VJEROJATNOST I STATISTIKA

Prvi kolokvij – 29. travnja 2024.

Zadatak 1. (8 bodova)

(a) Definirajte precizno uvjetnu vjerojatnost.

(b) Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Dokažite da su slijedeće tvrdnje ekvivalentne: (i) A, B su nezavisni; (ii) $P(A|B) = P(A)$; (iii) $P(B|A) = P(B)$.

(c) Neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da $P(B) \neq 0$. Definiramo $P_B : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ s $P_B(A) = P(A|B)$. Dokažite da je P_B vjerojatnost, te da je $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ vjerojatnosni prostor.

Rješenje. Skripte ili bilješke s predavanja.

VJEROJATNOST I STATISTIKA

Prvi kolokvij – 29. travnja 2024.

Zadatak 2. (7 bodova) Luka voli životinje i ima puno kućnih ljubimaca: dvije mačke, dva psa, dva zeca i dvije kornjače. Poželio ih je sve fotografirati zajedno. Ako se životinje na slučajan način rasporede u liniju, koja je vjerojatnost da barem jedan par životinja iste vrste ne stoji jedan pored drugoga?

Rješenje. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\text{svi mogući rasporedi 8 ljubimaca u jednu liniju}\}$ i stoga je veličina tog skupa $k(\Omega) = 8!$. Budući da su svi rasporedi jednako vjerojatni, nalazimo se u Laplaceovom modelu. Zanima nas vjerojatnost događaja

$$A = \{\text{barem jedan par životinja iste vrste ne stoji jedan pored drugoga}\}.$$

Promotrimo komplement tog događaja

$$A^c = \{\text{svaka životinja stoji pored životinje svoje vrste}\}.$$

Odnosno, možemo upariti životinje iste vrste (budući da one moraju stajati zajedno) pa imamo 4 para koja možemo rasporediti u liniju u bilo kojem poretku. To možemo napraviti na 4! načina. Dodatno, unutar svake pojedine vrste možemo životinje razmjestiti na 2 različita načina. Tako dobivamo

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{k(A)}{k(\Omega)} = 1 - \frac{4! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{8!} = 1 - \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 5} = 1 - \frac{1}{105} = \frac{104}{105}.$$

VJEROJATNOST I STATISTIKA

Prvi kolokvij – 29. travnja 2024.

Zadatak 3. (7 bodova) Karla, Nika i Dora su odlučile sudjelovati u humanitarnoj utrci. Svaka od njih će istrčati neki slučajan broj kilometara. Dora je u najboljoj formi i ona može istrčati između 0 km i 25 km. Karla će istrčati maksimalno 15 kilometara, a Nika neki slučajan broj kilometara između 0 i 10. Odredite prostor elementarnih događaja te izračunajte kolika je vjerojatnost da Karla istrči barem pet puta više kilometara nego Nika, a Dora manje od 20 km?

Rješenje. Prostor elementarnih događaja je

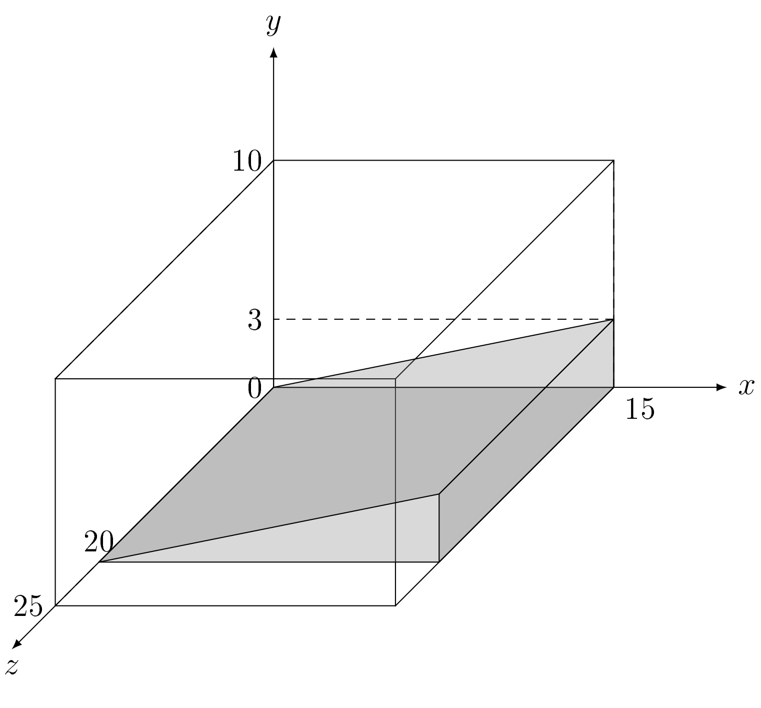
$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in [0, 15], y \in [0, 10], z \in [0, 25]\} = [0, 15] \times [0, 10] \times [0, 25],$$

gdje x označava broj kilometara koje je prešla Karla, y broj kilometara koje je prešla Nika, a z broj kilometara koje je prešla Dora. Njegov volumen je jednak $\lambda(\Omega) = 15 \cdot 10 \cdot 25$. Tražimo vjerojatnost događaja

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \Omega : y \leq \frac{1}{5}x,\ z \leq 20 \right\}.$$

Sada računamo (vidi skicu)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{15\cdot 3\cdot 25 - 15\cdot 3\cdot 5}{2}}{15 \cdot 10 \cdot 25} = \frac{3}{25}.$$



VJEROJATNOST I STATISTIKA

Prvi kolokvij – 29. travnja 2024.

Zadatak 4. (10 bodova)

(a) Neki aerodrom ima problem sa pticama. Ako je vrijeme suho, vjerojatnost da su ptice na pisti je 0.4. Ako pada kiša ta vjerojatnost je 0.2, a ako pada snijeg, vjerojatnost je 0.1. Vjerojatnosti da će biti suho, kišno ili da će sniježiti su 0.6, 0.3 i 0.1 redom.

(a1) (1 bod) Koja je vjerojatnost da ptice nisu na pisti ako je vani suho vrijeme?

Ako znamo da su ptice na pisti, izračunajte vjerojatnost:

(a2) (5 bodova) da je sunčano,

(a3) (1 bod) da ima padalina (kiša ili snijeg)?

(b) Ako ima ptica na pisti, avion uspješno polijeće s vjerojatnosti 0.9. Ako nema ptica na pisti, avion sigurno uspješno polijeće.

(b1) (3 boda) Koja je vjerojatnost da će avion uspješno poletjeti?

Rješenje. Definiramo potpun sistem događaja

$$H_1 = \{\text{Vrijeme je suho}\}$$
$$H_2 = \{\text{Pada kiša}\}$$
$$H_3 = \{\text{Pada snijeg}\}$$

i događaj $A = \{\text{Ptice su na pisti}\}$.
Znamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= 0.6, & \mathbb{P}(A|H_1) &= 0.4 \\ \mathbb{P}(H_2) &= 0.3, & \mathbb{P}(A|H_2) &= 0.2 \\ \mathbb{P}(H_3) &= 0.1, & \mathbb{P}(A|H_3) &= 0.1 \end{aligned}$$

(a1) S obzirom da je za fiksni G funkcija $C \mapsto \mathbb{P}(C|G)$ ponovno vjerojatnost (napomena s vježbi), vrijedi

$$\mathbb{P}(A^c|H_1) = 1 - \mathbb{P}(A|H_1) = 1 - 0.4 = 0.6$$

(a2) iz Bayesove formule dobijemo

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.4 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.1} = \frac{24}{31}$$

(a3) Zanima nas događaj $H_2 \cup H_3 = H_1^c$ (jer H_1, H_2, H_3 čine potpun sistem događaja). Slično kao u (a1),

$$\mathbb{P}(H_1^c|A) = 1 - \mathbb{P}(H_1|A) = 1 - \frac{24}{31} = \frac{7}{31}.$$

(b1) Označimo događaj $B = \{\text{Avion je uspješno poletio}\}$. Zanima nas $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) = 0.9 \cdot \mathbb{P}(A) + 1 \cdot \mathbb{P}(A^c) = 1 - 0.1 \cdot \mathbb{P}(A) = 1 - 0.1 \cdot 0.31 = 0.969$$

pri čemu je gore izračunato $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k) = 0.31$

VJEROJATNOST I STATISTIKA

Prvi kolokvij – 29. travnja 2024.

Zadatak 5. (8 bodova) Matematičarka Nives posjeduje 36 pari cipela u plavoj, crnoj ili bijeloj boji. Da bi spremila te cipele posjeduje tri ormara, također plavi, crni i bijeli, takve da u svaki stane točno 12 pari cipela. U plavom ormaru se nalaze dva para plavih i deset pari crnih cipela, u crnom samo plave, a u bijelom jednaki broj plavih, crnih i bijelih cipela. Nives svako jutro nasumično odabire ormar iz kojeg će odabrati cipele, s time da ima preferencu prema određenim ormarima, tj. vjerojatnost da će odabrati ormar plave boje je $\frac{1}{3}$, crne $\frac{1}{6}$ i bijele $\frac{1}{2}$. Kada odabere ormar, nasumično odabire jedan par cipela pri čemu svaki par cipela unutar odabranog ormara bira s jednakom vjerojatnosti. Odredite vjerojatnost da je Nives odabrala plave cipele.

Rješenje.

Raspored cipela po bojama i ormarima je sljedeći:

Ormar	Plava	Crna	Bijela
Plavi	2	10	0
Crni	12	0	0
Bijeli	4	4	4

Označimo događaje

$$H_1 = \{\text{Nives je odabrala plavi ormar}\}$$
$$H_2 = \{\text{Nives je odabrala crni ormar}\}$$
$$H_2 = \{\text{Nives je odabrala bijeli ormar}\}$$

Vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{2}$$

te, ako označimo $P = \{\text{Nives je odabrala plave cipele}\}$

$$\mathbb{P}(P|H_1) = \frac{2}{12} \qquad \mathbb{P}(P|H_2) = \frac{12}{12} \qquad \mathbb{P}(P|H_3) = \frac{4}{12}$$

Koristimo formulu potpune vjerojatnost da bismo dobili

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(P|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(P|H_3)\mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$