

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Rješenja prvog ispita

Zadatak 1. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Neka su A , B i C skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \quad \text{i} \quad B \setminus (A \triangle C).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerom.

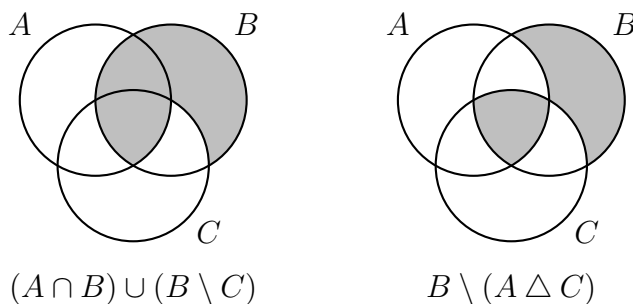
- (b) (10 bodova) Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ s

$$(a, b) \rho (c, d) \iff ad \neq bc.$$

Odredite, uz obrazloženje, je li ρ refleksivna, tranzitivna, simetrična, antisimetrična, irefleksivna.

Rješenje.

- (a) Skicirajmo Vennove dijagrame:



Dokažimo prvo

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \supseteq B \setminus (A \triangle C).$$

Neka je $x \in B \setminus (A \triangle C)$. Tada je $x \in B$ i $x \notin A \triangle C$, tj. $x \in B$ i $x \notin (A \setminus C \cup C \setminus A)$. Zaključujemo $x \in B$, $x \notin A \setminus C$ i $x \notin C \setminus A$. Promotrimo dva slučaja:

- (i) ako $x \in A$ imamo $x \in A \cap B \subseteq (A \cap B) \cup (B \setminus C)$;
- (ii) ako $x \notin A$ zbog $x \notin C \setminus A$ mora vrijediti $x \notin C$ pa zbog $x \in B$ imamo $x \in B \setminus C \subseteq (A \cap B) \cup (B \setminus C)$.

Dakle, svakako vrijedi $x \in (A \cap B) \cup (B \setminus C)$ čime smo dokazali traženu inkluziju.

Pokažimo

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \not\supseteq B \setminus (A \triangle C).$$

Uzmimo $A = B = \{1\}$ i $C = \emptyset$. Tada je

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

i

$$B \setminus (A \triangle C) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset.$$

- (b)
- ρ nije refleksivna, npr. $(1, 1) \not\rho (1, 1)$;
 - ρ nije tranzitivna, npr. $(1, 1)\rho(2, 3)$ i $(2, 3)\rho(3, 3)$, ali $(1, 1) \not\rho (3, 3)$;
 - ρ je simetrična, ako $(a, b)\rho(c, d)$ tada je po definiciji $ad \neq bc$ pa je i $cb \neq da$, što je ekvivalentno $(c, d)\rho(a, b)$;
 - ρ nije antisimetrična, npr. $(1, 0)\rho(0, 1)$ i $(0, 1)\rho(1, 0)$, ali $(1, 0) \neq (0, 1)$;
 - ρ je irefleksivna, kada bi vrijedilo $(a, b)\rho(a, b)$ imali bismo $ab \neq ba$, što je uvijek laž.

Zadatak 2. (25 bodova) Za $n \in \mathbb{N}$ želimo particionirati skup $\{1, 2, \dots, n\}$ na dva skupa A i B takva da je zbroj svih elemenata u A jednak zbroju svih elemenata u B .

- (a) (10 bodova) Ako takva particija postoji, dokažite da je nužno $n = 4k$ ili $n = 4k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
- (b) (15 bodova) Dokažite matematičkom indukcijom da su uvjeti iz (a) i dovoljni da bi takva particija postojala.

Rješenje.

- (a) Neka su A i B takvi skupovi, označimo s S_A zbroj svih elemenata u A i analogno za B . Po pretpostavci je $S_A = S_B$. Kako je $\{A, B\}$ particija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, A i B su disjunktni i u uniji daju cijeli skup $\{1, 2, \dots, n\}$ pa vrijedi

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n = S_A + S_B = 2S_A,$$

odnosno

$$n(n+1) = 4S_A.$$

Sada vidimo da $4|n(n+1)$, a kako su n i $n+1$ relativno prosti slijedi da $4|n$ ili $4|(n+1)$, što su točno uvjeti iz podzadatka.

Napomena: Ako za $n \in \mathbb{N}$ označimo prekidate $P(n) \equiv$ "za n postoji takva particija" i $Q(n) \equiv$ "postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 4k$ ili $n = 4k - 1$ " tvrdnja koju treba dokazati u podzadatku je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow Q(n)).$$

ili njen obrat po kontrapoziciji (koji je logički ekvivalentan):

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\neg Q(n) \Rightarrow \neg P(n)).$$

Dakle, nije trebalo dokazati da za $n = 4k$ ili $n = 4k - 1$ takva particija postoji, što je zapravo obrat gornje tvrdnje (i nije joj logički ekvivalentan):

$$(\forall n \in \mathbb{N})(Q(n) \Rightarrow P(n)),$$

već da za preostale n ona ne postoji.

- (b) Prvo matematičkom indukcijom dokazujemo tvrdnju: za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo particionirati skup $\{1, 2, \dots, 4k\}$ na dva skupa A_k i B_k takva da je suma elemenata u A_k jednaka sumi elemenata u B_k .

Baza: Za $k = 1$ možemo uzeti $A_1 = \{1, 4\}$ i $B_1 = \{2, 3\}$.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Za $k + 1$ particioniramo skup

$$\{1, 2, \dots, 4(k+1)\} = \{1, 2, \dots, 4k\} \cup \{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4\}.$$

Primijetimo da je $(4k+1) + (4k+4) = (4k+2) + (4k+3)$ pa je dobar odabir

$$A_{k+1} = A_k \cup \{4k+1, 4k+4\}, \quad B_{k+1} = B_k \cup \{4k+2, 4k+3\}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $k + 1$ pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Sada analogno dokazujemo dovoljnost drugog uvjeta: za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo particionirati skup $\{1, 2, \dots, 4k-1\}$ na dva skupa C_k i D_k takva da je suma elemenata u C_k jednaka sumi elemenata u D_k .

Baza: Za $k = 1$ možemo uzeti $C_1 = \{1, 2\}$ i $D_1 = \{3\}$.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Za $k + 1$ particioniramo skup

$$\{1, 2, \dots, 4(k + 1) - 1\} = \{1, 2, \dots, 4k - 1\} \cup \{4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3\}.$$

Primijetimo da je $(4k) + (4k + 3) = (4k + 1) + (4k + 2)$ pa je dobar odabir

$$C_{k+1} = C_k \cup \{4k, 4k + 3\}, \quad D_{k+1} = D_k \cup \{4k + 1, 4k + 2\}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $k + 1$ pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Napomena: konstruktivni dokazi bez korištenja matematičke indukcije su bodovani s najviše 5 bodova. Dokazi koji u koraku indukcije nigdje ne koriste pretpostavku za prethodni k , umjesto kojeg se zapravo dokaže tvrdnja za proizvoljan k se ne smatraju matematičkom indukcijom.

Zadatak 3. (25 bodova)

- (a) (12 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$123^{45^6}$$

brojem 11.

- (a) (13 bodova) Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$2 \cdot 3^n + 16 = 123^{45^6} + 11^m.$$

Rješenje.

- (a) Najprije reduciramo bazu potencije modulo 11. Budući da je

$$123 \equiv 2 \pmod{11},$$

slijedi

$$123^{45^6} \equiv 2^{45^6} \pmod{11}.$$

Kako je 11 prost broj i ne dijeli 123, prema malom Fermatovom teoremu vrijedi

$$2^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Stoga tražimo ostatak koji eksponent daje pri dijeljenju sa 10. Budući da je

$$45 \equiv 5 \pmod{10},$$

dobivamo

$$45^6 \equiv 5^6 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \equiv 5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}.$$

Sada se vraćamo na polaznu potenciju:

$$2^{45^6} \equiv 2^5 = 32 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Konačno,

$$123^{45^6} \equiv 10 \pmod{11}.$$

Dakle, broj 123^{45^6} pri dijeljenju s 11 daje ostatak 10.

- (b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje takvi brojevi m i n . Prema podzadatku (a), imamo

$$123^{45^6} + 11^m \equiv 10 \pmod{11}.$$

Dakle, mora vrijediti i

$$2 \cdot 3^n + 16 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Odredimo ostatke koje potencije broja 3 mogu dati pri dijeljenju sa 11:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{11}, & 3^2 &\equiv 9 \pmod{11}, & 3^3 &\equiv 5 \pmod{11}, \\ 3^4 &\equiv 4 \pmod{11}, & 3^5 &\equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Nakon toga se ostaci potencija 3^n periodično ponavljaju s periodom 5.

Sada računamo pripadne ostatke izraza $2 \cdot 3^n + 16$ za svaki od mogućih ostataka 3^n :

$$\begin{aligned} 3^n \equiv 1 &\Rightarrow 2 \cdot 1 + 16 = 18 \equiv 7 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 3 &\Rightarrow 2 \cdot 3 + 16 = 22 \equiv 0 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 4 &\Rightarrow 2 \cdot 4 + 16 = 24 \equiv 2 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 5 &\Rightarrow 2 \cdot 5 + 16 = 26 \equiv 4 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 9 &\Rightarrow 2 \cdot 9 + 16 = 34 \equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Vidimo da izraz $2 \cdot 3^n + 16$ ne može dati ostatak 10 pri dijeljenju s 11, pa zaključujemo da ne postoje prirodni brojevi m i n s traženim svojstvom.

Zadatak 4. (25 bodova) Neka je $f(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 32x - 16$.

- (a) (13 bodova) Odredite sve nultočke polinoma f ako je poznato da je $\alpha = 2i$ njegova dvostruka nultočka.
- (b) (12 bodova) Dokažite da ne postoji polinom g stupnja 3 takav da su sve nultočke polinoma $f + g$ realne. (Uputa: iskoristite Viéteove formule)

Rješenje.

- (a) Kako je $f \in \mathbb{R}[x]$ dvostruka nultočka je i $\bar{\alpha} = -2i$. Dakle, f je djeljiv polinomom

$$(x - \alpha)^2(x - \bar{\alpha})^2 = (x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16.$$

Dijeljenjem dobivamo

$$f(x) = (x^2 + 4)^2(x^2 - 2x - 1).$$

Dobiveni kvocijent $x^2 - 2x - 1$ ima nultočke

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle nultočke od f su $2i, -2i, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$.

Napomena: bilo kakav pokušaj traženja cjelobrojnih/ racionalnih nultočaka nije nosio bodove.

- (b) Pretpostavimo da takav polinom g postoji, označimo $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tada je

$$(f + g)(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 + (a - 16)x^3 + (8 + b)x^2 + (c - 32)x + (d - 16).$$

Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}$ nultočke od $f + g$. Po Viéteovim formulama imamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i+1}^6 \alpha_i \alpha_j = 7.$$

Sada,

$$\begin{aligned} 4 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6)^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 + 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i+1}^6 \alpha_i \alpha_j \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 + 14. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 = -10 < 0,$$

što je kontradikcija jer je lijeva strana jednakosti nenegativna kao zbroj kvadrata realnih brojeva.