

# VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.
- Da bi se dobili bodovi, sva svoja rješenja potrebno je obrazložiti.

**Zadatak 1.** (12 bodova)

- (a) (4 boda) Neka je  $X$  neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2), \quad t \in [-1, 1],$$

te  $f(t) = 0$ , za  $t \notin [-1, 1]$ . Odredite  $\mathbb{P}(|X| < \frac{1}{2})$  i  $\mathbb{E}[X]$ .

- (b) (4 boda) Neka je  $Y$  slučajna varijabla čija je funkcija distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Odredite  $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < Y \leq \frac{3}{2})$  i  $\mathbb{P}(Y = 1)$ .

- (c) (4 boda) Neka su  $X_1, X_2, \dots$  nenegativne slučajne varijable takve da je  $\mathbb{E}[X_k] = k$ , za sve  $k \geq 1$ , te  $N$  Poissonova slučajna varijabla s parametrom  $\lambda > 0$  nezavisna od  $X_1, X_2, \dots$ . Ako je  $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $n \geq 1$ , uz  $S_0 := 0$ , odredite  $\mathbb{E}[S_N]$ .

# VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

## Zadatak 2. (13 bodova)

- (a) (3 boda) Za slučajnu varijablu  $Y \sim G_0(p)$ , izvedite njenu funkciju izvodnicu vjerojatnosti.
- (b) (4 boda) U nekom gradu, tijekom bilo kojeg dana, s vjerojatnošću  $\frac{1}{4}$  pada kiša te nezavisno od toga s vjerojatnošću  $\frac{1}{5}$  puše vjetar. Također, vremenske prilike različitih dana su nezavisne. Neka je  $X$  broj dana od početka promatranja u kojima je puhao vjetar prije nego što je prvi put pala kiša. Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ . Koja je njena distribucija?
- (c) Kupci u neku trgovinu pristižu u vremenskim razmacima čija su trajanja u satima nezavisne  $\text{Exp}(4)$  slučajne varijable. Za  $n \geq 0$ , neka je  $T_n$  vrijeme dolaska  $n$ -tog kupca, pri čemu uzimamo  $T_0 = 0$ .
- (c1) (3 boda) Odredite funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable  $T_n$ .
- (c2) (3 boda) Dokažite da je vjerojatnost da će tijekom prvih 20 sati trgovinu posjetiti najviše 40 kupaca najviše  $(\frac{2}{e})^{40}$ .
- Uputa.* Primijenite Markovljevu nejednakost na slučajnu varijablu  $e^{tT_{40}}$  za pogodno odabrani  $t$ .

# VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

**Zadatak 3.** (12 bodova)

- (a1) (2 boda) Precizno definirajte pojam apsolutno neprekidnog dvodimenzionalnog slučajnog vektora.
- (a2) (3 boda) Neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable. Dokažite da je slučajni vektor  $(X, Y)$  apsolutno neprekidan.
- (a3) (3 boda) Neka su  $X \geq 0$  i  $Y \geq 0$  nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable. Dokažite da tada vrijedi  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .
- (b) (4 boda) Slučajan broj putnika  $X$  ulazi u vlak na početnoj stanici. Na prvoj stanici svaki od putnika, nezavisno od drugih putnika, s vjerojatnosti  $p \in (0, 1)$  izlazi iz vlaka. Neka je  $Y$  slučajan broj putnika koji je izašao iz vlaka. Ako  $X$  ima Poissonovu razdiobu s parametrom  $\lambda$ , izračunajte koeficijent korelacije  $\rho(X, Y)$ .

# VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

**Zadatak 4.** (*13 bodova*)

- (a) (*2 boda*) Definirajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli.
- (b) (*2 boda*) Precizno iskažite slabi zakon velikih brojeva.
- (c) (*4 boda*) Dokažite slabi zakon velikih brojeva.
- (d) (*5 bodova*) Marketinška agencija tvrdi da 10% kupaca koji kliknu na njihovu reklamu kupe proizvod. Ako je na reklamu za vaš proizvod kliknulo 400 ljudi procijenite vjerojatnost da ga je kupilo 7% ili manje.

Napomena:  $\Phi(1.65) = 0.95$ ,  $\Phi(1.85) = 0.97$ ,  $\Phi(2) = 0.98$ ,  $\Phi(2.2) = 0.99$