1	2	3	Σ

Ime i prezime: ____________________________

ALG. STRUKTURE

2. kratki test, 17. 01. 2025.

1. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih 3×3 kompleksnih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Je li $\mathcal{S}$, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica, prsten s jedinicom? Ako da, je li to komutativan prsten?

   Rješenje Dovoljno je dokazati da je $\mathcal{S}$ potprsten prstena $M_2(\mathbb{C})$. Za $\forall x, y \in \mathcal{S}$ vrijedi

   (0.5) bodova $x - y \in \mathcal{S}$; zaista, neka je $x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$; tada je $x - y = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ 0 & a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}$; očito je $I \in \mathcal{S}$.
   (0.5) bodova Uz iste oznake je
   $x \cdot y = \begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 \end{bmatrix} = y \cdot x$(provjera; **(0.5) bodova**)

2. Definiramo podskup $\mathcal{A}$ polja $\mathbb{R}$ na sljedeći način

$$\mathcal{A} = \left\{ a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}, 6|a,\ 6|b \right\}.$$

   Je li $\mathcal{A}$ ideal u prstenu $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +, \cdot)$? Ako jest, je li maksimalan?

   Rješenje Uočimo da je za $x = a + b\sqrt{7},\ y = c + d\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ispunjeno : $xy = (ac + 7bd) + (ad + bc)\sqrt{7}$.
   (0.5) bodova Za $x, y \in \mathcal{A}$, uz gornje oznake, uvedimo $a = 6a_1, b = 6b_1, c = 6c_1, d = 6d_1$ za neke cijele brojeve a_1, b_1, c_1, d_1. Tada je $x - y = 6(a_1 - c_1) + 6(b_1 - c_1)\sqrt{7} \in \mathcal{A}$, a $xy = 36(a_1c_1 + 7b_1d_1) + 36(a_1d_1 + b_1c_1)\sqrt{7} \in \mathcal{A}$ te je $\mathcal{A}$ potprsten od $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
   (0.5) bodova S druge strane, ako je $x = a + b\sqrt{7} = 6a_1 + 6b_1\sqrt{7} \in \mathcal{A}$ a $y = c + d\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, onda vrijedi $xy = 6(a_1c + 7b_1d) + 6(a_1d + b_1c)\sqrt{7} \in \mathcal{A}$ te je $\mathcal{A}$ uistinu ideal u $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
   (0.5) bodova Pogledajmo

$$\mathcal{B} = \left\{ a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}, 3|a,\ 3|b \right\}.$$

   Analogno odmah slijedi da je $\mathcal{B}$ također pravi ideal u $\mathbb{Z}$ i strogo sadrži $\mathcal{A}$, pa onda $\mathcal{A}$ nije maksimalan. Postoje i drugačiji dokazi ove činjenice: npr. $6 \in \mathcal{A}$ ali $6 = 2 \cdot 3$, i $2 \notin \mathcal{A}$ i $3 \notin \mathcal{A}$, te, znači, $\mathcal{A}$ nije prost ideal, pa posljedično, nije maksimalan.

3. Postoji li neki netrivijalan (tj. različit od nul-homomorfizma) homomorfizam iz prstena $3\mathbb{Z}$ u prsten $5\mathbb{Z}$ (sa standardnim operacijama naslijeđenim iz $\mathbb{Z}$)?

Rješenje (2 boda): Pretpostavimo da takav homomorfizam $f : 3\mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$ postoji . Neka je $f(3) = 5k_1$, za neki $k_1 \in \mathbb{Z}$; kako pretpostavljamo netrivijalnost, $k_1 \neq 0$. Tada je $f(9) = f(3+3+3) = 15k_1 = f(3 \cdot 3) = 25k_1^2$, te mora biti $15k_1 = 25k_1^2$ što vodi na $k_1 = 0$ ili $k_1 = 3/5$; kontradikcija.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite; s tim da se možete pozivati na teoreme, propozicije, leme i korolare koji su dokazani bilo na predavanjima ili na vježbama, ali iste treba pritom precizno iskazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!