V_t(f) = t$ , b)  $V_t^{(2)}(f) = 0$ .