ALG. STRUKTURE, Rješenja

Drugi kolokvij , 31. 01. 2025.

1. *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ definiramo R_m kao skup svih matrica oblika $\begin{pmatrix} a & -mb \\ b & a \end{pmatrix}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Odredite sve vrijednosti m takve da je R_m, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica, komutativan prsten s jedinicom. Ako neki takvi postoje, odredite sve vrijednosti m takve da je R_m štoviše polje.*

   Rješenje. **(3 boda)** Neka su $A = \begin{pmatrix} a & -mb \\ b & a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & -my \\ y & x \end{pmatrix}$ iz R_m. Očito je $A - B \in R_m$, te isto tako imamo

$$AB = \begin{pmatrix} ax - mby & -m(ay + bx) \\ bx + ay & -mby + ax \end{pmatrix} \in R_m.$$

   Slijedi da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ skup R_m potprsten od $M_2(\mathbb{R})$.

   (1+1 bod) Provjeri se da za A i B kao gore imamo $AB = BA$; tj., svaki R_m je komutativan prsten. Nadalje, očito je matrica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R_m$, za svaki m; tj., svaki R_m je komut. prsten s jedinicom.

   (3 boda) Za nenul matricu $A \in R_m$ je $\det A = a^2 + mb^2 > 0$, i onda je inverz te matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & mb \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -m\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in R_m,$$

   gdje smo gore stavili $\alpha = a/\det A$ i $\beta = -b/\det A$. Znači da je svaki nenul element iz R_m invertibilan; tj., za svaki $m \in \mathbb{N}$ je R_m polje.

---

2. *Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i onda definiramo preslikavanje $\phi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s*

$$\phi(a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k) := (\overline{a_0} + \overline{a_1} + \cdots + \overline{a_k}, a_0).$$

   (Standardno, za $z \in \mathbb{Z}$ je $\overline{z} = z + n\mathbb{Z}$.) Je li ϕ homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da utvrdite je li ϕ monomorfizam i je li epimorfizam.

   Rješenje. **(3 boda)** Prvo primijetimo da je ϕ zapravo definiran tako da za svaki $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k \in \mathbb{Z}[X]$ stavimo $\phi(f) = \left(\overline{f(1)}, f(0)\right)$. Sada, za $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ imamo

$$\phi(fg) = \left(\overline{(fg)(1)}, (fg)(0)\right) = \left(\overline{f(1)g(1)}, f(0)g(0)\right) = \left(\overline{f(1)}, f(0)\right)\left(\overline{g(1)}, g(0)\right) = \phi(f)\phi(g),$$

   gdje smo gore koristili definicije množenja u kvoc. prstenu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i množenja u dir. produktu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Analogno imamo i da je $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$, i zato je ϕ homomorfizam prstena. Kako je i $\phi(1_{\mathbb{Z}[X]}) = (\overline{1}, 1)$, slijedi da je to homo. prstena s jedinicom.

   (2 boda) Homomorfizam ϕ nije monomorfizam, jer npr. za nenul polinom $k(X) = nX$ imamo da je $k \in \ker \phi$, a znamo da je neki homomorfizam monomorfizaam ako i samo ako mu je u jezgri samo nula prstena koji je domena (tj. jezgra je trivijalna).

   (3 boda) Tvrdimo da je ϕ epimorfizam. Kako su $(\overline{1}, 0)$ i $(\overline{0}, 1)$ očito generatori kodomene $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dovoljno je vidjeti da se ti generatori "pogode" po homomorfizmu ϕ. Ali npr. imamo da je $\phi(X) = (\overline{1}, 0)$ te $\phi(1 + (n-1)X) = (\overline{0}, 1)$.

---

3. *Nađite neki polinom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ koji je najmanjeg mogućeg stupnja i takav je da zadovoljava sustav kongruencija*

$$\begin{cases} f(X) \equiv X \pmod{(X-2)} \\ f(X) \equiv X^2 \pmod{(X^2-2X-3)} \end{cases}$$

Je li glavni ideal u prstenu $\mathbb{R}[X]$ koji je generiran polinomom $f(X)$ prost ideal?

Rješenje. **(1 bod)** Za $g_1 = X - 2$ i $g_2 = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$ su glavni ideali $I_1 = (g_1)$ i $I_2 = (g_2)$ relativno prosti jer je npr. $Xg_1 - g_2 = -3$ i glavni ideal $(-3) = \mathbb{R}[X]$.

(5 bod.) Potražimo f u obliku $f(X) = a + bX + cX^2$; tj., f je kvadratni polinom. Tada iz prve kongruencije imamo

$$f(X) - X = a + (b-1)X + cX^2 \equiv 0 \pmod{I_1};$$

tj., $f(X) - X$ ima $X = 2$ kao nultočku pa slijedi:

$$a + 2b - 2 + 4c = 0. \qquad (\star)$$

Zatim iz druge kongruencije imamo

$$f(X) - X^2 = a + bX + (c-1)X^2 \equiv 0 \pmod{I_2};$$

tj., $f(X) - X^2$ ima $X = 3$ i $X = -1$ kao nultočke pa slijedi:

$$a + 3b + 9c - 9 = 0 \quad \text{i} \quad a = b + 1 - c. \qquad (\star\star)$$

Lako riješimo sustav određen s $(\star)$ i $(\star\star)$, i dobivamo $c = 5/3$, $b = -4/3$ i $a = -2$. Slijedi da je

$$f(X) = -2 - \frac{4}{3}X + \frac{5}{3}X^2 = \frac{1}{3}(5X^2 - 4X - 6).$$

Jasno da je taj polinom f rješenje danog sustava koji ima najmanji mogući stupanj.

(2 boda) Definirajmo polinom $h(X) = 3f(X) = 5X^2 - 4X - 6$ i glavni ideal $J = (h)$. (Jasno, $J = (f)$.) Kako je diskriminanta polinoma $h(X)$ pozitivna, taj polinom ima dvije (različite) realne nultočke i zato je on reducibilan; tj., oblika je $h(X) = (X - r_1)(X - r_2)$, za realne brojeve r_1 i r_2 (koji se, jasno, mogu precizno izračunati no to nam ne treba). Zaključujemo: J nije prost ideal.

---

4. *U prstenu cjelobrojnih polinoma $A = \mathbb{Z}[X]$ definiramo $I \trianglelefteq A$ kao ideal generiran polinomima $f_1(X) = 5$ i $f_2(X) = 3X$. Je li I maksimalan ideal u A? Pokažite da je kvocijentni prsten A/I integralna domena.*

Rješenje. **(6 bod.)** Tvrdimo: I je maks. ideal u A. Primijetimo prvo da je $2 \cdot 3X - X \cdot 5 = X \in I$; tj., $I = (5, X)$. Sada pretpostavimo da imamo ideal $I \subset J \trianglelefteq A$ i neka je $h \in J \setminus I$ proizvoljan. Napišimo $h(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_kX^k$. Jer su svi monomi $c_iX^i \in I$, za $i \in \{1, \ldots, k\}$, zaključujemo da $c_0 \notin I$; tj., BSO možemo uzeti $h(X) = c_0$. Posebno 5 NE dijeli c_0. Ali onda postoje neki $a, b \in \mathbb{Z}$ t.d. je $a \cdot 5 + b \cdot c_0 = 1$, i zato očito imamo $1 \in J$. No onda je $J = A$; i kao posljedicu dobivamo da je I maksimalan ideal.

(2 boda) Po teoremu s predavanja znamo da je I maks. ideal ako i samo ako je A/I polje. Znači, A/I je polje, pa je posebno i integralna domena.

---

5. *Neka je dan komutativan prsten s jedinicom R sa svojstvom da ima jedinstveni prost ideal. Pokažite da je tada svaki element iz R ili invertibilan ili nilpotentan.*
Uputa: pretpostavite suprotno, tj., da postoji element a koji nije niti invertibilan niti nilpotentan, i pogledajte skup svih ideala koji ne sadrže niti jednu potenciju od a.

Rješenje. **(8 bodova)** Pretpostavimo da je a element koji nije niti invertibilan niti nilpotentan. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih ideala koji ne sadrže niti jednu potenciju od a; to je neprazan skup jer sadrži nul-ideal (a nije nilpotentan). Taj skup je parcijalno uređen skup uz uređaj dan inkluzijom; Zornova lema (slično dokazu postojanja maksimalnog ideala napravljenom na predavanjima) daje postojanje maksimalnog ideala u tom skupu ideala; nazovimo ga M_0. Dokazat ćemo da je M_0 prost. Pretpostavimo suprotno, neka je $xy \in M_0$; pretpostavimo da niti x niti y nisu u M_0; tada niti $(x) + M_0$ niti $(y) + M_0$ nisu u $\mathcal{A}$ (maksimalnost od M_0) pa sadrže potencije a^k i a^l respektivno (slično kao u gorespomenuntom teoremu s predavanja). Dakle, postoje $\alpha, \beta \in R$ i $m_1, m_2 \in M_0$ takvi da je $a^k = \alpha x + m_1$ i $a^l = \beta y + m_2$. Kada izmnožimo ove dvije relacije dobivamo da je a^{k+l} u M_0, kontradikcija. Dakle, M_0 je prost ideal; ali prema uvjetu zadatka postoji jedinstven prost ideal u prstenu R, pa je M_0 taj ideal, ali mora postojati i maksimalni ideal u prstenu R (jer je to prsten s jedinicom) koji nužno prost, dakle M_0 je i (onda jedinstveni) maksimalan ideal, stoga mora sadržavati a (jer a nije invertibilan); kontradikcija.

Napomena. Kako bi se u svakom pojedinom zadatku dobili bodovi po dijelovima, kako je navedeno, treba jasno, precizno i nedvosmisleno navesti sve relevantne podatke i/ili tvrdnje.

Jasno, svako drugačije rješavanje pojedinog zadatka bit će adekvatno bodovano.