

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Rješenja drugog ispita

Zadatak 1. (25 bodova)

- (a) (10 bodova) Neka su A i B skupovi. Dokažite da su skupovi A i B disjunktni ako i samo ako vrijedi $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.
- (b) (15 bodova) Neka je $a_1 = 2$. Za prirodan broj $n > 1$, definiramo broj a_n kao zbroj prvih a_{n-1} prirodnih brojeva. Dokažite da vrijedi $a_n > n!$ za svaki $n > 4$.

Rješenje.

- (a) $\Rightarrow$ Pretpostavimo da su skupovi A i B disjunktni, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Tada vrijedi

$$X \subseteq A \quad \text{i} \quad X \subseteq B.$$

Iz toga slijedi da je

$$X \subseteq A \cap B = \emptyset.$$

Budući da je jedini podskup od $\emptyset$ sam prazan skup, mora vrijediti $X = \emptyset$, odnosno $X \in \{\emptyset\}$. Dakle, vrijedi $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \{\emptyset\}$.

Obratno, očito je $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ i $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$, pa je i $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dakle, dokazali smo

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}.$$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da vrijedi

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}.$$

Pretpostavimo suprotno, da skupovi A i B nisu disjunktni. Tada postoji element x takav da $x \in A \cap B$.

Razmotrimo skup $\{x\}$. Budući da je $x \in A$ i $x \in B$, slijedi da je

$$\{x\} \subseteq A \quad \text{i} \quad \{x\} \subseteq B,$$

odnosno

$$\{x\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}.$$

No, $\{x\} \neq \emptyset$, pa smo došli do kontradikcije. Dakle, početna pretpostavka nije točna, pa mora vrijediti

$$A \cap B = \emptyset.$$

- (b) Računamo:

$$a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$a_5 = 1 + 2 + \dots + 21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

Baza: Za $n = 5$ imamo

$$a_5 = 231 > 120 = 5!.$$

Korak: Pretpostavimo da je $a_n > n!$ za neki $n > 4$. Imamo

$$a_{n+1} = 1 + 2 + \dots + a_n = \frac{a_n(a_n + 1)}{2}.$$

Po pretpostavci je

$$\frac{a_n(a_n + 1)}{2} > \frac{n!(n! + 1)}{2},$$

pa je dovoljno dokazati

$$\frac{n!(n! + 1)}{2} > (n + 1)!,$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{n! + 1}{2} > n + 1,$$

odnosno

$$n! > 2n + 1.$$

Kako je $n > 4$, imamo

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n > 3n > 2n + 1,$$

čime je tvrdnja dokazana.

Dakle, po principu matematičke indukcije vrijedi $a_n > n!$ za sve $n > 4$.

Zadatak 2. (25 bodova) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ neki skup. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana je relacija ρ sa:

$$A \rho B \iff (\forall a \in A)(a \notin B \Rightarrow a \in S).$$

- (a) (15 bodova) Ispitajte svojstva relacije ρ (refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost) u slučaju kad je S skup parnih brojeva.
- (b) (10 bodova) Navedite primjer skupa S za koji je relacija ρ
- (b1) simetrična;
- (b2) antisimetrična.

Objasnite svoj odgovor.

Rješenje.

- (a) **Refleksivnost:** Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan. Kako je za svaki $a \in A$ tvrdnja $a \notin A$ lažna, implikacija

$$a \notin A \Rightarrow a \in S$$

je istinita za svaki $a \in A$. Stoga vrijedi $A \rho A$. Dakle, relacija ρ je refleksivna.

Irefleksivnost: Budući da je u prethodnom dijelu pokazano da za svaki A vrijedi $A \rho A$ (posebno, npr. $\{2\} \rho \{2\}$), relacija ρ nije irefleksivna.

Simetričnost: Promotrimo skupove

$$A = \{2\} \quad \text{i} \quad B = \{1\}.$$

Vrijedi $A \rho B$, odnosno vrijedi

$$(\forall a \in \{2\})(a \notin \{1\} \Rightarrow a \in S),$$

jer je jedini element skupa $\{2\}$ broj 2 i za njega vrijedi implikacija $2 \notin \{1\} \Rightarrow 2 \in S$. S druge strane, ne vrijedi $B \rho A$, odnosno ne vrijedi

$$(\forall a \in \{1\})(a \notin \{2\} \Rightarrow a \in S),$$

jer je broj 1 element skupa $\{1\}$ i za njega ne vrijedi implikacija $1 \notin \{2\} \Rightarrow 1 \in S$. Dakle, iz $A \rho B$ ne mora slijediti $B \rho A$, pa relacija ρ nije simetrična.

Antisimetričnost: Promotrimo skupove

$$A = \{2\} \quad \text{i} \quad B = \{4\}.$$

Vrijedi $A \rho B$, odnosno vrijedi

$$(\forall a \in \{2\})(a \notin \{4\} \Rightarrow a \in S),$$

jer je jedini element skupa $\{2\}$ broj 2 i za njega vrijedi implikacija $2 \notin \{4\} \Rightarrow 2 \in S$. Analogno, vrijedi $B \rho A$, jer vrijedi implikacija $4 \notin \{2\} \Rightarrow 4 \in S$. No, očito je $A \neq B$, pa relacija ρ nije antisimetrična.

Tranzitivnost: Neka su $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $A \rho B$ i $B \rho C$, odnosno

$$(\forall a \in A)(a \notin B \Rightarrow a \in S) \quad \text{i} \quad (\forall a \in B)(a \notin C \Rightarrow a \in S).$$

Dokazujemo da vrijedi

$$(\forall a \in A)(a \notin C \Rightarrow a \in S).$$

Uzmimo proizvoljan $a \in A$. Pretpostavimo da $a \notin C$. Imamo dva slučaja:

(1) Ako je $a \notin B$, tada iz $A \rho B$ slijedi $a \in S$.

(2) Ako je $a \in B$, zbog $a \notin C$ i $B \rho C$ zaključujemo da vrijedi $a \in S$.

U oba slučaja vrijedi $a \in S$, pa smo dokazali

$$(\forall a \in A)(a \notin C \Rightarrow a \in S),$$

odnosno $A \rho C$. Dakle, relacija ρ je tranzitivna.

(b)

(b1) Neka je $S = \mathbb{N}$. Tada definicija relacije glasi

$$A \rho B \iff (\forall a \in A)(a \notin B \Rightarrow a \in \mathbb{N}).$$

Kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, za svaki $a \in A$ vrijedi $a \in \mathbb{N}$, pa je implikacija $a \notin B \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ istinita za sve $a \in A$. Dakle, vrijedi $A \rho B$ za sve skupove $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Posebno, relacija je tada simetrična.

(b2) Neka je $S = \emptyset$. Tada definicija relacije glasi

$$A \rho B \iff (\forall a \in A)(a \notin B \Rightarrow a \in \emptyset).$$

Kako je sud $a \in \emptyset$ uvijek lažan, implikacija $a \notin B \Rightarrow a \in \emptyset$ će biti istinita ako i samo ako je $a \notin B$ laž, odnosno ako i samo ako je $a \in B$ istina. Dakle, imamo

$$A \rho B \iff (\forall a \in A)(a \in B) \iff A \subseteq B.$$

Ako sada pretpostavimo da vrijedi $A \rho B$ i $B \rho A$, mora biti $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, pa vrijedi $A = B$. Dakle, relacija je antisimetrična.

Zadatak 3. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$109^{2025^{2026}} - 55^{2025^{2026}}$$

s 26.

- (b) (10 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $n!$ djeljiv s n^2 .

Rješenje.

- (a) Najprije reduciramo baze modulo 26: vrijedi

$$109 \equiv 5 \pmod{26} \quad \text{i} \quad 55 \equiv 3 \pmod{26},$$

pa je

$$109^{2025^{2026}} - 55^{2025^{2026}} \equiv 5^{2025^{2026}} - 3^{2025^{2026}} \pmod{26}.$$

Budući da je $M(26, 5) = M(26, 3) = 1$, možemo iskoristiti Eulerov teorem. Kako je $\varphi(26) = 12$, imamo

$$5^{12} \equiv 1 \pmod{26} \quad \text{i} \quad 3^{12} \equiv 1 \pmod{26}.$$

Reducirajmo sada eksponent modulo 12. Budući da vrijedi

$$2025 \equiv 9 \pmod{12},$$

razmatramo potencije broja 9 modulo 12. Primijetimo:

$$9^2 = 81 \equiv 9 \pmod{12},$$

pa slijedi da za svaki prirodan broj $k \geq 1$ vrijedi

$$9^k \equiv 9 \pmod{12}.$$

Prema tome,

$$2025^{2026} \equiv 9^{2026} \equiv 9 \pmod{12}.$$

Sada imamo

$$5^{2025^{2026}} - 3^{2025^{2026}} \equiv 5^9 - 3^9 \pmod{26}.$$

Konačno, kako je $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{26}$ i $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{26}$, imamo

$$5^9 - 3^9 = (5^2)^4 \cdot 5 - (3^3)^3 \equiv 5 - 1 = 4 \pmod{26}.$$

Dakle, traženi ostatak je 4.

- (b) Neka je n prirodan broj takav da $n^2 \mid n!$. Tada je $n! = kn^2$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dijeljenjem s n dobivamo

$$(n-1)! = kn. \quad (*)$$

Razlikujemo tri slučaja:

- (1) $n = 1$. Tada jednadžba $(*)$ glasi

$$0! = 1 = k \cdot 1,$$

što vrijedi za $k = 1$. Dakle, jedno rješenje je $n = 1$.

- (2) n je prost. U tom slučaju je desna strana od (*) djeljiva s n , a lijeva nije (jer su svi brojevi $1, 2, \dots, n-1$ relativno prosti s n). Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.
- (3) n je složen. Tada je $n = ab$ za neke brojeve $1 < a, b < n$. Ako postoje takvi brojevi a i b takvi da je $a < b$, onda se a i b javljaju u umnošku $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$, pa je moguće naći k takav da jednakost (*) vrijedi. S druge strane, ako ne postoje a, b takvi da je $a < b$, onda je nužno $n = p^2$ za neki prost broj p . Ako je $p > 2$, imamo $p < 2p < p^2$, pa jednakost (*) glasi

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot \dots \cdot 2p \cdot \dots \cdot (p^2 - 1) = kp^2.$$

Vidimo da je lijeva strana djeljiva s p^2 , pa postoji k takav da jednakost vrijedi. Ako je $p = 2$, tj. $n = 4$, jednakost (*) glasi

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = k \cdot 4,$$

što ne vrijedi ni za koji $k \in \mathbb{N}$.

Dakle, traženo svojstvo imaju svi prirodni brojevi osim prostih brojeva i broja 4.

Zadatak 4. (25 bodova) Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s $x + 1$ daje ostatak 2, pri dijeljenju s x daje ostatak 4, pri dijeljenju s $x - 1$ daje ostatak 8 i pri dijeljenju s $x - 2$ daje ostatak 16.

(a) (10 bodova) Dokažite da polinom f ne može imati sve cjelobrojne koeficijente.

(b) (15 bodova) Ako je

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

odredite koeficijente a , b , c i d .

Rješenje. Prema Bezoutovom teoremu, iz uvjeta zadatka imamo

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = 4 \quad f(1) = 8 \quad \text{i} \quad f(2) = 16.$$

(a) Pretpostavimo da postoji takav polinom f sa cjelobrojnim koeficijentima. Prema rezultatima s vježbi, tada je

$$f(x) = (x + 1)g(x) + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

za neki polinom g s cjelobrojnim koeficijentima. Uvrštavanjem $x = 2$ dobivamo

$$16 = f(2) = 3 \cdot \underbrace{g(2)}_{\in \mathbb{Z}} + 2.$$

Slijedi da $3 \mid 14$, što očito nije istina.

(b) Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u polinom $f(x)$ dobivamo sustav linearnih jednačbi:

$$\begin{cases} 2 = f(-1) = -a + b - c + d \\ 4 = f(0) = d \\ 8 = f(1) = a + b + c + d \\ 16 = f(2) = 8a + 4b + 2c + d. \end{cases}$$

Iz druge jednačbe odmah slijedi $d = 4$, pa uvrštavanjem u preostale tri jednačbe dobivamo

$$\begin{cases} -a + b - c = -2 \\ a + b + c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 12. \end{cases}$$

Zbrojimo prve dvije jednačbe i dobivamo $2b = 2$, odnosno $b = 1$. Uvrstimo $b = 1$ u preostale dvije jednačbe i dobivamo

$$a + c = 3 \quad \text{i} \quad 4a + c = 4.$$

Oduzimanjem ovih jednačbi dobivamo

$$3a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad c = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

dakle, koeficijenti traženog polinoma su:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 1, \quad c = \frac{8}{3}, \quad d = 4.$$

Traženi polinom glasi:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3}x + 4.$$