

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Rješenja drugog kolokvija

Zadatak 1. (13 bodova)

- (a) (6 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$123^{45^6}$$

brojem 11.

- (b) (7 bodova) Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$2 \cdot 3^n + 16 = 123^{45^6} + 11^m.$$

Rješenje.

- (a) Najprije reduciramo bazu potencije modulo 11. Budući da je

$$123 \equiv 2 \pmod{11},$$

slijedi

$$123^{45^6} \equiv 2^{45^6} \pmod{11}.$$

Kako je 11 prost broj i ne dijeli 123, prema malom Fermatovom teoremu vrijedi

$$2^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Stoga tražimo ostatak koji eksponent daje pri dijeljenju sa 10. Budući da je

$$45 \equiv 5 \pmod{10},$$

dobivamo

$$45^6 \equiv 5^6 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \equiv 5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}.$$

Sada se vraćamo na polaznu potenciju:

$$2^{45^6} \equiv 2^5 = 32 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Konačno,

$$123^{45^6} \equiv 10 \pmod{11}.$$

Dakle, broj 123^{45^6} pri dijeljenju s 11 daje ostatak 10.

Napomene:

- Potenciranje je desno asocirano, tj. $123^{45^6} = 123^{(45^6)} \neq (123^{45})^6 = 123^{45 \cdot 6}$. Rješenje uz tu grešku nosi maksimalno 3 boda.
- Kongruencije zapisane bez popratne argumentacije ($2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ bez spominjanja MFT i komentara da $2 \nmid 11$) nisu potpuno rješenje. Takvo rješenje nosi maksimalno 5 bodova.
- Za $45^6 \equiv 5 \pmod{10}$ ne može se koristiti Eulerov teorem jer $M(45, 10) \neq 1$ (iako daje točan rezultat). Takvo rješenje nosi maksimalno 4 boda.

- (b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje takvi brojevi m i n . Prema podzadatku (a), imamo

$$123^{456} + 11^m \equiv 10 \pmod{11}.$$

Dakle, mora vrijediti i

$$2 \cdot 3^n + 16 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Odredimo ostatke koje potencije broja 3 mogu dati pri dijeljenju sa 11:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{11}, & 3^2 &\equiv 9 \pmod{11}, & 3^3 &\equiv 5 \pmod{11}, \\ 3^4 &\equiv 4 \pmod{11}, & 3^5 &\equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Nakon toga se ostaci potencija 3^n periodično ponavljaju s periodom 5.

Sada računamo pripadne ostatke izraza $2 \cdot 3^n + 16$ za svaki od mogućih ostataka 3^n :

$$\begin{aligned} 3^n \equiv 1 &\Rightarrow 2 \cdot 1 + 16 = 18 \equiv 7 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 3 &\Rightarrow 2 \cdot 3 + 16 = 22 \equiv 0 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 4 &\Rightarrow 2 \cdot 4 + 16 = 24 \equiv 2 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 5 &\Rightarrow 2 \cdot 5 + 16 = 26 \equiv 4 \pmod{11}, \\ 3^n \equiv 9 &\Rightarrow 2 \cdot 9 + 16 = 34 \equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Vidimo da izraz $2 \cdot 3^n + 16$ ne može dati ostatak 10 pri dijeljenju s 11, pa zaključujemo da ne postoje prirodni brojevi m i n s traženim svojstvom.

Napomena: česta greška: *korištenjem rezultata iz (a) dobivamo $2 \cdot 3^n \equiv 5 \pmod{11}$, što je nemoguće jer je lijeva strana parna, a desna neparna.* Takvo zaključivanje nije točno, npr. $5 \equiv 16 \pmod{11}$ iako se parnost ne podudara.

Zadatak 2. (12 bodova)

- (a) (6 bodova) Neka je n prirodan broj. Odredite koje sve vrijednosti može poprimiti

$$M(16n + 81, 12n + 63).$$

- (b) (6 bodova) Odredite $\varphi^n(6^{100}) = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots(\varphi(6^{100}))\dots))}_{n \text{ primjena funkcije } \varphi}$ za $n = 90$ i za $n = 110$.

Rješenje.

- (a) Pomoću Euklidovog algoritma računamo:

$$M(16n + 81, 12n + 63) = M(12n + 63, 4n + 18) = M(4n + 18, 9) = M(4n, 9).$$

Sada promatramo zajedničke djelitelje brojeva 9 i $4n$. Budući da je $M(4, 9) = 1$, vrijedi

$$M(4n, 9) = M(n, 9).$$

Kako $M(n, 9) \mid 9$, imamo

$$M(n, 9) \in \{1, 3, 9\}.$$

Sve tri mogućnosti se zaista i ostvaruju, npr. za $n = 1, 3$ i 9 .

Prema tome, izraz $M(16n + 81, 12n + 63)$ može poprimiti vrijednosti 1, 3 i 9.

- (b) Prema formuli za Eulerovu funkciju φ imamo

$$\varphi(3^\alpha 2^\beta) = 3^{\alpha-1} 2^{\beta-1} \cdot 2 \cdot 1 = 3^{\alpha-1} 2^\beta.$$

Kada 90 puta primijenimo φ na $6^{100} = 3^{100} \cdot 2^{100}$, dobijemo $\boxed{3^{10} \cdot 2^{100}}$. Kad 100 puta primijenimo φ , dobijemo 2^{100} . Nakon toga, svaka primjena φ smanji eksponent za 1, pa nakon 110 primjena dobijemo $\boxed{2^{90}}$.

Zadatak 3. (13 bodova) Neka je $f(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 32x - 16$.

- (a) (7 bodova) Odredite sve nultočke polinoma f ako je poznato da je $\alpha = 2i$ njegova dvostruka nultočka.
- (b) (6 bodova) Dokažite da ne postoji polinom g stupnja 3 takav da su sve nultočke polinoma $f + g$ realne. (Uputa: iskoristite Viéteove formule)

Rješenje.

- (a) Kako je $f \in \mathbb{R}[x]$ dvostruka nultočka je i $\bar{\alpha} = -2i$. Dakle, f je djeljiv polinomom

$$(x - \alpha)^2(x - \bar{\alpha})^2 = (x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16.$$

Dijeljenjem dobivamo

$$f(x) = (x^2 + 4)^2(x^2 - 2x - 1).$$

Dobiveni kvocijent $x^2 - 2x - 1$ ima nultočke

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle nultočke od f su $2i, -2i, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$.

Napomena: bilo kakav pokušaj traženja cjelobrojnih/racionalnih nultočaka nije nosio bodove.

- (b) Pretpostavimo da takav polinom g postoji, označimo $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tada je

$$(f + g)(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 + (a - 16)x^3 + (8 + b)x^2 + (c - 32)x + (d - 16).$$

Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}$ nultočke od $f + g$. Po Viéteovim formulama imamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i+1}^6 \alpha_i \alpha_j = 7.$$

Sada,

$$\begin{aligned} 4 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6)^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 + 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i+1}^6 \alpha_i \alpha_j \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 + 14. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_6^2 = -10 < 0,$$

što je kontradikcija jer je lijeva strana jednakosti nenegativna kao zbroj kvadrata realnih brojeva.

Zadatak 4. (12 bodova)

- (a) (8 bodova) Odredite sve polinome
- $f \in \mathbb{R}[x]$
- koji zadovoljavaju

$$x^2 f(x-1) = (x-1)(x-3)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (b) (4 bodova) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke racionalne funkcije

$$\frac{1}{x(x-2)^3(x^2+x+1)^2}.$$

Nije potrebno računati konstante u brojnicima.

Rješenje.

- (a) Uvrštavanjem
- $x = 1$
- u jednakost dobivamo
- $f(0) = 0$
- i slično uvrštavanjem
- $x = 3$
- dobivamo
- $f(2) = 0$
- . Sada uvrštavanjem
- $x = 2$
- dobivamo i
- $f(1) = 0$
- . Zaključujemo da

$$x(x-1)(x-2) \mid f(x).$$

Također, iz dane jednadžbe vidimo da

$$x^2 \mid (x-1)(x-3)f(x) \Rightarrow x^2 \mid f(x).$$

Iz svega navedenog slijedi postoji $g \in \mathbb{R}[x]$ takav da vrijedi

$$f(x) = x^2(x-1)(x-2)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem ovoga u početnu jednakost dobivamo

$$x^2 \cdot (x-1)^2(x-2)(x-3)g(x-1) = (x-1)(x-3) \cdot x^2(x-1)(x-2)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ kraćenjem dobivamo

$$g(x) = g(x-1).$$

Definirajmo $h(x) = g(x) - g(3)$. Iteriranjem gornje jednakosti slijedi da je $h(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Posebno, h ima beskonačno mnogo nultočaka pa je nužno $h \equiv 0$ što daje da je $g(x) = C$ za neki $C \in \mathbb{R}$. Dakle sva rješenja su nužno oblika

$$f(x) = Cx^2(x-1)(x-2).$$

Provjerimo da to i jesu rješenja uvrštavanjem u početnu jednakost:

$$x^2 \cdot C(x-1)^2(x-2)(x-3) = (x-1)(x-3) \cdot Cx^2(x-1)(x-2),$$

što očito vrijedi.

- (b) Postoje konstante
- $A, B, \dots, G, H \in \mathbb{R}$
- takve da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-2)^3(x^2+x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} \\ &\quad + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$