

# Elementarna geometrija – rješenja 4. ispitnog roka

8. rujna 2026.

1. Budući da su  $B, D, C$  kolinearne točke te su  $B_1, D, C_1$  kolinearne točke, pri čemu je  $D$  između  $B_1$  i  $C_1$ , vrijedi

$$|B_1C_1| = |B_1D| + |DC_1| = |BD| + |DC| = |BC|.$$

U trokutima  $ADB$  i  $A_1DB_1$  vrijedi

$$|AD| = |A_1D|, \quad |DB| = |DB_1|, \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle A_1DB_1 \quad (\text{vršni kutovi}).$$

Stoga je  $\triangle ADB \cong \triangle A_1DB_1$  po poučku S–K–S, pa je  $|AB| = |A_1B_1|$ .

U trokutima  $ADC$  i  $A_1DC_1$  vrijedi

$$|AD| = |A_1D|, \quad |DC| = |DC_1|, \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle A_1DC_1 \quad (\text{zajednički kut}).$$

Stoga je  $\triangle ADC \cong \triangle A_1DC_1$  po poučku S–K–S, pa je  $|AC| = |A_1C_1|$ .

Prema tome,

$$|AB| = |A_1B_1|, \quad |BC| = |B_1C_1|, \quad |CA| = |C_1A_1|,$$

pa je konačno  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$  po S–S–S poučku o sukladnosti.

*Napomena.* Sukladnost se može izravno dokazati i preko S–K–S poučka o sukladnosti, koristeći da je  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D$ , što dobivamo iz prve sukladnosti. Također, postoji osna simetrija koja preslikava  $A$  u  $A_1$ ,  $B$  u  $B_1$  i  $C$  u  $C_1$ , što rješava zadatak jer je osna simetrija izometrija.

2. Iz  $|PA| = |PB|$  slijedi da je  $P$  na simetrali dužine  $AB$ . Budući da je  $O$  središte opisane kružnice, vrijedi i  $|OA| = |OB|$ , pa je i  $O$  na istoj simetrali. Zato je

$$OP \perp AB.$$

Analogno, iz  $|QA| = |QC|$  i  $|OA| = |OC|$  slijedi

$$OQ \perp AC.$$

Točke  $P, A, Q$  leže na pravcu okomitom na  $BC$ , pa je i  $PQ \perp BC$ . Kutovi između dvaju pravaca jednaki su kutovima između pravaca koji su na njih okomiti, stoga je

$$\sphericalangle POQ = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle OPQ = \sphericalangle ABC.$$

Prema poučku K–K slijedi

$$\triangle OPQ \sim \triangle ABC.$$

Budući da su  $M$  i  $N$  polovišta odgovarajućih stranica  $PQ$  i  $BC$ , vrijedi

$$\frac{|PM|}{|BN|} = \frac{|PQ|/2}{|BC|/2} = \frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|OP|}{|AB|}.$$

Uz  $\sphericalangle OPM = \sphericalangle ABN$  zato je  $\triangle OPM \sim \triangle ABN$  po poučku S–K–S. Slijedi  $\sphericalangle MOP = \sphericalangle NAB$ . Kako je  $OP \perp AB$ , dobivamo

$$\sphericalangle(OM, AN) = -\sphericalangle MOP + 90^\circ + \sphericalangle BAN = 90^\circ,$$

odnosno  $OM \perp AN$ .

*Napomena.* Dovoljno je uočiti da su odgovarajuće stranice dvaju sličnih trokuta međusobno okomite; tada su okomite i odgovarajuće težišnice.

3.

(a) Ne postoji. Površina upisane kružnice bila bi

$$13^2\pi = 169\pi \text{ cm}^2 > 507 \text{ cm}^2,$$

što je nemoguće jer se upisana kružnica nalazi unutar trokuta.

(b) Neka su  $a$  i  $b$  duljine kateta. Iz površine trokuta slijedi

$$\frac{ab}{2} = 507, \quad ab = 1014.$$

Za stranicu  $x$  kvadrata upisanog u pravi kut vrijedi sljedeće: trokut se sastoji od kvadrata površine  $x^2$  i dvaju pravokutnih trokuta čije su površine  $\frac{x(a-x)}{2}$  i  $\frac{x(b-x)}{2}$ . Zato je

$$\frac{ab}{2} = x^2 + \frac{x(a-x)}{2} + \frac{x(b-x)}{2} = \frac{x(a+b)}{2},$$

odakle je  $ab = x(a + b)$ , odnosno

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Kako je  $x = 13$ , dobivamo  $a + b = 78$ . Stoga su  $a$  i  $b$  rješenja jednadžbe

$$t^2 - 78t + 1014 = 0.$$

Jednadžba ima rješenja, dakle takav trokut postoji i ima katete duljina

$$\boxed{a = 39 - 13\sqrt{3} \text{ cm}}, \quad \boxed{b = 39 + 13\sqrt{3} \text{ cm}}.$$

4. Četverokut  $ABCD$  je tetivan, pa je

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 60^\circ.$$

Po poučku o sinusima u trokutu  $ABC$  dobivamo

$$|AC| = 2R \sin 120^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Primjenom poučka o kosinusu u trokutu  $ACD$  slijedi

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||CD| \cos 60^\circ,$$

odnosno  $|CD|^2 - 6|CD| - 12 = 0$ . Jedino je pozitivno rješenje

$$\boxed{|CD| = 3 + \sqrt{21} \text{ cm}}.$$

Analogno, u trokutu  $ABC$  vrijedi

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC| \cos 120^\circ,$$

pa je  $|AB|^2 + 3|AB| - 39 = 0$  i

$$\boxed{|AB| = \frac{-3 + \sqrt{165}}{2} \text{ cm}}.$$

5. Neka je  $V$  vrh piramide,  $ABCDEF$  pravilni šesterokut baze,  $O$  središte baze i  $|AB| = a$ . Budući da je  $|OA| = a$  i  $\sphericalangle VAO = 60^\circ$ , iz pravokutnog trokuta  $VAO$  slijedi

$$\cos 60^\circ = \frac{|OA|}{|VA|}, \quad |VA| = 2a.$$

Neka su  $M$  i  $N$  nožišta visina susjednih pobočki  $VAB$  i  $VBC$ . Ona su polovišta pripadnih bridova, pa je

$$|AM| = |BM| = |BN| = \frac{a}{2}, \quad |VM| = |VN| = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Kako je  $\sphericalangle MBN = \sphericalangle ABC = 120^\circ$ , poučak o kosinusu u trokutu  $BMN$  daje

$$|MN|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cos 120^\circ = \frac{3a^2}{4}.$$

Ako je  $\varphi = \sphericalangle MVN$ , tada iz trokuta  $VMN$  slijedi

$$\frac{3a^2}{4} = 2 \cdot \frac{15a^2}{4} - 2 \cdot \frac{15a^2}{4} \cos \varphi,$$

pa je

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{9}{10}}.$$