

Ponavljjanje kroz zadatke: matrice (OPLA)

1. Napišite matricu A reda 6 ako su njeni elementi zadani formulom

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & |i - j| \leq 1 \\ 0, & |i - j| = 2 \\ 5, & |i - j| > 2 \end{cases}$$

2. (Motivacijski zadatak za uvođenje množenja matrica.) Ana i Mea planiraju ići u kupnju voća za sljedeći tjedan. Obje žele kupiti jabuke, kruške i naranče, ali u različitim količinama koje su prikazane u tablici lijevo. U blizini su dvije trgovine voćem, *Voćko* i *Plodovi*, a cijene voća su u tablici desno.

	Jabuke	Kruške	Naranče
Ana	2	3	4
Mea	4	1	3

	<i>Voćko</i>	<i>Plodovi</i>
Jabuka	2.10 €	1.50 €
Kruška	1.80 €	2.30 €
Naranča	1.20 €	1.60 €

Koliko će Ana i Mea platiti voće koje žele u svakoj od tih dviju trgovina?

3. Neka je $A \in M_{mn}$. Neka je S_n posljednji stupac od A , R_1 prvi redak od A , te C matrica tipa $(m, 1)$ kojoj je na i -tom mjestu aritmetička sredina elemenata i -tog retka od A . Mogu li se matrice S_n , R_1 i C prikazati kao produkt dvije matrice tako da je A jedna od njih? Ako da, nađite te prikaze.
4. Iva govori francuski i njemački, Tin engleski, francuski i talijanski, Filip engleski, talijanski i španjolski, a Sara sve navedene jezike osim francuskog. Napišite matricu $A = [a_{ij}]$ tako da retci predstavljaju studente, a stupci jezike: $a_{ij} = 1$ ako osoba i govori jezik j , u suprotnom je $a_{ij} = 0$. Interpretirajte značenje matrica AA^T i $A^T A$.
5. Jesu li sljedeće tvrdnje istinite za $n \geq 2$? Tvrdnje koje su istinite dokažite, a za ostale nađite kontraprimjer.
- (a) Ako $A \in M_n$ matrica takva da je matrica $A^2 + 2A$ regularna, tada je A također regularna.
 - (b) Ako je $A \in M_n$ matrica takva da je matrica $A^2 + 2A = 0$, tada je A singularna.
 - (c) Ako $A \in M_n$ matrica takva da je matrica $A^3 + 2A = I$, tada je A regularna.
 - (d) Ako su $A, B \in M_n$ regularne matrice, tada je i AB regularna.
 - (e) Ako su $A, B \in M_n$ matrice takve da je AB regularna matrica, tada su obje matrice A i B regularne.
 - (f) Ako je $A \in M_n$ regularna matrica takva da je $A^2 = A$, tada je $A = I$.
 - (g) Ako je $A \in M_n$ matrica takva da je $A^2 = A$, tada je $A = 0$ ili $A = I$.
 - (h) Ako za matricu $A \in M_n$ postoji matrica $B \in M_n$ takva da je $AB = I$, tada je $B = A^{-1}$.
 - (i) Ako su A i B regularne matrice takve da je $A + B$ regularna matrica, tada vrijedi $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
 - (j) Primjena elementarnih transformacija nad redcima i stupcima matrice ne mijenja njenu regularnost/singularnost.
6. Navedite metode za invertiranje matrica koje poznajete.

7. Neka su $A, B, X \in M_n$ regularne matrice za koje vrijedi $A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^2)^3$. Izrazite X pomoću A i B .
8. Matrici A je $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ baza za prostor razapet njenim retcima, dok je $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \end{bmatrix}^T$ baza za prostor razapet njenim stupcima. Odredite neku takvu matricu A .
9. U ovisnosti o parametru λ odredite rang matrice A ako je

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4-\lambda & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

10. Neka je zadan sustav linearnih jednadžbi $AX = B$. Prisjetite se tvrdnji koje, u ovisnosti o rangu matrice i proširene matrice sustava, opisuju kada sustav ima jedinstveno rješenje, kada nema rješenja te kada ima beskonačno mnogo rješenja.
11. Neka je $A \in M_{mn}$ matrica ranga n . Dokažite da postoji jedinstvena matrica $B \in M_{nm}$ takva da je $AB = I$. Vrijedi li i $BA = I$?
12. Neka je $A \in M_{mn}$ matrica ranga m . Dokažite da postoji jedinstvena matrica $B \in M_{nm}$ takva da je $BA = I$. Vrijedi li i $AB = I$?