

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi jesenski rok – 28. kolovoza 2026.

Rješenja**Zadatak 1**(a) Neka su A, B, C, D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$((A \cup B) \times (C \cap D)) \cup ((A \cap B) \times (C \cup D)) \quad \text{i} \quad ((A \cap B) \times C) \cup (A \times (C \cap D)).$$

(b) Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Dokažite

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall C \subseteq \mathbb{N})(C \neq \emptyset \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C).$$

Rješenje.

(a) Označimo

$$X := ((A \cup B) \times (C \cap D)) \cup ((A \cap B) \times (C \cup D))$$

i

$$Y := ((A \cap B) \times C) \cup (A \times (C \cap D)).$$

Budući da je $A \subseteq A \cup B$ i $C \subseteq C \cup D$, vrijedi

$$(A \cap B) \times C \subseteq (A \cap B) \times (C \cup D) \quad \text{i} \quad A \times (C \cap D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cap D),$$

pa je $Y \subseteq X$.

Obratna inkluzija općenito ne vrijedi. Primjerice, za

$$A = \emptyset, \quad B = C = D = \{1\}$$

dobivamo

$$X = \{(1, 1)\}, \quad Y = \emptyset.$$

(b) Pretpostavimo najprije $A \subseteq B$. Tada očito vrijedi $A \cup C \subseteq B \cup C$ za svaki neprazan $C \subseteq \mathbb{N}$.

Obratno, pretpostavimo

$$(\forall C \subseteq \mathbb{N})(C \neq \emptyset \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C).$$

Neka je $n \in A$. Treba dokazati $n \in B$. Promotrimo skup

$$C = \{n + 1\}.$$

Kako je $C \neq \emptyset$, po pretpostavci imamo

$$A \cup \{n + 1\} \subseteq B \cup \{n + 1\}.$$

Iz $n \in A$ slijedi $n \in B \cup \{n + 1\}$. Budući da je $n \neq n + 1$, mora biti $n \in B$. Kako je $n \in A$ bio proizvoljan, zaključujemo $A \subseteq B$.

Zadatak 2

Na skupu polinoma $\mathbb{R}[x]$ zadana je relacija ρ sa

$$f \rho g \iff (\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq k \Rightarrow f(x) \leq g(x)).$$

- (a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li relacija ekvivalencije?
 (b) Ima li skup svih konstantnih polinoma gornju među s obzirom na uređaj ρ ? Ima li supremum?

Rješenje.

- (a) Provjerimo refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost.

Refleksivnost. Za svaki $f \in \mathbb{R}[x]$ i svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) \leq f(x)$, pa je $f \rho f$.

Antisimetričnost. Pretpostavimo $f \rho g$ i $g \rho f$. Tada postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ takvi da

$$x \geq k_1 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{i} \quad x \geq k_2 \Rightarrow g(x) \leq f(x).$$

Neka je $K := \max\{k_1, k_2\}$. Za svaki $x \geq K$ je

$$f(x) \geq g(x) \wedge g(x) \geq f(x) \implies f(x) = g(x).$$

Dakle polinom $f - g$ ima beskonačno mnogo nultočaka. Jedini polinom s beskonačno mnogo nultočaka je nulpolinom, pa je $f - g = 0$, odnosno $f = g$.

Tranzitivnost. Ako je $f \rho g$ i $g \rho h$, postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ takvi da

$$x \geq k_1 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{i} \quad x \geq k_2 \Rightarrow g(x) \leq h(x).$$

Neka je $K := \max\{k_1, k_2\}$. Tada za $x \geq K$ slijedi

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

pa vrijedi $f \rho h$.

Dakle, ρ je relacija parcijalnog uređaja.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer nije simetrična. Primjerice, za

$$f(x) = 0, \quad g(x) = x$$

i $k = 0$ imamo $x \geq k \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, pa je $f \rho g$. No, ne vrijedi $g \rho f$ jer ne može vrijediti $x \leq 0$ za sve brojeve x od nekog prirodnog broja nadalje.

- (b) Skup konstantnih polinoma ima gornju među. Primjerice, polinom $p(x) = x$ je gornja međa: za svaki konstantni polinom $f(x) = c$ možemo izabrati $k \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $k \geq c$, pa za svaki $x \geq k$ vrijedi $f(x) = c \leq x = p(x)$. Dakle, vrijedi $f \rho p$ za svaki konstantni polinom f .

Supremum ne postoji. Pretpostavimo da je $p(x)$ neka gornja međa. Tada za svaku konstantu c mora vrijediti $c \leq p(x)$ za sve x od nekog prirodnog broja nadalje, tj. $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

Promotnimo polinom $q(x) = p(x) - 1$. Očito je $q(x) \leq p(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa je $q \rho p$. No, vrijedi i $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$, pa je i $q(x)$ veći od svake konstante za dovoljno veliki x . Dakle, i q je gornja međa skupa svih konstantnih polinoma. Prema tome, ne postoji najmanja gornja međa, tj. ne postoji supremum.

Zadatak 3

(a) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je zbroj

$$4^n + 5^n + 6^n$$

djeljiv s 45.

Rješenje. Budući da je $45 = 5 \cdot 9$ i $M(5, 9) = 1$, dovoljno je ispitati djeljivost s 5 i s 9.

Modulo 5 vrijedi

$$4^n + 5^n + 6^n \equiv (-1)^n + 0 + 1 \pmod{5}.$$

To je kongruentno s 0 modulo 5 upravo kada je n neparan.

Pretpostavimo sada da je n neparan i $n \geq 3$. Tada je $9 \mid 6^n$, a kako je $5 \equiv -4 \pmod{9}$,

$$4^n + 5^n + 6^n \equiv 4^n + (-4)^n + 0 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Dakle za svaki neparan $n \geq 3$ zbroj je djeljiv i s 5 i s 9, pa i s 45.

Preostaje provjeriti $n = 1$:

$$4 + 5 + 6 = 15,$$

što nije djeljivo s 45. Stoga, rješenje je

$n \in \{3, 5, 7, \dots\}, \quad \text{tj. } n \geq 3 \text{ je neparan.}$

(b) Dokažite da ne postoje brojevi $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$4^n + 5^n + 6^n = 15n^m + 12.$$

Rješenje.

Uočimo da je izraz s lijeve strane jednadžbe uvijek neparna, pa to mora biti i izraz s desne, što je slučaj samo kada je n neparan.

Po rezultatu (a) dijela zadatka, lijeva strana je za neparne n veće od 1 djeljiva s 45, pa i s 15, dok je desna strana uvijek kongruetna 12 modulo 15 pa tada nema rješenja. Direktnim uvrštavanjem $n = 1$ se vidi da ni tada nema rješenja.

Zadatak 4

Zadani su polinomi

$$f(x) = x^5 + x^4 - ax^3 - (b+6)x^2 + (4a+b-12)x + (3a+2b-6)$$

i

$$g(x) = (x+1)^2(x-2)(x-a).$$

(a) Odredite sve parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da najveća zajednička mjera od f i g ima dvostruku nultočku.

Rješenje. Kako $M(f, g)$ mora dijeliti polinom g , nužno je dvostruka nultočka od $M(f, g)$ neka višestruka nultočka polinoma g . Polinom g uvijek ima nultočku -1 kratnosti barem 2. Jedina druga mogućnost nastaje kada je $a = 2$, jer tada i nultočka 2 postaje dvostruka.

Prvi slučaj: nultočka -1 . Da bi -1 bila dvostruka nultočka od $M(f, g)$, nužno treba vrijediti

$$f(-1) = 0, \quad f'(-1) = 0.$$

Izravnim uvrštavanjem dobivamo da za sve a, b vrijedi

$$f(-1) = 0$$

Nadalje,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3ax^2 - 2(b+6)x + (4a+b-12),$$

pa je

$$f'(-1) = a + 3b + 1.$$

Prema tome

$$(x+1)^2 \mid f \iff a + 3b + 1 = 0.$$

Za sve takve parove $M(f, g)$ ima dvostruku nultočku -1 .

Napomenimo da u posebnom slučaju $a = -1$ polinom g ima trostruku nultočku -1 pa bi i $M(f, g)$ mogao imati trostruku nultočku. Iz uvjeta $a + 3b + 1 = 0$ slijedi $b = 0$, a

$$f''(-1) = 6a - 2b - 20 = -26 \neq 0,$$

pa je kratnost nultočke -1 u f upravo 2, odnosno u $M(f, g)$ također 2.

Drugi slučaj: nultočka 2. Ona može biti dvostruka nultočka polinoma g samo ako je $a = 2$. Imamo

$$f(2) = 3(a-2),$$

pa je za $a = 2$ automatski $f(2) = 0$. Nadalje,

$$f'(2) = -8a - 3b + 76.$$

Za $a = 2$ uvjet $f'(2) = 0$ postaje

$$60 - 3b = 0,$$

odakle je $b = 20$. Dakle dobivamo još par

$$(a, b) = (2, 20).$$

Konačno rješenje je

$$a + 3b + 1 = 0 \quad \text{ili} \quad (a, b) = (2, 20).$$

(b) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da polinom g pri dijeljenju s $x + a$ daje ostatak $a(1 - a)$.

Rješenje. Po teoremu o dijeljenju s ostatkom, ostatak pri dijeljenju polinoma g s $x + a = x - (-a)$ jednak je $g(-a)$. Zato treba riješiti

$$g(-a) = a(1 - a).$$

Izračunamo

$$g(-a) = (1 - a)^2(-a - 2)(-2a) = 2a(a + 2)(1 - a)^2.$$

Dakle

$$2a(a + 2)(1 - a)^2 = a(1 - a),$$

odnosno

$$a(1 - a)(2(a + 2)(1 - a) - 1) = 0.$$

Prva dva faktora daju

$$a = 0 \quad \text{ili} \quad a = 1.$$

Iz trećeg faktora dobivamo

$$2(a + 2)(1 - a) - 1 = 0,$$

što se svodi na

$$2a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Stoga

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Konačno,

$$a \in \left\{ 0, 1, \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \right\}.$$