VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 1. (*13 bodova*)

(a) (*5 bodova*) Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ proizvoljan vjerojatnosni prostor, iskažite i dokažite svojstvo *konačne subaditivnosti* vjerojatnosti $\mathbb{P}$ za događaje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. *Napomena:* Ne možete se jednostavno pozvati na svojstvo σ-subaditivnosti od $\mathbb{P}$.

(b) (*5 bodova*) Promatramo $n \geq 2$ osoba i okrugli stol oko kojeg se nalazi n stolica, pri čemu su stolice redom označene brojevima $1, 2, \dots, n$. Osobe jedna za drugom sjedaju za stol pri čemu svaka osoba slučajno bira s jednakom vjerojatnosti bilo koju od preostalih slobodnih stolica. Ako je

$$A_i := \{i\text{-ta osoba je sjela na } i\text{-tu ili neku od dvije susjedne stolice}\}\,, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

Odredite $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_n)$ i $\mathbb{P}(A_n \cap A_1)$.

(d) (*3 boda*) Neka je (V, E) potpun neusmjeren graf s $n \geq 2$ vrhova; to znači da su svaka dva vrha spojena bridom, tj. za sve $i, j \in V$, $i \neq j$, imamo $\{i, j\} \in E$. Svaki vrh, nezavisno od ostalih, obojamo u plavo s vjerojatnošću p, odnosno crveno s vjerojatnošću $q := 1 - p$, pri čemu je $p \in (0, 1)$. Odredite očekivani broj bridova koji spajaju vrhove različitih boja. *Napomena:* Ukupan broj bridova je $|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Rješenje.

(a) Svojstvo konačne subaditivnosti kaže da vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$, a to se može dokazati npr. koristeći indikatore. Ako je $A := \cup_{i=1}^n A_i$, vrijedi

$$1_A \leq \sum_{i=1}^n 1_{A_i}\,,$$

jer za $\omega \notin A$, $1_A(\omega) = 0$ pa nejednakost očito vrijedi, a ako je $\omega \in A$, tj. $\omega \in A_j$ za neki $j \in \{1, \dots, n\}$, imamo

$$\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega) \geq 1_{A_j}(\omega) = 1 = 1_A(\omega)\,.$$

Sada iz monotonosti i linearnosti očekivanja slijedi

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{E}\,[1_{\cup_{i=1}^n A_i}] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,[1_{A_i}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\,.$$

(b) Očito je $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{n}$. Što se tiče $\mathbb{P}(A_n)$, ako promatramo samo stolicu na koju je sjela n-ta osoba, zbog simetrije to s jednakom vjerojatnosti može biti bilo koja od n stolica. Dakle, odgovor je opet $\mathbb{P}(A_n) = \frac{3}{n}$. Slično, za $\mathbb{P}(A_n \cap A_1)$ dovoljno je gledati uređeni par stolica na koje su sjeli prva i n-ta osoba. Budući da su prva i n-ta stolica susjedne, uređenih parova koji su povoljni za $A_1 \cap A_n$ postoji $3^2 - 2 = 7$ (ne smiju obje osobe sjesti na stolicu 1 ili n), pa je

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_1) = \frac{7}{n(n-1)}\,.$$

(c) Za proizvoljan brid $e \in E$, definiramo $A_e := \{\text{brid } e \text{ spaja vrhove različitih boja}\}$. Budući da A_e ovisi samo o boji vrhova koje spaja brid e, imamo da je $\mathbb{P}(A_e) = pq + qp = 2pq$. Iz linearnosti očekivanja dobivamo da je traženo očekivanje

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e\in E} 1_{A_e}\right] = \sum_{e\in E} \mathbb{P}(A_e) = \binom{n}{2} 2pq = n(n-1)pq\,.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 2. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte pojam nezavisnosti familije događaja na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) (b1) (*4 boda*) Iskažite Borel-Cantellijeve leme te dokažite jednu od njih.

(b2) (*3 boda*) Za niz događaja $(A_n)_n$ definiramo

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{i} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Navedite primjer niza događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ te primjer niza događaja $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi $\liminf_{n\to\infty} B_n \subsetneq \limsup_{n\to\infty} B_n$.

(c) (*3 boda*) Student putuje iz studentskog doma na kolokvij iz Vjerojatnosti. S vjerojatnošću 25% je zaboravio noć prije staviti mobitel na punjenje te mu se ne oglašava alarm i probudi se prekasno. U tom slučaju zove taksi koji zbog jutarnje gužve kasni s vjerojatnošću 20%. S druge strane, ako se student probudi na vrijeme, ide na tramvaj, no i u tom slučaju zbog jutarnje gužve kasni s vjerojatnošću 60%. Ako je student stigao na kolokvij na vrijeme, odredite vjerojatnost da se i probudio na vrijeme.

Rješenje.

a) Vidi bilješke s predavanja, Definicija 3.16.

b) b1) Vidi bilješke s predavanja, Leme 2.21. i 2.22.

b2) Npr. $\Omega = \{1, 2\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, za prvi dio uzmemo $A_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, za drugi

$$B_n = \begin{cases} \{1\}, & n \text{ neparan} \\ \{2\}, & n \text{ paran} \end{cases}$$

c) Definiramo $A = \{\text{student stigao na vrijeme}\}$, $H_1 = \{\text{student zaspao}\}$, $H_2 = H_1^c$. Imamo $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.8$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.4$, $\mathbb{P}(H_1) = 0.25$ i $\mathbb{P}(H_2) = 0.75$. Koristeći Bayesov teorem je

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} \implies \mathbb{P}(H_2|A) = \frac{3}{5}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 3. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s tablicom razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Precizno definirajte pojam *matematičkog očekivanja* slučajne varijable X.

(b) (*2 boda*) Tablica razdiobe slučajne varijable X dana je s

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & \pi & 3\pi/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Izračunajte $\mathbb{E}[\cos(X)]$ i $\mathrm{Var}[\cos(X)]$.

(c) Bacamo simetričnu igraću kocku.

(c1) (*3 boda*) Neka je X slučajni broj šestica u 30 bacanja. Izračunajte $\mathbb{E}[X]$.

(c2) (*3 boda*) Neka je Y slučajni broj bacanja potrebnih da bi se dobilo 5 šestica. Izračunajte $\mathbb{E}[Y]$.

(d) (*3 boda*) Prva kutija sadrži 35 kuglica, druga kutija 40 kuglica, a treća kutija 45 kuglica. Na slučajan način izabrana je jedna od 120 kuglica (sve kuglice su jednako vjerojatne). Neka X označava broj kuglica u kutiji (prije izvlačenja) u kojoj se nalazila ta slučajno odabrana kuglica. Nađite $\mathbb{E}[X]$.

Rješenje.

(a) Vidi bilješke s predavanja, Definicija 3.16.

(b) Po Teoremu 3.23, za funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i \in I} g(a_i) p_i = \sum_{k=0}^{3} g(k\pi/2)/4.$$

Za $g(x) = \cos x$ dobivamo

$$\mathbb{E}[\cos(X)] = \sum_{k=0}^{3} \cos(k\pi/2)/4 = 0.$$

Slijedi da je

$$\mathrm{Var}[\cos(X)] = \mathbb{E}\left[(\cos X)^2\right] = \sum_{k=0}^{3} \cos^2(k\pi/2)/4 = 1/2.$$

Alternativno, tablica razdiobe slučajne varijable $\cos(X)$ je

$$\cos(X) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

otkud očekivanje i varijancu računamo po definiciji.

(c) Varijabla X ima $\mathrm{B}(30, 1/6)$ razdiobu, pa je $\mathbb{E}[X] = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$. Varijabla Y ima istu distribuciju kao suma 5 (nezavisnih) geometrijskih slučajnih varijabli s parametrom $1/6$, pa je zbog linearnosti očekivanja $\mathbb{E}[Y] = 5 \cdot \frac{1}{1/6} = 30$.

(d) Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu $\{35, 40, 45\}$, a pripadajuće vjerojatnosti su

$$\mathbb{P}(X = 35) = \frac{35}{120}, \quad \mathbb{P}(X = 40) = \frac{40}{120}, \quad \mathbb{P}(X = 45) = \frac{45}{120}.$$

Zato je

$$\mathbb{E}(X) = 35\frac{35}{120} + 40\frac{40}{120} + 45\frac{45}{120} = \frac{1225 + 1600 + 2025}{120} = \frac{4850}{120} = \frac{485}{12} \approx 40,41667$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 4. (*12 bodova*)

(a) (*3 boda*) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$, dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 \cdots X_n\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right].$$

(b) (*2 boda*) Ako su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu \in \mathbb{R}$ te $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 2\sigma^2.$$

(c) (*4 boda*) Definirajte kada kažemo da slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$, te izvedite $\mathbb{E}[X \mid X \geq 1]$ u tom slučaju.

(d) (*3 boda*) Neka su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima 10 i 20, redom. Za svaki $n \geq 1$, odredite distribuciju slučajne varijable X uvjetno na $X + Y = n$. *Napomena:* Možete se pozvati na rezultat o distribuciji slučajne varijable $X + Y$ pod ovim pretpostavkama.

Rješenje.

(a) Predavanja.

(b) Iz linearnosti očekivanja imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] &= \mathbb{E}\left[((X-\mu)-(Y-\mu))^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mu)^2\right] - 2\mathbb{E}\left[(X-\mu)(Y=\mu)\right] \\
&= \left[\mu = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y],\ X-\mu \text{ i } Y-\mu \text{ nezavisne}\right] \\
&= \underbrace{\mathrm{Var}(X)}_{=\sigma^2} + \underbrace{\mathrm{Var}(Y)}_{=\sigma^2} - 2\underbrace{\mathbb{E}[X-\mu]}_{=0}\underbrace{\mathbb{E}[Y-\mu]}_{=0} = 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

(c) Varijabla X ima $\mathrm{P}(\lambda)$ razdiobu ako vrijedi $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Uvjetno na $X \geq 1$, X poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$, te ima distribuciju

$$\mathbb{P}(X=k \mid X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X=k \mid X \geq 1)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)}{1-\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, \quad k \geq 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid X \geq 1] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k \mid X \geq 1) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=e^{\lambda}} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

(d) Direktnim računanjem uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n)$, za $k = 0, \ldots, n$, se pokaže da X uvjetno na $X+Y=n$ ima binomnu razdiobu s parametrima n i $p = \frac{10}{10+20} = \frac{1}{3}$.