

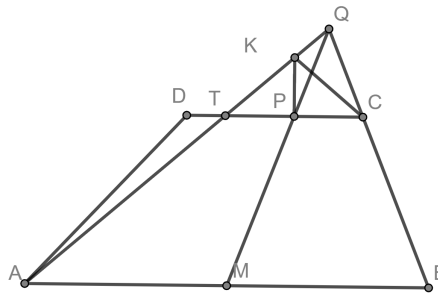
ELEMENTARNA GEOMETRIJA

Skice rješenja pismenog ispita - 28. siječnja 2026.

1. Dan je trapez $ABCD$ u kojem vrijedi $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$. Neka je M polovište osnovice $\overline{AB}$, te neka je P točka na $\overline{CD}$ takva da je $|PC| < |PD|$. Pravac PM siječe BC u točki Q , a pravac kroz P okomit na AB siječe pravac AQ u točki K . Dokažite da je $\angle QAB = \angle KCD$.

Rješenje.

Neka je T sjecište pravca AQ i stranice $\overline{CD}$.

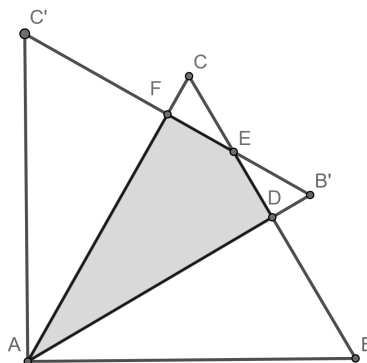


Budući da je M polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je P polovište $\overline{CT}$ (v. vježbe). Slijedi da je PK simetrala dužine $\overline{CT}$. Odavde slijedi da je $|CK| = |KT|$, pa je $\triangle CKT$ jednakokrakan. Slijedi da je $\angle KCD = \angle KTC = \angle QAB$, pri čemu zadnja jednakost slijedi iz kuteva uz transverzalu.

2. Jednakostraničan trokut ABC rotiramo oko točke A za 30° . Ako površina presjeka trokuta i njegove slike iznosi P , odredite površinu trokuta ABC .

Rješenje.

Označimo sjecišta stranica trokuta ABC i $A'B'C'$ sa D, E i F kao na slici.



Neka je a duljina stranice trokuta ABC . Visina jednakostraničnog trokuta je $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, pa njegova površina iznosi $P(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Promatramo trokuta CEF . Budući da je $\overline{AF}$ visina trokuta $AB'C'$, slijedi $|CF| = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})a$. Trokut CEF je polovica jednakostraničnog, dakle $|EF| = |CF|\sqrt{3}$. Izrazimo P preko površina trokuta ABC i CEF .

$$P = \frac{1}{2}P(ABC) - P(CEF) = \frac{1}{2} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^2 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = P(ABC)(2\sqrt{3} - 3).$$

$$\text{Dakle } P(ABC) = \frac{P}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{3}P.$$

4. Neka je $ABCD$ jednakokračan trapez čije osnovice su duljina $|AB| = a$ i $|CD| = c$. Neka je E sjecište dijagonala trapeza, te neka je kut između njegovih dijagonala $\sphericalangle AEB = \alpha$. Izrazite duljine krakova trapeza preko a , c i α .

Rješenje.

Neka su krakovi trapeza $|AD| = |BC| = x$.

Označimo visinu trapeza s h . Tada za krakove vrijedi

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

Iz geometrije jednakokračnog trapeza dobiva se veza između visine i kuta dijagonala:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2h}{a+c},$$

odnosno

$$h = \frac{a+c}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Uvrštavanjem u izraz za x dobivamo

$$x^2 = \left(\frac{a+c}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

Stoga je duljina krakova trapeza

$$|AD| = |BC| = \frac{1}{2} \sqrt{(a+c)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + (c-a)^2}.$$

5. Baza uspravne trostrane prizme je trokut sa stranicama duljina 8, 15 i 17. Toj prizmi je upisan stožac (baza stošca upisana je bazi prizme) tako da izvodnica stošca s bazom zatvara kut od 60° . Može li se toj prizmi opisati kugla? Ako može, odredite radijus te kugle. Može li se toj prizmi upisati kugla? Ako može, odredite radijus te kugle.

Rješenje.

Iz Heronove formule dobivamo da je površina baze $P = 60$. Radijus upisane kružnice je $r = \frac{P}{s} = 3$, a radijus opisane kružnice je $R = \frac{abc}{4P} = \frac{17}{2}$. Budući da pobočka stošca sa polumjerom njegove baze zatvara kut 60° , visina stošca iznosi $h = r\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Kad bi postojala upisana kugla, njen radijus bi morao biti jednak radijusu upisane kružnice baze, te bi njen promjer mora biti jednak visini prizme. Budući da je $2r = 6 \neq 3\sqrt{3} = h$, prizmi se ne može upisati kugla. Središte opisane kugle nalazi se na polovici visine iznad središta opisane kružnice baze. Po Pitagorinom poučku njen radijus je $R_1 = \sqrt{R^2 + h^2/4} = \sqrt{79}$