ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – rješenje

Zadatak 2. (a) Provjeravamo tri svojstva:

(i) Uzmimo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tada je $A \subseteq A$ i $A \setminus A = \emptyset \subseteq N$ pa je $A\rho A$. Dakle, ρ je refleksivna. (3 boda)

(ii) Neka za $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vrijedi $A\rho B$ i $B\rho A$. Tada je posebno $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ pa je $A = B$. Dakle, ρ je antisimetrična. (3 boda)

(iii) Neka za $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vrijedi $A\rho B$ i $B\rho C$. Tada je posebno $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ pa je $A \subseteq C$ zbog tranzitivnosti inkluzije. Također, vrijedi $B \setminus A \subseteq N$ i $C \setminus B \subseteq N$. Za sve skupove vrijedi

$$C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ovo je potrebno argumentirati, npr. iz Vennovih dijagrama ili raspisom. U našem slučaju dobivamo

$$C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq N \cup N = N,$$

što zajedno s $A \subseteq C$ daje $A\rho C$. Dakle, ρ je tranzitivna. (4 boda)

(b)

(b1) Pokažimo da ne postoji nijedna gornja međa. Pretpostavimo suprotno, neka je $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gornja međa za $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$. Tada je $\{1,2\}\rho S$ i $\{3,4\}\rho S$. Posebno, $\{1,2\} \subseteq S$ pa je $2 \in S$. No, tada je $2 \in S \setminus \{3,4\} \subseteq N$, što je kontradikcija. (5 bodova)

(b2) Odredimo prvo sve donje međe. Neka je $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ donja međa skupa $\{\{1,2,3\}, \{2,3,5\}\}$. Tada je $S\rho\{1,2,3\}$ i $S\rho\{2,3,5\}$. Posebno, $S \subseteq \{1,2,3\}$ i $S \subseteq \{2,3,5\}$ pa je $S \subseteq \{2,3\}$. Kandidati za donje međe su stoga $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}$. Među njima samo $\{2\}$ i $\{2,3\}$ zadovoljavaju $\{1,2,3\} \setminus S \subseteq N$ i $\{2,3,5\} \setminus S \subseteq N$ pa su to jedine donje međe danog skupa. Sada vidimo da je $\{2\}\rho\{2,3\}$ pa je $\{2,3\}$ najveća donja međa, odnosno infimum. (5 bodova)