

# Matematička analiza 1

## Ponavljjanje srednješkolškog gradiva

1. Riješite jednadžbe u skupu  $\mathbb{R}$ .

- (a)  $\frac{3x}{x+2} = 5 - \frac{6}{x+2}$
- (b)  $\frac{3x+1}{x^2+6x+9} + \frac{2x-5}{x+3} = 2$
- (c)  $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}$
- (d)  $\frac{|3x+1|}{x+2} = 2$
- (e)  $-3|x+1| + 2|1-2x| = 7$
- (f)  $x^2 = |4x-3|$
- (g)  $|x-3|x-1|| = x$
- (h)  $|x^2-3x| = -4x+6$
- (i)  $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-1}$
- (j)  $1 - \frac{x}{1 + \frac{x}{1-x}} = x^2$
- (k)  $\sqrt{(2x-1)^2-16} = 1-x$
- (l)  $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = 1$
- (m)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$
- (n)  $11x - 2x^2 + \sqrt{2x^2 - 11x + 9} = 7$

2. Riješite nejednadžbe u skupu  $\mathbb{R}$ .

- (a)  $\frac{x-2}{x^2-2x-8} \leq 0$
- (b)  $(x+5)(x-7) < (x+4)(x-6)$
- (c)  $\frac{x^2-4x-5}{x-2} \geq 0$
- (d)  $\frac{3+2x}{2-x} \geq 2 + \frac{x+1}{2x-4}$
- (e)  $\frac{x^2-2x-8}{3x-x^2} \leq 0$
- (f)  $\frac{x^2+x+2}{x^2-4x+3} < 0$

- (g)  $\frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 3} \leq 2$   
 (h)  $2x^3 - 3x^2 - 36x \leq 0$   
 (i)  $|\frac{x+2}{x-1}| > 1$   
 (j)  $|x^2 - x - 6| > 4$   
 (k)  $x^2 - |x| - 6 > 0$

3. Riješite jednadžbe u ovisnosti o realnim parametrima  $a$  i  $b$

(a)  $(a + bx)(b - ax) = ab(1 + x)(1 - x)$

Rješenje: Raspisivanjem dolazimo do jednadžbe  $x(b^2 - a^2) = 0$ . Ako vrijedi  $b^2 \neq a^2$  rješenje je  $x = 0$ , a ako je  $b^2 = a^2$  (tj.  $a = \pm b$ ) onda je svaki realan broj  $x$  rješenje.

(b)  $(a^2 + b^2)x + b^2 - a^2 = 2abx$

(c)  $(3ax + 4b)^2 + (4ax - 3b)^2 = (5ax - 7b)^2 + 11b^2$

(d)  $(a + 2x)^3 = 2x(2x + 3a)^2 - 12ax^2$

(e)  $(2x - 3a - b)^2 = (2x - 3a)(2x - b) - 3ab$

(f)  $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$

## Funkcije

1. Odredite najveći skup (u  $\mathbb{R}$ ) na kojem se funkcije  $f$  i  $g$  podudaraju

(a)  $f(x) = x + 3$  ;  $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

(b)  $f(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$  ;  $g(x) = \frac{(x+2)}{(x-1)}$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$  ;  $g(x) = x + 4$

(d)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$  ;  $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6}$

(e)  $f(x) = \sqrt{(x-2)x}$  ;  $g(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x}$

(f)  $f(x) = |x+1| - |x-1|$  ;  $g(x) = |x+2| - |x-2|$

2. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcije  $f$

(a)  $f(x) = -2x$

(b)  $f(x) = 3x^2$

(c)  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

(d)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$

$$(e) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(f) f(x) = \sqrt{4+x^2}$$

$$(g) f(x) = \frac{4}{\sqrt{3-x}}$$

$$(h) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-10}}$$

3. U kružnicu radijusa  $r$  upisan je jednakokračan trokut. Izrazite površinu i opseg trokuta kao funkcije duljine baze trokuta.

4. Odredite prirodnu domenu, sliku funkcije i  $f^{-1}([0, 3])$ , ako je

$$(a) f(x) = 3\sqrt{1-x} + 1$$

$$(b) f(x) = x^2 + 2x$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

5. Zadana je funkcija  $f : [-1, 3] \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  formulom

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$

Odredite  $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}])$  i sliku.

## Afina funkcija

1. Dnevni trošak tvornice iznosi 10 kn plus 50 lipa za svaki proizvedeni komad. S druge strane, cijena proizvedenog komada (na tržištu) iznosi 1 kn. Koliko treba proizvesti proizvoda po danu (i prodati ih) da tvornica ne posluje s gubitkom?
2. Lopovi s ukradenim kamionom bježe pred detektivima u automobilu. Brzina kamiona je 72 km/h, a automobila 168 km/h. Lopovi imaju početnu prednost od 40 minuta, a do sigurnog skrovišta imaju 83 km. Hoće li uspjeti pobjeći?

## Kvadratna funkcija

1. Skicirajte graf funkcije
  - (a)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$
  - (b)  $f(x) = -2x^2 + 6x$
  - (c)  $f(x) = x^2 - 4x - 5$

2. Odredite kvadratnu funkciju čije tjemene je u točki  $T(-5,2)$ , a siječe os  $y$  u točki  $M(0,7)$ .
3. Na kojem intervalu funkcija  $f(x) = 7x - x^2$  raste?
4. Zadana je funkcija  $f(x) = ax^2 + 2x + b$ . Ako je  $x = 1$  apscisa tjemena i ako je  $f(3) = 0$ , koliko je  $b$ .
5. Među funkcijama

$$f(x) = 2x^2 - (m - 1)x + 2m - 3, \quad m \in \mathbb{R},$$

odredite onu koja ima minimum za  $x = -1$ .

6. Za koje  $m \in \mathbb{R}$  funkcija  $f(x) = mx^2 - 2x + 4m - 3$  poprima negativne vrijednosti na cijelom području definicije?
7. Odredite  $k \in \mathbb{R}$  za koji jednačba  $2k \cdot x^2 - x - 1 = 0$  nema realnih rješenja.
8. Nađite  $p \in \mathbb{R}$  za koji je jedno rješenje jednačbe  $16x^2 - 8x + p + 1 = 0$  jednako nuli.
9. Za koji  $m \in \mathbb{R}$  jednačba  $3x^2 - 2x + m = 0$  ima točno dva realna rješenja.
10. Za koji  $m \in \mathbb{R}$  jednačba  $x^2 - 2x + m = 0$  ima dvostruko rješenje.
11. Ako su  $x_1$  i  $x_2$  nultočke kvadratne funkcije  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  odredite  $x_1^2 + x_2^2$ .
12. Nađite parametar  $c \in \mathbb{R}$  iz jednačbe  $x^2 + 5x + c = 0$  za koji je  $x_2 - x_1 = 3$ .
13. Odredite parametar  $a \in \mathbb{R}$  u jednačbi  $x^2 - x + a = 0$  za koji je zadovoljeno  $x_2 = 2x_1$ .
14. Nađite zbroj realnih nultočaka jednačbe  $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0$ .
15. Napišite kvadratnu jednačbu čiji su korijeni za  $m$  veći od korijena kvadratne jednačbe  $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$ .
16. Odredite vrijednosti parametra  $m \in \mathbb{R}$  za koje su oba korijena jednačbe  $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$  negativna.
17. U jednačbi  $x^2 - 2(m - 1)x - (2m + 1) = 0$  odredite parametar  $m$  tako da suma kvadrata njenih rješenja bude minimalna.
18. Odredite sve prirodne brojeve koji zadovoljavaju uvjet  $-x^2 + 4x \geq -2x + 8$ .
19. Za koje  $m \in \mathbb{R}$  je jedan korijen funkcije  $f(x) = 2mx^2 - (m - 1)x - m + 3$  veći od  $-1$ , a drugi manji od  $-1$ ?
20. Za koje  $m \in \mathbb{R}$  je jedan korijen funkcije  $f(x) = mx^2 - (m + 1)x - 3m + 4$  veći od  $1$ , a drugi manji od  $-2$ ?

21. Za pravokutnik opsega 8 cm izrazite površinu kao funkciju duljine jedne stranice. Koji takav pravokutnik ima najveću površinu?
22. Polje je smješteno uz dugačak ravan zid. Treba ograditi što je moguće veći dio polja u obliku pravokutnika, ali na raspolaganju imamo 240 m žice. Uz zid nije potrebno postavljati ogradu.
23. Među jednakokraknim trokutima duljine kraka 12 cm, odredite onaj koji ima najveću površinu.
24. Skratite razlomak

$$\frac{x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}}{3x^2 + (3\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}}.$$

## Apsolutna vrijednost

1. Riješite sustav

$$\begin{cases} |x| - |y| = 1 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

2. Dokažite

$$(a) \frac{|x + y| + |x - y|}{2} = \max\{|x|, |y|\}$$

$$(b) \frac{|x + y| - |x - y|}{2} = \min\{|x|, |y|\}$$

## Kompozicija funkcija. Inverzna funkcija

1. Skicirajte graf funkcije  $f(x) = 2x - 6$ . Koristeći transformacije tog grafa skicirajte grafove funkcija  $g(x) = f(x + 3) - 2$ ,  $h(x) = 2f(x - 1)$ ,  $p(x) = f(1 - x)$ ,  $r(x) = -f(2x)$ . Provjerite rješenje tako da izračunate eksplicitne izraze za  $g, h, p, r$  i skicirate grafove dobivenih funkcija.
2. Ako točke (1,3) i (-1,1) pripadaju grafu funkcije  $f$ , odredite dvije točke grafa funkcije
 
$$g(x) = 2f(x + 3) - 1.$$
3. Nađite domenu inverza funkcije  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ .
4. Zadane su funkcije  $f(x) = x^2 - 5x + 2$  i  $g(x) = 4x + 1$ . Odredite  $f \circ g$  i  $g \circ f$ .
5. Zadane su funkcije  $f(x) = ||x| - 2|$  i  $g(x) = |x - 1|$ . Odredite  $f \circ g \circ f$  i  $(f \circ g \circ f)(0)$ .
6. Zadana je funkcija  $f(t - 1) = 2t - t^2$ . Odredite  $f(f(t))$ .

7. Zadane su funkcije  $f(x) = \frac{1}{x} + 7$  i  $g(x) = \frac{x}{1-7x}$ . Odredite  $f(g(x+1))$ .
8. Ako je  $f(\frac{3x-1}{x+2}) = \frac{x+1}{x-1}$  koliko je  $f(x)$ .
9. Odredite inverz funkcije  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  na intervalu  $[3, +\infty)$ .