VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 1. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Definirajte pojam (apsolutno) neprekidnog slučajnog vektora (X, Y).

(b) Dva prijatelja su se dogovorili naći na Trgu bana Jelačića između 10 i 11 sati. Dolazak svakog od njih je slučajan i uniformno distribuiran u periodu od 10 do 11 sati, te su dolasci nezavisni.

  (b1) (*3 boda*) Nađite vjerojatnost da osoba koja dođe prva čeka više od 10 minuta do dolaska druge osobe.

  (b2) (*3 boda*) Nađite očekivano vrijeme čekanja osobe koja prva dođe na sastanak.

(c) (*4 boda*) Neka je (X, Y) neprekidan slučajni vektor sa zajedničkom gustoćom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite uvjetnu gustoću slučajne varijable X uz dano $Y = y$, $y > 0$. Koliko je $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$?

Rješenje.

(a) Slučajni vektor (X, Y) je (apsolutno) neprekidan ako postoji funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ takva da je

$$\mathbb{P}(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)\, dy\, dx, \quad \text{za sve } a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) Neka X označava vrijeme dolaska prve osobe, a Y vrijeme dolaska druge osobe. Po pretpostavci su X i Y nezavisne slučajne varijable, uniformno distribuirane na $[10, 11]$. Zato je (X, Y) neprekidan slučajni vektor uniformno distribuiran na kvadratu $[10, 11] \times [10, 11]$. Dakle,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 10 \leq x \leq 11, 10 \leq y \leq 11, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

  (b1) Računamo vjerojatnost da prva osoba dođe prije druge i čeka više od 10 minuta. Budući daje 10 minuta jednako $1/6$ sata, traži se

$$\mathbb{P}(Y > X + 1/6) = \iint_{y > x + 1/6} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{10}^{10\frac{5}{6}} \int_{x+\frac{1}{6}}^{11} dy\, dx$$

$$= \int_{10}^{\frac{65}{6}} \left(11 - \frac{1}{6} - x\right) dx = \frac{65}{6} \times \frac{5}{6} - \frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{\frac{65}{6}}$$

$$= \frac{325}{36} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{65}{6}\right)^2 - 100\right) = \frac{325}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{4225}{36} - \frac{3600}{36}\right)$$

$$= \frac{650}{72} - \frac{1}{2} \times \frac{625}{36} = \frac{25}{72}.$$

Zbog simetrije očito vrijedi $\mathbb{P}(X > Y + 1/6) = \mathbb{P}(Y > X + 1/6)$, pa je tražena vjerojatnost jednaka $\frac{25}{36}$.

(b2) Traži se $\mathbb{E}\left(|X-Y|\right)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X-Y|\right) &= \iint_{\mathbb{R}^2} |x-y| f(x,y)\,dy\,dx = \int_{10}^{11}\int_{10}^{11} |x-y|\,dy\,dx \\ &= 2\int_{10}^{11}\int_{10}^{x}(x-y)\,dy\,dx = \{u = x-10, v = y-10\} \\ &= 2\int_0^1\int_0^u (u-v)\,dv\,du = 2\int_0^1 \frac{u^2}{2}\,du = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dakle, očekivano vrijeme čekanja je $1/3$ sata, odnosno 20 minuta.

Alternativno rješenje za (b1): Neka su X i Y vremena dolaska osoba mjerena u minutama nakon 10 sati. Tada su X i Y uniformno distribuirane na $[0,60]$ i nezavisne. Slijedi da je vektor (X,Y) uniformno distribuiran na kvadratu $[0,60]\times[0,60]$. Dakle, dolasci obje osobe predstavljaju slučajan (i uniforman) izbor točke u kvadratu $[0,60]\times[0,60]$. Prva osoba koja stigne čeka više od 10 minuta ako (i samo ako) su koordinate slučajne točke (X,Y) udaljene za više od 10: $|X-Y|>10$. Geometrijski to odgovara odabiru točke u osjenčanom dijelu kvadrata.

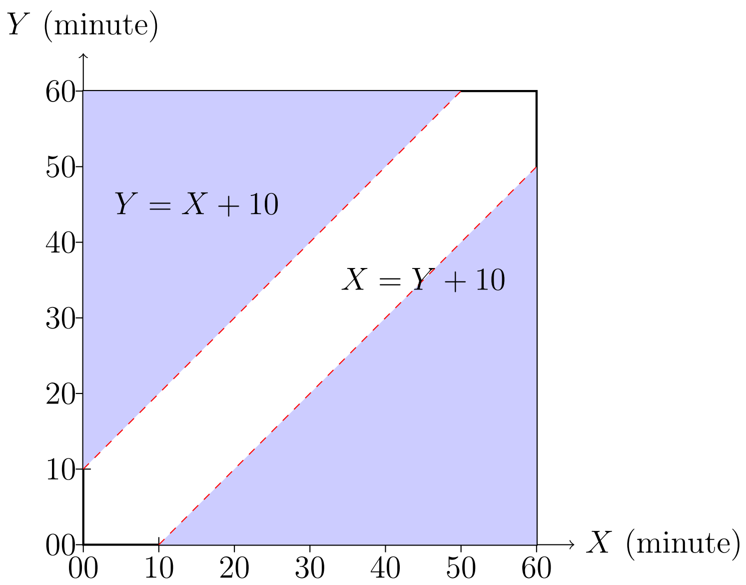

Figure 1: Vizualizacija područja $|X-Y|\geq 10$.

Površina svakog od dva trokuta je $50^2/2$, pa je površina osjenačanog područja jednaka $50^2 = 2500$. Površina kvadrata je 60^2, pa je zato tražena vjerojatnost jednaka

$$\mathbb{P}(|X-Y|>10) = \frac{2500}{3600} = \frac{25}{36}.$$

(c) Po definiciji je $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. Nadalje,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}\,dx = e^{-y}.$$

Slijedi

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}}{e^{-y}} = \frac{e^{-x/y}}{y}, \quad x>0.$$

Dakle, $X|Y=y \sim \text{Exp}(1/y)$, pa je zato $\mathbb{E}\left[X\,|\,Y=y\right] = y$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 2. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Definirajte konvergenciju po distribuciji niza slučajnih varijabli.

(b) (*2 boda*) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(c) (*5 bodova*) Dokažite centralni granični teorem uz dodatni uvjet da slučajne varijable imaju konačnu funkciju izvodnicu momenata.

(c) (*4 boda*) Broj studenata koji upisuje kolegij *Vjerojatnost* je Poissonova slučajna varijabla s očekivanjem 100. Ukoliko je broj upisanih studenata veći ili jednak od 120, kolegij će se održavati u dvije sekcije. Ukoliko je taj broj manji od 120, kolegij će se održavati u jednoj sekciji. Koristeći centralni granični teorem aproksimirajte vjerojatnost da će se kolegij održavati u dvije sekcije. Možete koristiti sljedeće vrijednosti: $\Phi(1.0) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2.0) = 0.977$, $\Phi(2.5) = 0.993$.

Rješenje.

(a) Vidi predavanja, Definicija 8.12

(b) Vidi predavanja, Teorem 8.14.

(c) Vidi predavanja, dokaz Teorema 8.14.

(d) Neka je X slučajni broj studenata koji upisuje kolegij. Po pretpostavci je $X \sim \text{Po}(100)$. Poznato je da je zbroj nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli ponovno Poissonova slučajna varijabla. Preciznije, ako su $(X_j)_{j=1}^{100}$ nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrom 1, tada $\sum_{j=1}^{100} X_j$ ima Poissonovu razdiobu s parametrom 100. Budući da je $\mathbb{E}\,X_j = \text{Var}X_j = 1$, po centralnom graničnom teoremu vrijedi da

$$\frac{X - 100}{\sqrt{100}} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 100}{10}$$

ima približno standardnu normalnu distribuciju.

Zato je

$$\mathbb{P}(X \geq 120) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 100}{10} > \frac{120 - 100}{10}\right) \approx \mathbb{P}(N(0,1) > 2)$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte funkciju izvodnicu momenata M_X proizvoljne slučajne varijable X.

(b) (*3 boda*) Dokažite: ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s pripadnim funkcijama izvodnicama momenata $M_{X_1}, \dots, M_{X_n}$, tada postoji neki $t_0 > 0$ za koji vrijedi

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

za sve $t \in [-t_0, t_0]$.

(c) (*3 boda*) Ako je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, odredite $\mathbb{E}\left[(X-\mu)^n\right]$ za sve $n \geq 1$.

(d) (*4 boda*) Kažemo da slučajna varijabla X ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode ($n \in \mathbb{N}$, oznaka $X \sim \chi^2(n)$) ako joj je funkcija izvodnica momenata jednaka

$$M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}, \quad \text{za } t < 1/2.$$

Neka su $X_1, \dots, X_k$ njd slučajne varijable sa $\mathrm{N}(0,1)$ distribucijom. Pokažite da za neki $n \in \mathbb{N}$, $H := X_1^2 + \cdots + X_k^2$ ima $\chi^2(n)$ razdiobu.

Rješenje.

(a) Vidi predavanja, Definicija 6.12

(b) Vidi predavanja, Teorem 6.18.

(c) Znamo da je funkcija izvodnica momenata za $Y = X - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dana s

$$M_Y(t) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Razvijmo eksponencijalnu funkciju u Taylorov red oko $t = 0$:

$$M_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{2^k k!} t^{2k}.$$

Koeficijent uz t^n u ovom razvoju jednak je $\mathbb{E}[Y^n]/n!$. Primijetimo da se u izrazu za $M_Y(t)$ pojavljuju samo potencije t^{2k}, što znači da su svi neparni momenti jednaki nuli. Za parne $n = 2m$, koeficijent uz t^{2m} u razvojnom redu je

$$\frac{\sigma^{2m}}{2^m m!}$$

što mora biti jednako

$$\frac{\mathbb{E}[Y^{2m}]}{(2m)!}.$$

Na koncu imamo

$$\mathbb{E}[Y^{2m}] = \frac{(2m)!}{2^m m!}\sigma^{2m} = \sigma^{2m}(2m-1)!!.$$

Dakle

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^n] = \begin{cases} 0, & \text{za neparni } n, \\ \sigma^n (n-1)!!, & \text{za parni } n. \end{cases}$$

(d) Funkcija izvodnica momenata za X_1^2 je definirana kao

$$M_{X_1^2}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Spajanjem eksponencijalnih izraza dobivamo

$$M_{X_1^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2-t)x^2}\, dx.$$

Kada bismo integrand podijelili s $\sqrt{\pi/(1/2-t)}$, dobili bismo upravo integral funkcije gustoće od $\mathcal{N}(0, 1/2-t)$. Stoga je

$$M_{X_1^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1/2-t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/2-t}} = (1-2t)^{-1/2}, \quad t < 1/2.$$

Koristeći nezavisnost varijabli $X_1, \ldots, X_k$, po (b) podzadatku vrijedi

$$M_H(t) = \mathbb{E}[e^{tH}] = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i^2}(t).$$

Kako su svi članovi jednaki, dobivamo

$$M_H(t) = (1-2t)^{-k/2}, \quad t < 1/2.$$

što je funkcija izvodnica momenata χ^2-distribucije s k stupnjeva slobode, pa slijedi

$$H \sim \chi^2(k).$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 4. (*13 bodova*)

(a) (*3 boda*) Kada kažemo da slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ (oznaka $X \sim \text{Exp}(\lambda)$)? Izvedite $\mathbb{E}[X]$ u tom slučaju.

(b) (*3 boda*) Neka je N slučajna varijabla u $\mathbb{N}_0$ takva da je $\mathbb{E}[N] < \infty$, te $X_1, X_2, \ldots$ niz nenegativnih njd slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu := \mathbb{E}[X_1] < \infty$ te varijancom $\sigma^2 := \text{Var}(X_1)$ koje su nezavisne od N. Ako je $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 0$ (uz $S_0 := 0$), ukoliko postoji, odredite $\text{Var}(S_N)$ u terminima $\mu, \sigma^2, \mathbb{E}[N]$ i $\text{Var}(N)$. *Napomena:* Ne morate dokazivati formulu za $\mathbb{E}[S_N]$.

(c) (*3 boda*) Mailovi stižu u vaš pretinac u slučajnim vremenima. Neka $T_n \in [0, \infty)$ označava vrijeme kada je stigao n-ti mail po redu (pri čemu vrijeme 0 predtavlja neki odabrani trenutak u vremenu), a prepostavka je da za vremena između mailova $E_1 := T_1, E_n := T_n - T_{n-1}$, $n \geq 2$, vrijedi da su njd sa $\text{Exp}(\lambda)$ razdiobom za $\lambda > 0$. Svaki mail nije spam s vjerojatnošću $p \in (0,1)$ (nezavisno od ostalih mailova i nezavisno od vremena $(E_n)_n$). Ako je X trenutak kada je stigao prvi mail koji nije spam, odredite $\mathbb{E}[X]$.

(d) (*4 boda*) Ako je $E \sim \text{Exp}(1)$, te $a, b > 0$ konstante, odredite funkciju distribucije te gustoću (neprekidne) slučajne varijable $X := \frac{E}{a} + b$. Nađite slučajnu varijablu Z takvu da X ima istu razdiobu kao i Z uvjetno na $Z > b$.

Rješenje.

(a) i (b) Predavanja/vježbe.

(c) Ako je $N \sim \text{G}(p)$ nezavisna od $E_1, E_2, \ldots$, X ima istu distribuciju kao $S_N := \sum_{i=1}^N E_i$, pa je $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[E_1] = \frac{1}{\lambda p}$.

(d) Za $x \geq b$ imamo

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(E \leq (x-b)a) = 1 - e^{-a(x-b)},$$

te $F_X(x) = 0$ za $x < b$. Gustoću dobivamo deriviranjem:

$$f_X(x) = ae^{-a(x-b)} 1_{x \geq b}.$$

Za Z treba uzeti $\text{Exp}(a)$ razdiobu – npr. to slijedi jer $Z - b \mid Z > b$ ima $\text{Exp}(a)$ razdiobu, isto kao i $\frac{E}{a}$.