

Teme za diplomske radove za ak. godinu 2025/2026

PMF–Matematički odsjek

Popis tema

Adamović Dražen: Poluprosti prstenovi	1
Adamović Dražen: Weylove algebre	2
Adamović Dražen: Konačne grupe i njihove prezentacije	3
Antonić Nenad: Jednadžbe mješovitog tipa: Tricomijeva jednadžba	4
Antonić Nenad: Degenerirana difuzija	5
Antonić Nenad: Elementarna rješenja i Malgrange-Ehrenpreisov teorem	6
Arambašić Ljiljana: Primjena linearne algebre u biotehničkim znanostima	7
Arambašić Ljiljana: Konačni bazni okviri i njihovi duali	8
Bašić Matija: Simplicijalni skupovi	9
Bašić Matija: Logičko-kombinatorno zaključivanje u nastavi matematike	10
Bašić Matija: Klasificirajući prostor kategorije	11
Biočić Ivan: Integriranje na Banachovim prostorima u smislu Bochnera	12
Biočić Ivan: Semi-Markovljevi procesi u smislu Gihmana i Skorohoda	13
Bombardelli Mea: Geometrija na JBMO	14
Bombardelli Mea: Teorem o sedam kružnica	15
Bombardelli Mea: Trilinearne, tripolarne i srodne koordinate	16
Bosner Tina: Čebiševljevi prostori	17
Bosner Tina: Lukovi konika kao racionalne funkcije	18
Bosner Tina: Bézierove krivulje	19
Brückler Franka Miriam: Simetrije frizova i štapova	20
Brückler Franka Miriam: Omar Hajjam, pjesnik i matematičar	21

Brückler Franka Miriam: Obične diferencijalne jednačbe prvog reda u kemijskoj kinetici	22
Ciganović Igor: Adeli i ideli	23
Ciganović Igor: Konačna polja	24
Ciganović Igor: Reprezentacije konačnih grupa	25
Čižmešija Aleksandra: Modeli i učila u nastavi algebre u osnovnoj i srednjoj školi	26
Čižmešija Aleksandra: Koncept vrednovanja kao učenja u nastavi matematike	28
Drmač Zlatko: Otkrivanje anomalija u podacima pomoću difuzijskih preslikavanja	29
Dujella Andrej: Dicksonovi polinomi	30
Dujella Andrej: Eratostenovo sito	31
Goldstein Pavle: Analiza epidemioloških podataka	32
Hanzer Marcela: Moebiusova transformacija	33
Hanzer Marcela: Teorija reprezentacija konačnih grupa; Artinov teorem	34
Hanzer Marcela: Reprezentacije grupe $GL_2(F_q)$, gdje je F_q konačno polje	35
Igaly Goran, Klobučar Barišić Ana: Razvoj web-aplikacija pomoću aplikacijskog okvira Zend Framework	36
Igaly Goran, Klobučar Barišić Ana: Generiranje algoritama za rješavanje NP-teških problema pomoću AI alata	37
Igaly Goran, Klobučar Barišić Ana: Primjena AI alata u oblikovanju relacijskih baza podataka	38
Igaly Goran, Klobučar Barišić Ana: Razvoj distribuiranih aplikacija pomoću gRPC-a	39
Ilišević Dijana: Jordanovi homomorfizmi i derivacije	40
Ilišević Dijana: Povijest teorije Banachovih prostora i linearnih operatora	41
Ilišević Dijana: Karakterizacije funkcija funkcijskim jednačbama	42
Ilišević Dijana: Wignerov teorem	43
Jurak Mladen: Mrežno programiranje pomoću Boost.Asio biblioteke	44
Jurak Mladen: Ograničavajući volumeni u detekciji kolizija u video igrima	45
Kazalicki Matija: Kvantno računanje u srednjoj školi	46
Kazalicki Matija: Modularne forme i Lagrangeov teorem o četiri kvadrata	47

Kazalicki Matija: Problem broja klasa	48
Kozić Slaven: Analiza igre križić-kružić u afinoj ravnini	49
Kozić Slaven: Kristalografske grupe ravnine	50
Kozić Slaven: Geometrija točaka rešetke	51
Kozić Slaven: Kvantna determinanta	52
Kunštek Petar: Direktne numeričke metode za zadaće optimalnog upravljanja	53
Kunštek Petar: Čebiševljev centar	54
Kunštek Petar: Topološka derivacija i primjene	55
Ljulj Matko: Teorem teniskog reketa	56
Ljulj Matko: Numeričke simulacije u programskom paketu Elmer	57
Ljulj Matko: Mješovita formulacija za model elastične ljuske	58
Marušić Miljenko: Eksponencijalni integratori	59
Marušić Miljenko: Eksponencijalno prilagođene diferencijske sheme	60
Marušić Miljenko: Splajn kolokacija za singularno perturbirane rubne probleme	61
Marušić-Paloka Eduard: Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu	62
Marušić-Paloka Eduard: Uvod u varijacijski račun	63
Marušić-Paloka Eduard: Fundamentalna rješenja za paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe	64
Mihelčić Matej: Optimizacija bazirana na ponašanju somova kukavica	65
Mihelčić Matej: Optimizacija bazirana na ponašanju kitova	66
Mihelčić Matej: Optimizacija bazirana na ponašanju ptica kukavica	67
Mihelčić Matej: Inteligencija roja bazirana na ispaši ovaca	68
Mihelčić Matej: Ispitivanje inicijalizacijskih postupaka za algoritam CLUS-RM	69
Mlinarić Petar: Randomizirani algoritmi za aproksimaciju traga matrice	70
Mlinarić Petar: Racionalna aproksimacija interpolacijom i najmanjim kvadratima	71
Mlinarić Petar: Identifikacija nelinearnih dinamičkih sustava iz podataka metodom rijetkih najmanjih kvadrata	72
Mrazović Rudi: Električne mreže i povratnost slučajnih šetnji	73

Mrazović Rudi: Metoda sedlaste točke	74
Mrazović Rudi: Mali Picardov teorem i Brownovo gibanje	75
Muić Goran: Racionalna preslikavanja projektivnih mnogostrukosti	76
Muić Goran: Određivanje presjeka ravninskih krivulja zadanih implicitnim polinomijalnim jednadžbama	77
Muić Goran: Konstruktivni dokaz Hilbertovog teorema o nulama	78
Nakić Ivica: Kratkotrajna Fourierova transformacija	79
Nakić Ivica: Algoritmi najkraćeg puta	80
Paar Dalibor: Modeli u nastavi matematike i fizike - geometrijska tijela	81
Paar Dalibor: Digitalni mikroskop u nastavi fizike	82
Paar Dalibor: Novi pristupi razumijevanju energije u nastavi fizike	83
Pandžić Pavle: Proste kompleksne Liejeve algebre	84
Pandžić Pavle: Reprezentacije konačnih grupa	85
Pandžić Pavle: Konačne grupe refleksija	86
Pažanin Igor: Neizotermni tok fluida u poroznoj sredini	87
Pažanin Igor: Reynoldsov zakon	88
Pažanin Igor: Matematičko modeliranje demokratskih procesa	89
Pedić Tomić Veronika: Struktura i klasifikacijska uloga Cartanovih podalgebri u Liejevim algebrama	90
Pejković Tomislav: Kongruencije za Stirlingove i povezane brojeve	91
Pejković Tomislav: Melzakova formula	92
Pejković Tomislav: Simetrične funkcije u kombinatorici	93
Pezer Martina: Analiza koruptivnog rizika u javnoj nabavi	94
Radulović Marko: Homogenizacija ne-Newtonovskih fluida u poroznoj sredini	95
Radulović Marko: Matematičko modeliranje bioloških tkiva	96
Radunović Goran: Fraktalni skupovi generirani transformacijama	97
Radunović Goran: Egzistencija meromorfnihi funkcija i teorem o Riemannovom preslikavanju	98
Radunović Goran: Frakcionalni integro-diferencijalni račun i primjene	99
Radunović Goran: Bedford-McMullenovi sagovi	100

Radunović Goran: Multilinearni funkcionali i tenzori	101
Radunović Goran: Funkcije izvodnice i primjene	102
Resman Maja: Divergentni redovi i Gevreyeva sumabilnost	103
Resman Maja: Fundamentalna grupa	104
Resman Maja: Klasifikacija Riemannovih ploha i uniformizacijski teorem	105
Širola Boris: Grupe permutacija i matrice grupe	106
Širola Boris: Projektivni prostori i projektivne transformacije	107
Širola Boris: Harmonijske funkcije	108
Tambača Josip: Model štapa Naghdijevog tipa	109
Validžić Lucija: Izračunljivost realnih brojeva	110
Validžić Lucija: Grupe izometrija kompaktnih skupova u ravnini	111
Validžić Lucija: Savršeni skupovi	112
Validžić Lucija: Uređajna topologija	113
Vuković Mladen: Fragmenti logike prvog reda s konačno mnogo varijabli	114
Vuković Mladen: Složenost logika interpretabilnosti	115
Vuković Mladen, Perković Tin: Odlučivost logika interpretabilnosti	116
Živković Marko: Aksiom izbora	117
Živković Marko: Jonesov polinom	118
Živković Marko: Napredne strukture podataka	119

Mentor: Adamović Dražen

Poluprosti prstenovi

Područje: Algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Poželjno je predznanje iz algebarskih kolegija

Naslov na engleskom: Semisimple rings

Opis teme: U diplomskom radu bit će proučavani poluprosti prstenovi, poluproste algebre i njihovi primjeri. Ovisno o afinitetu studenta, naglasak će biti dan na strukturnu teoriju, konstrukciju ili klasifikaciju tih prstenova.

Literatura:

S. Lang, *Algebra*, Springer, 2002.

W. A. Adkins, S. H. Weintraub, *Algebra. An approach via module theory*, Springer, 1992.

Mentor: Adamović Dražen

Weylove algebre

Područje: Algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Poželjno je predznanje iz algebarskih kolegija

Naslov na engleskom: Weyl algebras

Opis teme: U diplomskom radu će se proučavati osnovne konstrukcije povezane s Weylovom algebrom. Weylova algebra bit će definirana kao kvocijent tenzorske algebre. Ovisno o afinitetu studenta, bit će proučavane kvantne Weylove algebre, teorija reprezentacija Weylovih algebri i veza s teorijom Liejevih algebri.

Literatura:

T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Vol. 131 of Graduate texts in mathematics, 2ed, Springer, 2001.

J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 30, AMS, 1997.

N. Jing, J. Zhang, *Quantum Weyl algebras and deformations of $U(G)$* , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 171, No. 2, 1995.

Mentor: Adamović Dražen

Konačne grupe i njihove prezentacije

Područje: Algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Poželjno je predznanje iz algebarskih kolegija

Naslov na engleskom: Finite groups and their presentations

Opis teme: U diplomskom radu proučavali bi se osnovni koncepti iz teorije konačnih grupa, te strukture vezane za njih. Poseban naglasak će biti dan na prezentacije konačnih grupa preko generatora i relacija. Ovisno o afinitetu studenta, proučavala bi se strukturna teorija nekih konačnih grupa, poput grupe permutacija, ili teorija re-prezentacija tih grupa.

Literatura:

S. Lang, *Algebra*, Springer, 2002.

W. A. Adkins, S. H. Weintraub, *Algebra. An approach via module theory*, Springer, 1992.

John D. Dixon, Brian Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate text in Mathematics, Springer, 1997

Mentor: Antonić Nenad

Jednadžbe mješovitog tipa: Tricomijeva jednadžba

Područje: parcijalne diferencijalne jednadžbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Parcijalne diferencijalne jednadžbe, Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, Mjera i integral

Naslov na engleskom: Equations of mixed type: the Tricomi equation

Opis teme: Tricomijeva jednadžba, koja mijenja tip, je jednostavan model za prijelaz iz podzvučnog toka u nadzvučni tok fluida. Kratak sažetak o jednadžbi može se naći u tekstu prve reference niže.

Literatura:

G-Q. Chen: The Tricomi Equation, <https://people.maths.ox.ac.uk/chengq/outline/TheTricomiEquation.pdf>

A. Kuzmin, *Boundary-value problems for transonic flow*, Wiley, 2002.

J. M. Rassias, *Lecture notes on mixed type partial differential equations*, World Scientific, 1990.

A. V. Bicadze, *Some classes of partial differential equations*, Gordon and Breach, New York, 1988.

Mentor: Antonić Nenad

Degenerirana difuzija

Područje: parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Parcijalne diferencijalne jednačbe, Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, Mjera i integral

Naslov na engleskom: Degenerate diffusion

Opis teme: Jednačba provođenja topline prototip je za paraboličke parcijalne diferencijalne jednačbe. Međutim, ponekad modeliranje realne pojave difuzije pokazuje druga svojstva, koja se mogu opisati nelinearnom jednačbom oblika $u_t = \operatorname{grad}(u^m)$. Za $m > 1$ imamo sporu difuziju (jednačbu porozne sredine), za $m_c < m < 1$ nadkritičnu brzu difuziju, a za $m \leq m_c$ podkritičnu brzu difuziju ($m_c = (d-2)_+/d$).

Literatura:

P. Daskalopoulos, C. E. Kenig, *Degenerate diffusion*, EMS, 2007.

Mentor: Antonić Nenad

Elementarna rješenja i Malgrange-Ehrenpreisov teorem

Područje: parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Elementary solutions and the Malgrange-Ehrenpreis theorem

Opis teme: Svaki netrivialni linearan parcijalni diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima na $\mathbf{R}^d$ ima elementarno (fundamentalno) rješenje. To je iskaz Malgrange-Ehrenpreisova teorema, koji se smatra prvim praktičnim uspjehom Schwartzove teorije distribucija. Naime, poznavanje elementarnog rješenja omogućuje jednostavno računanje rješenja nehomogene linearne jednačbe. S druge strane, ukoliko imamo varijabilne koeficijente, taj rezultat ne vrijedi.

Literatura:

Peter Wagner: *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Am. Math. Monthly, **116**(2009) 257–462

Jean-Pierre Rosay: *A Very Elementary Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Am. Math. Monthly, **98**(1991) 518–523

Norbert Ortner, Peter Wagner: *Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators: Theory and Practice*, Springer, 2015.

Mentor: Arambašić Ljiljana

Primjena linearne algebre u biotehničkim znanostima

Područje: Linearna algebra

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: Nema

Naslov na engleskom: Application of linear algebra in biotechnical sciences

Opis teme: Tema se bavi primjenom linearne algebre u biotehničkim znanostima, osobito u modeliranju rasta populacija i gospodarenju biološkim resursima. Poseban naglasak bit će na primjeni svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti matrica u analizi stabilnosti i dugoročnog ponašanja populacijskih modela.

Literatura:

H. Anton, C. Rorres, Elementary Linear Algebra: Applications Version, 8th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2000.

Lj. Arambašić, Linearna algebra, Element, Zagreb, 2022.

K. Borre, G. Strang, Linear Algebra, Geodesy, and GPS. Wellesley–Cambridge Press. 2012

S. J. Leon, Linear Algebra with Applications (9th ed.). Pearson. 2015

Mentor: Arambašić Ljiljana

Konačni bazni okviri i njihovi duali

Područje: Linearna algebra

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: Vektorski prostori

Naslov na engleskom: Finite frames and their duals

Opis teme: Bazni okvir za konačnodimenzionalni unitarni prostor H je niz $(x_n)_{n=1}^m$ u H takav da postoje konstante $A, B > 0$ tako da za sve $x \in H$ vrijedi $A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^m |(x|x_n)|^2 \leq B\|x\|^2$. Primjeri baznih okvira su ortonormirane baze za H , ali nije svaki bazni okvir ortonormirana baza (štoviše, bazni okviri nisu uvijek linearno nezavisni skupovi). Svaki vektor iz H se može rekonstruirati pomoću vektora baznog okvira $(x_n)_{n=1}^m$, to jest, postoji bazni okvir $(y_n)_{n=1}^m$ tako da je $x = \sum_{n=1}^m (x|y_n)x_n$ za sve $x \in H$; svaki takav bazni okvir (y_n) nazivamo dualom od (x_n) . U ovom radu proučavat ćemo svojstva baznih okvira s naglaskom na njihove dualne bazne okvire odnosno rekonstrukcije vektora.

Literatura:

- O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
- O. Christensen, *Frames and bases: An introductory course*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for undergraduates*, Providence, AMS, 2007.

Mentor: Bašić Matija

Simplicijalni skupovi

Područje: algebarska topologija, kombinatorika

Prikladno za studij: Teorijska matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Simplicial sets

Opis teme: Simplicijalni skupovi su kombinatorni model za topološke prostore čija primjena je zapravo mnogo šira od područja algebarske topologije. U radu će biti prezentirati uvod u teoriju simplicijalnih skupova (kategorijska definicija, produkt, Kanovi kompleksi i homotopske grupe) uz odabrane primjene.

Literatura:

G. Friedman, Survey article: An elementary illustrated introduction to simplicial sets, Rocky Mountain J. Math. 42(2): 353-423 (2012)

P. Goerss, J. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Springer, 2009.

G. Heuts, I. Moerdijk, Simplicial and dendroidal homotopy theory, Springer, 2022.

Mentor: Bašić Matija

Logičko-kombinatorno zaključivanje u nastavi matematike

Područje: kombinatorika, metodika nastave matematike

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Combinatorial reasoning in mathematics education

Opis teme: U diplomskom radu će se analizirati logičko-kombinatorno zaključivanje kao složeni misaoni proces koji se pojavljuje u raznim aspektima nastave matematike. Istražit će se poveznice kombinatorike s ostalim dijelovima matematike (algebra, geometrija, računarstvo) prema afinitetima studenata, uz prilagodbu određenih tema visokoškolske matematike za redovnu ili dodatnu nastavu. Osim na kombinatorne sadržaje, u diplomskom radu će se fokus staviti na ulogu logičkog zaključivanja i argumentiranja kao temeljnih procesa pri rješavanju problema.

Literatura:

Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, Combinatorial Reasoning and its Assessment, 1997.
Lamanna, Branchetti, Bolondi. Combinatorial reasoning in problem solving strategies: a pilot study with pre-service teachers. CERME13, 2023.
G. Rota, On the Foundations of Combinatorial Theory, 1964.
D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, 2001.
M. Bašić, Aha! Putovanje u središte problema, HMD, 2021.

Mentor: Bašić Matija

Klasificirajući prostor kategorije

Područje: Algebarska topologija

Prikladno za studij: Teorijska matematika

Preduvjeti: Algebarska topologija

Naslov na engleskom: Classifying space of a category

Opis teme: Teorija kategorija je nastala iz potreba algebarske topologije kako bi se stvorio formalizam za uspoređivanje različitih konstrukcija koje daju slične rezultate. Obratno, klasificirajući prostori kategorija omogućavaju proučavanje kategorija koristeći alate algebarske topologije. Posebni slučajevi uključuju klasificirajući prostor grupe kao važnog objekta u teoriji glavnih svežnjeva, odakle dolazi i naziv klasificirajući. U ovom radu će se prezentirati osnovne konstrukcije i primjene slijedeći temeljne ideje Daniela Quillena. Ovisno o afinitetima studenata veći naglasak će se staviti na teoriju svežnjeva, Grassmanijane, karakteristične klase, Bottovu periodičnost ili neke druge povezane kocepte.

Literatura:

D. Quillen, Higher Algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math, vol. 341, Berlin, New York, 1973.

P. G. Goerss, J. F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Modern Birkhäuser Classics, 1999.

I. Moerdijk, Classifying spaces and classifying topoi, Lecture Notes in Math., vol. 1616, Springer, 1995.

Mentor: Biočić Ivan

Integriranje na Banachovim prostorima u smislu Bochnera

Područje: Funkcionalna analiza, Teorija mjere i integracije

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Mjera i integral, normirani prostori

Naslov na engleskom: Integration in Banach spaces in the sense of Bochner

Opis teme: Ovaj diplomski rad proučava pojam Bochnerovog integrala kao generalizacije Lebesgueovog integrala na funkcije koje poprimaju vrijednosti u Banachovim prostorima. U radu se najprije iznose osnovni pojmovi teorije mjere i integracije realnih funkcija, a zatim se uvodi formalna definicija Bochnerovog integrala. Dokazuju se osnovna svojstva i teoremi: linearnost, osnovne nejednakosti, dominirani teorem konvergencije, derivacija primitivne funkcije. Na primjerima će se pokazati koje su razlike između Lebesgueovog integrala i Bochnerovog, te će posljednji dio rada biti posvećen praktičnoj vrijednosti Bochnerove integracije u funkcionalnoj analizi kroz moguće primjene u teoriji vjerojatnosti i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

Literatura:

J. Mikusiński. The bochner integral. Birkhäuser Basel, 1978.
N. Sarapa. Teorija vjerojatnosti. Školska knjiga, 2002.

Mentor: Biočić Ivan

Semi-Markovljevi procesi u smislu Gihmana i Skorohoda

Područje: Teorija vjerojatnosti, Slučajni procesi

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Markovljevi lanci, Slučajni procesi

Naslov na engleskom: Semi-Markov processes in the sense of Gihman and Skorokhod

Opis teme: Diplomski rad bavi se slučajnom šetnjom u neprekidnom vremenu pri čemu vremena čekanja u pojedinom stanju ne trebaju biti eksponencijalno distribuirana. Takvi procesi nisu Markovljevi, ali se mogu, dodajući neke informacije samom procesu, poput proteklog vremena od prošlog skoka, ili vremena do sljedećeg skoka, uložiti u višedimenzionalni proces koji postaje Markovljev. U ovom radu, obradit će se takvo ulaganje, poznato kao ulaganje u smislu Gihmana i Skorohoda. Proučiti će se svojstva dobivenog Markovljevog procesa, te moguće generalizacije na skalirajuće limese takvih slučajnih šetnji.

Literatura:

I. Gikhman i A. Skorokhod. The theory of stochastic processes II. Springer, 2004.

Mentor: Bombardelli Mea

Geometrija na JBMO

Područje: geometrija

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Geometry at JBMO

Opis teme: U redovnoj nastavi u osnovnoj školi učenici se upoznaju tek s osnovama geometrije, dok zadaci koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima, pogotovo međunarodnim, mogu biti poprilično složeni. Cilj je ovoga rada analizirati geometrijske zadatke s Juniorske balkanske matematičke olimpijade i utvrditi koji se pojmovi i teoremi koji izlaze izvan redovnog školskog gradiva pojavljuju. Student/studentica može odabrati jedan dio potrebnih znanja i pripremiti niz primjera i zadataka koji bi pomogli učenicima u pripremi za takve zadatke na natjecanjima na najvišem nivou.

Literatura:

zadaci s JBMO, HJMO te drugih domaćih i međunarodnih matematičkih natjecanja

Mentor: Bombardelli Mea

Teorem o sedam kružnica

Područje: geometrija

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: The seven circles theorem

Opis teme: Neka je $ABCDEF$ tetivni šesterokut čiji su vrhovi na kružnici k . Neka su k_A, k_B, k_C, k_D, k_E i k_F kružnice upisane u kružnicu k s diralištima u odgovarajućim točkama, pri čemu svaka od njih dira po dvije susjedne kružnice. Pokazuje se da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki - to je tvrdnja teorema o sedam kružnica. U ovom radu student/studentica će prikazati jedan ili više dokaza navedenog teorema i neke njegove posljedice.

Literatura:

Stanley Rabinowitz: The seven circles theorem, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 8, No. 7 (FALL 1987), pp. 441-449 (9 pages), <https://www.jstor.org/stable/24337749>

Adam Brown: A Connection between Brianchon's Theorem and the Seven Circles Theorem. The Mathematical Gazette, vol. 87, no. 510 (Nov., 2003), 569-572

Mentor: Bombardelli Mea

Trilinearne, tripolarne i srodne koordinate

Područje: geometrija

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Trilinear, tripolar and related coordinates

Opis teme: U geometriji trokuta često je korisno koristiti koordinate u odnosu na promatrani trokut. U ovom radu definirat će se i proučiti različiti sustavi koordinata u odnosu na referentni trokut: tripolarne, trilinearne, baricentrične i druge koordinate. Položaj točke T u ravnini referentnog trokuta ABC jednoznačno je određen svojim udaljenostima od vrhova trokuta $x = |TA|$, $y = |TB|$, $z = |TC|$, odnosno omjerom tih udaljenosti $x : y : z$. To su tzv. tripolarne koordinate. Trilinearne koordinate definiraju se na sličan način pomoću (orijentiranih) udaljenosti od pravaca BC , CA i AB . Srodne su i baricentrične i arealne koordinate. Pomoću uvedenih koordinata dokazat će se neki rezultati iz geometrije trokuta.

Literatura:

M. Starčević: Trilinearne koordinate točaka u ravnini, Matematičko-fizički list, vol. 69 No. 275, 2019.

A. Hess: Transforming Tripolar into Barycentric Coordinates, Forum Geometricorum, vol.15 (2015)

A. P. Hatzipolakis, F. van Lamoën, B. Wolk, P. Yiu: Concurrency of Four Euler Lines, Forum Geom. Vol. 1 (2001)

Mentor: Bosner Tina

Čebiševljevi prostori

Područje: Numerička matematika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Chebyshev spaces

Opis teme: Polinomi, a posljedično i polinomni splajnovi, se često koriste za razne aproksimacije. Međutim, u nekim primjenama polinomi se ne pokazuju kao najbolja opcija, već postoji potreba za drugim prostorima funkcija. Kao generalizacija prostora polinoma pojavljuje se nekoliko klasa Čebiševljevih prostora, od kojih neki nasljeđuju puno svojstava polinoma: od maksimalnog broja nultočaka do generalizacije Taylorovog teorem srednje vrijednosti. Takvi prostori su onda podloga za daljnje razvijanje prostora splajnova.

Literatura:

L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley, New York, 1981.

Mentor: Bosner Tina

Lukovi konika kao racionalne funkcije

Područje: Numerička matematika

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Conic arcs as rational functions

Opis teme: Konike, kao i njihovi lukovi, mogu se matematički prikazati na nekoliko načina. Međutim, većina njih nije pogodna za računalnu grafiku, gdje je bitna brzina računanja. U ovom radu opisao bi se izvod prikaza lukova konika kao racionalne funkcije, kao i brzi algoritam za računanja parametarski zadane konike pomoću racionalne funkcije.

Literatura:

E. Cohen, R. F. Riesenfeld, G. Elber, *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*, A K Peters, 2001.

Mentor: Bosner Tina

Bézierove krivulje

Područje: Numerička matematika

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Bézier curves

Opis teme: Bézierove i po dijelovima Bézierove krivulje koriste se već dugo vremena, naročito u kompjutorskoj grafici i kompjutorski potpomognutom dizajnu. Radi se zapravo o posebnoj polinomnoj bazi koja ima poželjna geometrijska svojstva i vrlo brz i stabilan algoritam za njihovo računanje. Takve krivulje koriste se i za aproksimiranje funkcija, a pomoću njih mogu se konstruirati i plohe.

Literatura:

E. Cohen, R. F. Riesenfeld, G. Elber, *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*, A K Peters, 2001.

Mentor: Brückler Franka Miriam

Simetrije frizova i štapova

Područje: euklidska geometrija, teorija grupa

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Euklidski prostori, Algebarske strukture

Naslov na engleskom: Symmetries of friezes and rods

Opis teme: Frizovi su geometrijski uzorci u ravnini, a štapovi u prostoru, koji posjeduju translacijsku simetriju u jednom smjeru. Ta translacijska simetrija ograničava moguće druge prisutne tipove simetrija, primjerice frizovi i štapovi ne mogu posjedovati rotacijske simetrije reda većeg od 2. Cilj ovog rada je opisati i klasificirati moguće grupe simetrija frizova i štapova, uz osvrt na povijest te klasifikacije.

Literatura:

- Brückler, F. M., Stilinović, Vladimir (2024). From Friezes to Quasicrystals: A History of Symmetry Groups. In Bharath Sriraman (ed.), Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Cham: Springer. pp. 1823-1863
- Conway, J.H., Burgiel, H., Goodman-Strauss, C. (2008) The symmetries of things. AK Peters, Wellesley
- Sibley, T. Q. (2015) Thinking Geometrically – a Survey of Geometries. The Mathematical Association of America
- Pólya, G. (1924) Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. Z. Kristall. 60:278–282
- Niggli, P. (1924) Die regelmäßige Punktverteilung längs einer Geraden in einer Ebene (Symmetrie von Bordürenmuster). Z. Kristall. 60:283–298
- Speiser, A. (1927) Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie, 2. Auflage edn. Springer Verlag, Berlin
- Hermann, C. (1929) XVII. Zur systematischen Strukturtheorie. III. Ketten- und Netzgruppen. Z. Kristall. 69:250–270
- Burckhardt, J.J. (1988) Die Symmetrie der Kristalle. Springer AG, Basel
- Jablan, S.V. (2002) Symmetry, ornament and modularity. World Scientific Publishing, Singapore
- Damjanović, M, Milošević, I (2010) Line groups in physics. Springer-Verlag, Berlin

Mentor: Brückler Franka Miriam

Omar Hajjam, pjesnik i matematičar

Područje: povijest matematike

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Povijest matematike

Naslov na engleskom: Omar Khayyam, poet and mathematician

Opis teme: Perzijanac Omar Hajjam jedna je od najistaknutijih ličnosti tzv. zlatnog doba islamske znanosti. Poznat je po svojim doprinosima matematici, astronomiji i filozofiji, ali i književnosti. Život mu je bio obilježen burnim razdobljem Seldžučkog carstva i Prvog križarskog rata. U ovom diplomskom radu će se uz opis njegove biografije i pregleda njegovih općih doprinosa kulturi i znanosti detaljno opisati Hajjamovi matematički doprinosi, s naglaskom na njegovo proširenje Al-Hvarizmijeve klasifikacije linearnih i kvadratnih jednadžbi na kubne jednadžbe i njegove metode rješavanja istih pomoću presjeka konika.

Literatura:

T. Bisom, *The Works of Omar Khayyam in the History of Mathematics*. The Mathematics Enthusiast 18(1) 290–305, 2021.

D. Kent, M. Sherman, *A GeoGebra Rendition of One of Omar Khayyam's Solutions for a Cubic Equation*. Convergence, 2015. <https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/a-geogebra-rendition-of-one-of-omar-khayyams-solutions-for-a-cubic-equation-introduction>

O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., *Omar Khayyam*. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews, 1999. <https://mathshistory.st-andr-ews.ac.uk/Biographies/Khayyam/>

E. D. Ross, H. A. R. Gibb, *The Earliest Account of 'Umar Khayyām*. Bulletin of the School of Oriental Studies. V (3): 467–473, 1929. doi:10.1017/S0041977X00084615

M. Vali Siadat, Alana Tholen, *Omar Khayyam: Geometric Algebra and Cubic Equations*. Math Horizons, 28:1, 12–15, DOI: 10.1080/10724117.2020.1770495

D. Struik, Omar Khayyam. Mathematics Teacher 4 (1958), 280–285

Mentor: Brückler Franka Miriam

Obične diferencijalne jednačbe prvog reda u kemijskoj kinetici

Područje: matematička analiza, primijenjena matematika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Obične diferencijalne jednačbe, Numerička matematika

Naslov na engleskom: Ordinary differential equations in chemical kinetics

Opis teme: U kemijskoj kinetici obične diferencijalne jednačbe prvog reda i njihovi sustavi koriste se za opisivanje kinetike reakcija i reakcijskih sustava. Cilj je ovog rada dati pregled osnovnih primjena običnih diferencijalnih jednačbi u kemijskoj kinetici, s naglaskom na konkretnim modelima i metodama rješavanja.

Literatura:

Mortimer, R. G.: Mathematics for Physical Chemistry, 3rd ed., Elsevier, 2005.
Scholz G., Scholz, F.: First-order differential equations in chemistry. ChemTexts (2014) 1:1, DOI [10.1007/s40828-014-0001-x](https://doi.org/10.1007/s40828-014-0001-x)
Póta, G.: Mathematical Problems for Chemistry Students. Elsevier, 2006.
Atkins, P., De Paula, J.: Physical Chemistry. Oxford University Press, 2006.
Brückler, F. M., Matematika 1 i 2 za kemičare, skripta, ak.g. 2024./25.

Mentor: Ciganović Igor

Adeli i ideli

Područje: Teorija brojeva

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Algebarske strukture

Naslov na engleskom: Adeles and ideles

Opis teme: Adeli i ideli predstavljaju konstrukciju u kojoj se sva upotpunjenja polja racionalnih brojeva promatraju zajedno kao jedan objekt.

Literatura:

S. Lang, *Algebraic Number theory*, Second Edition, Springer, 1984.

Mentor: Ciganović Igor

Konačna polja

Područje: Teorija brojeva

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Algebarske strukture

Naslov na engleskom: Finite fields

Opis teme: Zanima nas napraviti klasifikaciju konačnih polja, proučiti grupu automorfizama u smislu Galoisove teorije, te razmotriti neke reducibilnosti polinoma.

Literatura:

S. Lang, *Algebraic Number theory*, Second Edition, Springer, 1984.

Mentor: Ciganović Igor

Reprezentacije konačnih grupa

Područje: Reprezentacije grupa

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Representations of finite groups

Opis teme: Reprezentacija konačne grupe na konačno dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru je djelovanje grupe u smislu da imamo homomorfizam iz te grupe u grupu linearnih invertibilnih operatora danog vektorskog prostora. Osnovno svojstvo reprezentacija konačnih grupa je da se prostor može prikazati kao direktna suma ireducibilnih reprezentacija, odnosno invarijantnih potprostora koji ne sadrže manje invarijantne potprostore. U ovoj dekompoziciji je važna funkcija traga, odnosno karakter reprezentacije. Uvođenjem odgovarajućeg skalarnog produkta, karakteri ireducibilnih reprezentacija dane grupe su ortogonalni.

Literatura:

Representation Theory : A First Course / William Fulton, Joe Harris, New York <etc.> : Springer, 1991

Mentor: Čižmešija Aleksandra

Modeli i učila u nastavi algebre u osnovnoj i srednjoj školi

Područje: metodika nastave matematike

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: Ostvareni ECTS bodovi iz predmeta Metodika nastave matematike 1 i 2.

Naslov na engleskom: Models and manipulatives in teaching and learning algebra in lower and upper secondary school

Opis teme: Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog matematičkog obrazovanja učenici uče o različitim elementarnim algebarskim konceptima: varijablama, algebarskim izrazima i identitetima, nepoznanicama, jednažbama i njihovim sustavima i dr. Cilj diplomskog rada je istražiti najvažnije metodičke modele i učila koji mogu pozitivno pridonijeti učenju o ovim matematičkim konceptima i ponuditi konkretne primjere dobre prakse u njihovoj primjeni u nastavnim aktivnostima. Neka od učila koja će biti istražena su: algebarske pločice, geometrijske pločice, geoploče, vaga jednakih krakova.

Literatura:

Belenky, D. i Schalk, L. (2014). *The Effects of Idealized and Grounded Materials on Learning, Transfer, and Interest: An Organizing Framework for Categorizing External Knowledge Representations*. Educational Psychology Review, 26, 27–50.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y. i Goldstone, R. L. (2014). *Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review*. Educational Psychology Review, 26(1) Special Issue: Theoretical Perspectives and Empirical Relevant to Classroom Instruction with Manipulatives, 9–25.

Furner, J. M. i Worrell, N. L. (2017). *The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today*. Transformations, 3(1), Article 2. <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol3/iss1/2>

Gravemeijer, K. (2002). *Preamble: from Models to Modeling*. U K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers i L. Verschaffel (Ur.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, 7–22. Dordrecht, Nizozemska: Kluwer.

Golafshani, N. (2013). *Teachers' Beliefs and Teaching Mathematics with Manipulatives*. Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation, 36(3), 137–159.

C. Lund, *Math Explorations with a Geoboard*, IPMG Publishing, Eden Prairie, Minnesota, 2009.

Piccioto, H. (1999). *Geometry Labs. Activities for Grades 8 – 11*. <https://www.mathed.page/>

A. S. Posamentier, J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units*, Prentice Hall, 1998.

J. A. Van de Walle, K. S. Karp, J. M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 7th edition, Allyn & Bacon, 2009.

Mentor: Čižmešija Aleksandra

Koncept vrednovanja kao učenja u nastavi matematike

Područje: metodika nastave matematike

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: Ostvareni ECTS bodovi iz predmeta Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.

Naslov na engleskom: Concept of assessment as learning in mathematics education

Opis teme: U suvremenom poimanju obrazovnog procesa sve veća pažnja pridaje se tzv. formativnom vrednovanju, tj. vrednovanju čiji cilj nije ocijeniti učenička postignuća bročanom ocjenom, već pružiti pravovremenu i sadržajnu informaciju koja će učeniku pomoći poboljšati učenje, a nastavniku poučavanje. Jedan od glavnih koncepta vezanih uz formativno vrednovanje jest "vrednovanje kao učenje". Cilj diplomskog rada je, uz pomoć literature, teorijski opisati ovaj koncept te pokazati konkretne primjere dobre prakse u njegovoj primjeni u različitim sadržajnim područjima i aktivnostima u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.

Literatura:

E. Depka, *Designing Assessment for Mathematics*, 2. izdanje, Corwin Press, 2007.
 J. H. McMillan, *Classroom Assessment Principles and Practice for Effective Standards-Based Instruction*, 5. izdanje, Pearson New International Edition, Pearson Education, 2011.
 W. J. Popham, *Classroom assessment: What teachers need to know*, Prentice Hall, 2013.
 A. S. Posamentier, J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units*, Prentice Hall, 1998.
 C. R. Tobey, P. D. Keeley, *Mathematics Formative Assessment: 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning*, Corwin Press & NCTM, 2011.
 Materijali Shell Centre for Mathematical Education <http://map.mathshell.org>

Mentor: Drmač Zlatko

Otkrivanje anomalija u podacima pomoću difuzijskih preslikavanja

Područje: Strojno učenje, znanstveno računanje, numerička matematika

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: Teorija matrica, znanstveno računanje, programiranje

Naslov na engleskom: Anomaly detection using diffusion maps

Opis teme: Otkrivanje anomalija u podacima ima važne primjene npr. u medicinskoj dijagnostici, inženjerskim znanostima, strojnom učenju itd. Poseban problem je otkrivanje takvih anomalija u digitalnim snimkama (slika i video). U ovom radu se analizira metoda bazirana na difuzijskim preslikavanjima kojima se podatke reprezentira u novim koordinatama u kojima je detekcija anomalije lakši problem.

Rad na ovoj temi uključuje teoriju matrica i tenzora, numeričke metode, difuzijska preslikavanja, razvoj softwera. Za praktični dio je nužna vještina programiranja (Python s bibliotekama, Matlab i sl.). Sve proučavane metode će biti testirane na primjerima/podacima iz realnih aplikacija. Tema vrijedi samo za a.g.2025/26 i ne može se prenositi u sljedeću a.g.

Literatura:

1. G. Mishne, I. Cohen, Multiscale Anomaly Detection Using Diffusion Maps, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, Vol. 7, No. 1, 2013.
2. R. Coifman, S. Lafon, Diffusion maps, Applied and Computational Harmonic Analysis Vol. 21, No. 1, 2006, Pages 5-30.

Mentor: Dujella Andrej

Dicksonovi polinomi

Područje: Teorija brojeva, Kriptografija

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Računarstvo i matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Dickson polynomials

Opis teme: Dicksonovi polinomi $D_m(x, a)$ definiraju se formulom $D_m(z + \frac{a}{z}, a) = z^m + (\frac{a}{z})^m$ i mogu se shvatiti kao poopćenje poznatih Čebiševljevih polinoma. U radu će se obraditi osnovna svojstva Dicksonovih polinoma te neke od njihovih primjena u kriptografiji i algoritamskoj teoriji brojeva (modifikacija RSA kriptosustava, Dicksonovi pseudoprosti brojevi, optimalne normalne baze).

Literatura:

R. Lidl, G. L. Mullen, G. Turnwald, *Dickson Polynomials*, Longman, 1993.

A. Schinzel, *Polynomials with special regard to reducibility*, Cambridge University Press, 2000.

A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, 2019.

Mentor: Dujella Andrej

Eratostenovo sito

Područje: Teorija brojeva

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Računarstvo i matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Sieve of Eratosthenes

Opis teme: Eratostenovo sito je algoritam za dobivanje svih prostih brojeva manjih od unaprijed izabranoga prirodnog broja, kojeg je osmislio starogrčki matematičar Eratosten. Poznate su brojne inačice i generalizacije ovog sita, od kojih će se neke obraditi u ovom radu. Prikazat će se i kakve se informacije o distribuciji prostih brojeva mogu dobiti iz originalnog Eratostenovog sita te koji se problemi pritom javljaju.

Literatura:

A. C. Cojocar, M. Ram Murti, *An Introduction to Sieve Methods and Their Applications*, Cambridge University Press, 2005.

K. Ford, *Sieve Methods*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2023.

J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society, 2010.

G. Greaves, *Sieves in Number Theory*, Springer, 2001.

G. Harman, *Prime-Detecting Sieves*, Princeton University Press, 2007.

Mentor: Goldstein Pavle

Analiza epidemioloških podataka

Područje: statistika

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Bioinformatika, Statistika

Naslov na engleskom: Epidemiological Data Analysis

Opis teme: U radu će se metodama elementarne statistike proučavati razni epidemiološki podaci, kao smrtnost, višak smrtnosti, utjecaj cjepiva i lijekova, i slično. Proučavat će se podaci iz Hrvatske i susjednih zemalja.

Literatura:

Spiegel et al, Statistics

Mentor: Hanzer Marcela

Moebiusova transformacija

Područje: Kompleksna analiza; geometrija

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: položen kolegij Kompleksna analiza, položen kolegij Algebarske strukture

Naslov na engleskom: Moebius transformation

Opis teme: Problemi kompleksne analize su često jasniji ako ih prati geometrijski zor. S druge strane, Moebiusove transformacije, iako interesantne same po sebi, imaju i vrlo važnu ulogu u teoriji brojeva, i to putem modularnih formi.

U ovom radu će se dati osnove geometrije krugova u kompleksnoj ravnini (veza s hermitskim matricama), stereografske projekcije i zatim proučavati osnovna svojstva Moebiusove transformacije i njihovu klasifikaciju.

Literatura:

Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers: circle geometry, Moebius transformation, non-euclidean geometry*, Dover, 1979.

Mentor: Hanzer Marcela

Teorija reprezentacija konačnih grupa; Artinov teorem

Područje: Algebra; Teorija reprezentacija

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: položen kolegij Algebarske strukture, poželjno je da je položen i kolegij Algebra

Naslov na engleskom: Representation theory of finite groups; Artin's Theorem

Opis teme: Reprezentacije konačnih grupa su vrlo značajne za primjene u fizici ili kvantnoj kemiji, a u matematici su, zajedno s klasičnom harmonijskom analizom, ishodišna točka u razvoju teorije reprezentacija i drugih klasa grupa, npr. algebarskih. U radu bi se trebao dati osvrt na osnove teorije reprezentacija konačnih grupa, teoriju karaktera i osnovne koncepte (sume, tenzorski produkti, induciranje) uz analizu nekoliko primjera konkretnih grupa. U radu bi se trebali dokazati Artinov i Brauerov teorem, koji imaju značajnu ulogu u primjeni teorije reprezentacija, npr. u proučavanju L -funkcija.

Literatura:

J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer, 1977.

C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, 1962.

Mentor: Hanzer Marcela

Reprezentacije grupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$, gdje je $\mathbf{F}_q$ konačno polje

Područje: Algebra; Teorija reprezentacija

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: položen kolegij Algebarske strukture

Naslov na engleskom: Representations of the group $GL_2(\mathbf{F}_q)$, where $\mathbf{F}_q$ is a finite field

Opis teme: Opće linearne grupe (nad proizvoljnim poljima) čine jednu od najznačajnijih serija grupa koje se javljaju u najrazličitijim granama matematike. Najjednostavnije je razumjeti njihove reprezentacije ako je riječ o grupama koje su i konačne, dakle, nad konačnim poljima. U radu bi se prvo objasnili osnovni pojmovi vezani uz teoriju reprezentacija konačnih grupa nužni za razvoj teorije, posebno konjugacijske klase i karakteri. Naglasak u radu bi bio na korištenju tih osnovnih pojmova u eksplisnom izračunu svih ireducibilnih reprezentacija opće linearne grupe ranga 2 nad konačnim poljima.

Literatura:

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory – A first course*, Springer, 1991.

Mentor: Igaly Goran

Suvoditelj: Klobučar Barišić Ana

Razvoj web-aplikacija pomoću aplikacijskog okvira Zend Framework

Područje: Softversko inženjerstvo, Mreže računala, Baze podataka

Prikladno za studij: Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: xxx Development of web applications by using the Zend Framework application framework

Opis teme: Aplikacijski okvir (*application framework*) naziv je za integrirani skup klasa koje međusobno surađuju i grade zajedničku arhitekturu za porodicu sličnih aplikacija. Aplikacijski okvir možemo promatrati kao kostur buduće aplikacije ili nedovršenu aplikaciju - da bismo ga pretvorili u stvarnu aplikaciju moramo na neki način dovršiti njegov programski kod. Tri poznata okvira koji služe za razvoj web-aplikacija su Django, Zend Framework i Ruby on Rails. U radu treba opisati svojstva, mogućnosti i način korištenja okvira Zend Framework. Zatim u praktičnom dijelu rada treba uz pomoć Zend Framework razviti vlastitu web-aplikaciju koja se služi dinamičkim web stranicama i povezana je s bazom podataka.

Literatura:

A. Omelak: Zend Framework 3 - Developer's Guide. CreateSpace Independent Publishing Platform, Scotts Walely CA, 2018.

C. Valles: Zend Framework 2 Application Development. Pact Publishing, Birmingham, UK, 2013.

J. Callars: Zend Framework 2 Cookbook. Pact Publishing, Birmingham, UK, 2014.

Zend Technologies: Zend Framework Official Webpage. <https://framework.zend.com>, pristupljeno 17.09.2024.

Mentor: Igaly Goran**Suvoditelj:** Klobučar Barišić Ana

Generiranje algoritama za rješavanje NP-teških problema pomoću AI alata

Područje: Oblikovanje i analiza algoritama, Optimizacija**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika**Preduvjeti:** nema**Naslov na engleskom:** Generating algorithms for solving NP-hard problems by using AI tools

Opis teme: Generativni AI alati mogu iz opisa na prirodnom jeziku proizvesti pseudokod ili gotove algoritme. Dok se na jednostavnim primjerima uglavnom dobivaju ispravna rješenja, otvoreno je pitanje koliko su takvi alati korisni kod složenih, NP-teških problema. U ovom radu istražiti će se može li izabrani AI alat na temelju verbalne specifikacije generirati algoritme, heuristike ili aproksimacijske metode za probleme poput problema ranca (Knapsack), problema trgovačkog putnika (TSP) ili problema neovisnog skupa u grafu. Student će osmisлити skup takvih problema, formulirati ih u prirodnom jeziku, generirati rješenja pomoću AI-a te ih testirati na primjerima različite veličine. Rezultati će se usporediti s poznatim implementacijama i heuristikama iz literature, a analizirat će se ispravnost, efikasnost i kvaliteta dobivenih rješenja, kao i tipične pogreške i ograničenja generiranih algoritama.

Literatura:

M. R. Garey, D. S. Johnson: Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman, San Francisco CA, 1979.

T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms, 3rd Edition. MIT Press, Cambridge MA, 2009.

B.Korte, J.Vygen: Combinatorial Optimization - Theory and Algorithms, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2012.

OpenAI: ChatGPT Documentation. <https://platform.openai.com/docs> (pristupljeno 25.08.2025).

Mentor: Igaly Goran

Suvoditelj: Klobučar Barišić Ana

Primjena AI alata u oblikovanju relacijskih baza podataka

Područje: Baze podataka

Prikladno za studij: Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Application of AI tools in the design of relational databases

Opis teme: Generativni AI alati sve se češće koriste za pomoć pri razvoju baza podataka. Jedna od mogućnosti jest automatsko generiranje relacijske sheme iz neformalnog tekstualnog opisa te pisanje SQL upita na temelju verbalne specifikacije. U okviru rada istražiti će se mogućnosti i ograničenja takvog pristupa. Analizirat će se u kojoj mjeri je izabrani AI alat sposoban proizvesti ispravne i konzistentne relacijske sheme, te kako se snalazi s jednostavnim i složenim SQL upitima. Posebna pažnja posvetit će se razlikama između tipičnih (jednostavnijih) primjera poput informacijskog sustava knjižnice odnosno kompleksnijih primjera poput bolničkog informacijskog sustava. U praktičnom dijelu rada potrebno je definirati skup testnih specifikacija, koristiti AI alat za generiranje shema i upita te provjeriti ispravnost i učinkovitost generiranih rješenja.

Literatura:

R. Elmasri, S.B. Navathe: Fundamentals of Database Systems, 7th Edition. Pearson Education Inc, Boston MA, 2016.

R. Manger: Baze podataka, drugo izdanje. Element, Zagreb, 2018.

Oracle Corporation: SQL Language Reference. <https://docs.oracle.com> (pristupljeno 25.08.2025).

OpenAI: ChatGPT Documentation. <https://platform.openai.com/docs> (pristupljeno 25.08.2025).

Mentor: Igaly Goran

Suvoditelj: Klobučar Barišić Ana

Razvoj distribuiranih aplikacija pomoću gRPC-a

Područje: Softversko inženjerstvo, Distribuirani procesi

Prikladno za studij: Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Development of distributed applications using gRPC

Opis teme: Google Remote Procedure Call (gRPC) je moderni okvir otvorenog koda koji omogućuje učinkovitu komunikaciju između distribuiranih aplikacija. Temeljen je na Protobuf (Protocol Buffers) formatu za serijalizaciju podataka, što omogućuje brzu i jezično-neutralnu razmjenu poruka između različitih sustava. gRPC podržava sinkronu i asinkronu komunikaciju, streaming podataka u oba smjera, te je optimiziran za rad u mikroservisnim arhitekturama i cloud okruženjima. U radu je potrebno opisati arhitekturu gRPC-a, njegove prednosti i nedostatke u odnosu na starije tehnologije poput Java RMI-ja i SOAP-a, te razmotriti tipične scenarije primjene poput mikroservisa, serverless sustava, IoT-a. U praktičnom dijelu rada treba razviti distribuiranu aplikaciju sastavljenu od više mikroservisa koji komuniciraju pomoću gRPC-a.

Literatura:

V. Kulkarni, A. Deshpande: gRPC Up and Running. O'Reilly Media, Sebastopol CA, USA, 2020.

gRPC Authors: gRPC Documentation. <https://grpc.io/docs> (pristupljeno 25.08.2025).

C. Richardson: Microservices Patterns. Manning Publications, Shelter Island NY, 2019.

Google Cloud: Protocol Buffers Documentation. <https://protobuf.dev> (pristupljeno 25.08.2025).

Mentor: Ilišević Dijana

Jordanovi homomorfizmi i derivacije

Područje: Algebra

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Kolegiji "Algebra 1 i 2" ili "Algebarske strukture"

Naslov na engleskom: Jordan homomorphisms and derivations

Opis teme: Aditivno preslikavanje f s prstena R u prsten R' se naziva homomorfizam ako je $f(ab) = f(a)f(b)$ za sve $a, b \in R$, antihomomorfizam ako je $f(ab) = f(b)f(a)$ za sve $a, b \in R$, a Jordanov homomorfizam ako je $f(a^2) = f(a)^2$ za sve $a \in R$. Aditivno preslikavanje $f: R \rightarrow R$ se naziva derivacija ako je $f(ab) = f(a)b + af(b)$ za sve $a, b \in R$, a Jordanova derivacija ako je $f(a^2) = f(a)a + af(a)$ za sve $a \in R$. Očigledno je svaki (anti)homomorfizam ujedno i Jordanov homomorfizam, a svaka derivacija ujedno i Jordanova derivacija. Obrati ovih tvrdnji su u posljednjih pedesetak godina bili predmetom proučavanja mnogih matematičara i općenito ne vrijede. Zadatak ovog diplomskog rada je opisati strukturu Jordanovih homomorfizama i Jordanovih derivacija u nekim posebnim slučajevima.

Literatura:

P. Ara, M. Mathieu, *Local multipliers of C^* -algebras*, Springer-Verlag, London, 2003.
 M. Brešar, *Jordan mappings of semiprime rings*, J. Algebra 127 (1989), 218–228
 I. N. Herstein, *Topics in ring theory*, Univ. of Chicago, Chicago, 1969.
 T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of $*$ -algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Mentor: Ilišević Dijana

Povijest teorije Banachovih prostora i linearnih operatora

Područje: Povijest matematike, Teorija operatora

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Kolegij "Normirani prostori"

Naslov na engleskom: History of the Banach space theory and linear operators

Opis teme: Zadatak ovog diplomskog rada je opisati povijest teorije Banachovih prostora i linearnih operatora. S obzirom na to da pisanje o povijesti matematičke teorije zahtijeva navođenje preciznih definicija i rezultata, kao i nekih tipičnih dokaza, to se očekuje i u ovom radu.

Literatura:

R. Duda, *Pearls from a lost city: The Lvov school of mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2007.
S. Banach: *remarcable life, briliant mathematics / biographical materials*, uredili E. Jakimowicz i A. Miranowicz, Gdansk University Press, Gdansk, 2010.

Lvov mathematical school in the period 1915-45 as seen today, uredili B. Bojarski, J. Lawrynnowicz i Y.G. Prytula, Polish academy of science, Institut of mathematics, Warszawa, 2009.

Mentor: Ilišević Dijana

Karakterizacije funkcija funkcijskim jednadžbama

Područje: Matematička analiza

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Characterization of functions by functional equations

Opis teme: Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. Pomoću funkcijskih jednadžbi mogu se karakterizirati različite funkcije, od elementarnih (kao što su eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske,...) do posebnih (gama funkcija, beta funkcija, Riemannova zeta funkcija,...). Zadatak ovog diplomskog rada je izložiti takve karakterizacije.

Literatura:

C. Efthimiou, *Introduction to functional equations*, MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

P. Kannappan, *Functional equations and inequalities with applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

P.K. Sahoo, P. Kannappan, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

Mentor: Ilišević Dijana

Wignerov teorem

Područje: Funkcionalna analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Kolegij "Normirani prostori"

Naslov na engleskom: Wigner's theorem

Opis teme: Neka su $(H, (\cdot, \cdot))$ i $(K, (\cdot, \cdot))$ unitarni prostori nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ te neka je $f: H \rightarrow K$ preslikavanje koje zadovoljava

$$|(f(x), f(y))| = |(x, y)|, \quad x, y \in H.$$

Poznati Wignerov teorem kaže da je f rješenje gornje funkcijske jednadžbe ako i samo ako je f fazno ekvivalentna nekoj linearnoj ili antilinearnoj izometriji U , to jest,

$$f(x) = \sigma(x)Ux, \quad x \in H,$$

gdje je $\sigma: H \rightarrow \mathbb{F}$, $|\sigma(x)| = 1$, $x \in H$, tzv. fazna funkcija. Ovaj čuveni rezultat igra važnu ulogu u kvantnoj mehanici i teoriji reprezentacija u fizici, a u ovom radu izložit će se neke njegove verzije s dokazima.

Literatura:

G. Chevalier, *Wigner's theorem and its generalizations*, u: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, Elsevier, 2007, str. 429–475.
i reference iz ovog preglednog rada

Mentor: Jurak Mladen

Mrežno programiranje pomoću Boost.Asio biblioteke

Područje: Računarstvo

Prikladno za studij: Računarstvo i matematika

Preduvjeti: Operacijski sustavi, Objektno programiranje (C++)

Naslov na engleskom: Network programming with Boost.Asio library

Opis teme: Boost.Asio je biblioteka za mrežno programiranje u C++-u. U radu treba opisati arhitekturu i način korištenja biblioteke te implementirati web server korištenjem Boost.Asio sučelja.

Potrebno je kratko opisati TCP i UDP protokole te zatim HTTP protokol. Centralni dio radnje predstavlja implementaciju http klijenta i http servera u programskom jeziku C++. Server može i ne mora koristiti više programskih niti ali mora koristiti C++20 korutine. Kao osnovnu treba koristiti dokumentaciju Boost.Asio biblioteke. Dodatno se mogu koristiti knjige [1] i [2] te resursi na web-u.

Literatura:

1. Boost.Asio C++ Network Programming Cookbook, Pact Publishing, 2016.
2. Boost.Asio C++ Network Programming - Second Edition, Pact Publishing, 2015.
3. Dokumentacija za Boost.Asio

Mentor: Jurak Mladen

Ograničavajući volumeni u detekciji kolizija u video igrama

Područje: Geometrija i računarstvo

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Bounding volumes in collision detection in video games

Opis teme: U detekciji kolizija u video igrama važnu ulogu imaju ograničavajući volumeni. Oni omogućavaju efikasnu detekciju kolizija kompleksnih likova tako što se problem kolizije likova zamijenjuje problemom kolizije njihovih ograničavajućih volumena. Ograničavajući volumeni mogu imati različite oblike: sfere, kvadri i slično. Jednostavniji oblici dozvoljavaju bržu ali manje preciznu detekciju kolizija, dok složeniji oblici daju preciznije rezultate, ali traže veću količinu računanja.

Potrebno je proučiti najčešće korištene ograničavajuće volumene i algoritme za detekciju njihovih kolizija. Pored teorijskog dijela potrebno je demonstrirati opisane tehnike u softveru. Pri tome se može koristiti programski jezik python i biblioteka pygame, ili C++ i biblioteka SFML ili bilo koja druga softverska okolina u kojoj se kolizije mogu grafički prikazati.

Za temeljnu literaturu treba uzeti knjigu [1] poglavlja 4 i 5.

Literatura:

- 1.Christer Ericson: Real-Time collisionDetection, Elsevier, 2005.
- 2.Gabor Szauer: Game Physics Cookbook, Packt Publishing, 2017.
- 3.Resursi na internetu.

Mentor: Kazalicki Matija

Kvantno računanje u srednjoj školi

Područje: računarstvo

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Quantum computing for high-school students

Opis teme: Cilj ovog diplomskog je objasniti osnovne pojmove iz kvantnog računarstva (qubit, kvantna vrata, mjerenje) na način pristupačan srednjoškolcima te na IBM Quantum Experience kvantnom računalu implementirati neki osnovni algoritam (npr. Deutschov algoritam).

Literatura:

M. Kazalicki, Kvantno računanje, https://web.math.pmf.unizg.hr/~mkazal/reprints/skripta_kvantno.pdf

Mentor: Kazalicki Matija

Modularne forme i Lagrangeov teorem o četiri kvadrata

Područje: Teorija brojeva

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: Kompleksna analiza

Naslov na engleskom: Modular forms and Lagrange's four-square theorem

Opis teme: Cilj ovog diplomskog rada je obraditi osnove teorije klasičnih modularnih formi (modularna grupa i modularne krivulje, kusp forme, Eisensteinovi redovi, dimenzije prostora modularnih formi, theta funkcije). Ta teorija bi se onda primijenila za dokazivanje Lagrangeovog teorema, tj. na određivanje formule za broj prikaza prirodnog broja kao sume četiri kvadrata.

Literatura:

F. Diamond, J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Springer, 2005.

Mentor: Kazalicki Matija

Problem broja klasa

Područje: Teorija brojeva

Prikladno za studij: Teorijska matematika

Preduvjeti: Algebarska teorija brojeva

Naslov na engleskom: The class number problem

Opis teme: Problem broja klasa je slavan problem koji je postavio Gauss. Treba odrediti sva kvadratno imaginarna polja s brojem klasa 1. Problem je riješio Heegner (1952), ali njegov dokaz nije bio prihvaćen sve do 1969. Cilj ovog diplomskog je izložiti Heegnerov dokaz koji koristi modularne funkcije i teoriju kompleksnog množenja.

Literatura:

D. A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$* , A Wiley–Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Mentor: Kožić Slaven

Analiza igre križić-kružić u afinoj ravnini

Područje: Kombinatorika, teorija grafova

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Analysis of the Tic-tac-toe game on the affine plane

Opis teme: Afina ravnina predstavlja generalizaciju pojma euklidske ravnine. Glavni cilj ovog diplomskog rada je proučiti osnovna svojstva igre križić-kružić u konačnim afinim ravninama s posebnim naglaskom na ispitivanje pobjedničkih strategija te uspostavljanje veze s latinskim kvadratima. Ovisno o afinitetu studenta, dio rada može biti posvećen naprednijim rezultatima vezanim uz igru na afinoj ravnini reda 4 ili njevoj generalizaciji na druge matematičke objekte poput grafa ili hiperkocke.

Literatura:

R. A. Beeler, *Tic-Tac-Toe on Graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **72** (2018), 106–112.

J. Beineke, J. Rosenhouse, *The Mathematics of Various Entertaining Subjects*, Princeton University Press 2016.

P. Danziger, M. A. Huggan, R. Malik, T. G. Marbach, *Tic-Tac-Toe on an Affine Plane of order 4*, Australasian Journal of Combinatorics, **82** (2022), 21–30.

S. W. Golomb, A. W. Hales, *Hypercube Tic-Tac-Toe*, MSRI Publications **42** (2002), 167–182.

Mentor: Kožić Slaven

Kristalografske grupe ravnine

Područje: Geometrija, teorija grupa

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Plane Crystallographic Groups

Opis teme: Skup svih izometrija euklidske ravnine, s obzirom na operaciju kompozicije, čini grupu. *Kristalografske grupe ravnine* čine jednu istaknutu klasu njenih podgrupa koje se mogu vizualizirati popločavanjima euklidske ravnine. Cilj ovog diplomskog rada je proučiti osnovna svojstva kristalografskih grupa te potom detaljno prezentirati njihovu klasifikaciju, prema kojoj postoji točno 17 takvih (neizomorfnih) grupa. Ovisno o afinitetu studenta, dio rada može biti posvećen prezentaciji kristalografskih grupa ili nekim drugim istaknutim podgrupama grupe izometrija euklidske ravnine.

Literatura:

M. A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer, 2011.

H. Burgiel, J. H. Conway, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, CRC Press, 2008.

Branko Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman and Company, 1987.

Mentor: Kožić Slaven

Geometrija točaka rešetke

Područje: Geometrija, diskretna matematika

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Lattice Point Geometry

Opis teme: Skup $\mathbb{Z}^2$ svih točaka ravnine $\mathbb{R}^2$ s cjelobrojnim koordinatama čini *rešetku*. Cilj ovog diplomskog rada je dati pregled osnovnih pojmova i nekih zanimljivih problema iz područja geometrije rešetke. Nakon toga, u radu bi se proučavali neki fundamentalni rezultati iz tog područja, kao što su *Gaussov teorem* o broju točaka rešetke na i unutar kružnice, *Pickov teorem* o površini mnogokuta čiji su vrhovi točke rešetke, *Teorem Minkowskog* o točkama rešetke unutar ograničenog konveksnog područja i sl., i njihove primjene i generalizacije.

Literatura:

A. Barvinok, *Integer Points in Polyhedra*, European Mathematical Society, 2008.

T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, The Johns Hopkins University Press, 2009.

J. D. Sally, P. J. Sally, *Roots to Research, A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007.

Mentor: Kožić Slaven

Kvantna determinanta

Područje: Algebra

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Quantum determinant

Opis teme: Standardna definicija determinante $\det: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ iz linearne algebre se može prirodno generalizirati na određene (nekomutativne) asocijativne algebre A tako da dobijemo funkciju $\det: M_n(A) \rightarrow A$. Takvu funkciju nazivamo *kvantnom determinantom*. Pokazuje se da se slika $\det(M_n(A))$ kvantne determinante nalazi u centru od A . Cilj ovog diplomskog rada je proučiti primjenu kvantne determinante u konstrukciji centralnih elemenata određene klase kvantnih algebri, tzv. (*zakrenutih*) *Yangijana tipa A*.

Literatura:

A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, American Mathematical Society 2007.

Mentor: Kunštek Petar

Direktne numeričke metode za zadaće optimalnog upravljanja

Područje: Optimalno upravljanje

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Direct Numerical Methods for Optimal Control Problems

Opis teme: U ovom radu proučavaju se zadaci optimalnog upravljanja opisani sustavima običnih diferencijalnih jednažbi. Direktnim numeričkim metodama nazivamo sve numeričke metode koje uključuju numeričko rješavanje problema optimalnog upravljanja na sljedeći način: bez primjene bilo kojeg nužnog uvjeta za optimalnosti, odabire se diskretizacija funkcije stanja i funkcije upravljanja. Cilj rada je opisati metodu unutrašnje točke IPOPT za nelinearno programiranje velikih dimenzija te pomoću nje riješiti probleme optimalnog upravljanja.

Literatura:

Andreas Wächter, Biegler T. Lorenz *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*, Mathematical programming 106 (2006): 25-57.

Jean-Baptiste Caillaud, Roberto Ferretti, Emmanuel Trélat, Hasnaa Zidani, *Numerics for finite-dimensional optimal control problems*, 2022.

Bruce Craven. *Control and optimization*, Chapman, 1995.

Yalcin Kaya, *Optimal control*, Lecture notes, University of south Australia, 2007.

Mentor: Kunštek Petar

Čebiševljev centar

Područje: Linearna algebra

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Chebyshev Center

Opis teme: Problem Čebiševljevog centra skupa sastoji se od pronalaska najveće kugle u danom skupu čiji centar zovemo Čebiševljevim centrom skupa. Pritom pretpostavljamo da je skup kojemu tražimo Čebiševljev centar definiran kao presjek konačno mnogo poluprostora u $\mathbb{R}^d$. U ovom diplomskom radu cilj je problem zapisati kao problem linearne optimizacije i pronaći Čebiševljev centar poliedra koristeći simpleks algoritam.

Literatura:

Gärtner B., *Geometric optimization*, Equinoctial School on Geometric Computing, ETH Zürich, 1997.

Boyd, S. P., Vandenberghe, L., *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.

Čaklović L., *Geometrija linearnog programiranja*, Element, 2010.

Mentor: Kunštek Petar

Topološka derivacija i primjene

Područje: Optimalno upravljanje, optimalni dizajn

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Topological Derivative and Applications

Opis teme: Topološke derivacije predstavljaju jedan od alata u analizi optimizacije oblika. Funkcional ovisi o danoj domeni, najčešće indirektno kroz rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe. Topološka derivacija funkcionala daje način da se opiše asimptotsko ponašanje funkcionala ukoliko se u domeni pojavi mala perturbacija, poput šupljine unutar postojeće strukture.

Literatura:

Samuel Amstutz *An introduction to the topological derivative* Engineering Computations 39.1 (2022): 3-33.

Antonio André Novotny, Jan Sokołowski *An introduction to the topological derivative method* New York: Springer International Publishing, 2020.

Mentor: Ljulj Matko

Teorem teniskog reketa

Područje: Matematičko modeliranje, Obične diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Tennis racket theorem

Opis teme: Teorem teniskog reketa (eng. *tennis racket theorem* ili *intermediate axis theorem*) rezultat je iz klasične mehanike koji opisuje kretanje krutog tijela s tri različite glavne inercijske osi. Ovaj teorem opisuje sljedeći efekt: rotacija objekta oko njegovih prvih i trećih glavnih osi inercije je stabilna, dok rotacija oko njegove druge glavne osi (ili osi između) nije stabilna. Ime je dobio zato što se može demonstrirati tako da se primi teniski reket za dršku, te ga se baci u zrak tri puta, svaki put oko neke druge osi. U dva slučaja reket će se rotirati isključivo oko te osi, dok će se u trećem rotirati i oko još neke osi. Ovaj eksperiment može se izvesti s bilo kojim objektom koji ima tri različite inercijske osi, na primjer s knjigom, daljinskim upravljačem ili pametnim telefonom. U radu će se obraditi teorija iza ovog rezultata te pokazati sami rezultat.

Literatura:

M.S. Ashbaugh, C.C. Chicone, R.H. Cushman, *The twisting tennis racket*, J Dyn Diff Equat **3**, 67–85 (1991).

https://en.wikipedia.org/wiki/Tennis_racket_theorem

Mentor: Ljulj Matko

Numeričke simulacije u programskom paketu Elmer

Područje: Numerička matematika, Parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Numerical simulations in the Elmer software package

Opis teme: Elmer je softver razvijen od strane CSC – IT Center for Science (finskog centra za znanost) te služi za rješavanje fizikalnih problema (u elastičnosti, mehanici fluida, akustici, magnetizmu...) metodom konačnih elemenata. Besplatan je te uključuje grafičko sučelje (GUI), što ga čini jednostavnim za korištenje čak i za one koji nemaju predznanja o numeričkom rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi. U ovom radu prezentirat će se korištenje tog paketa na konkretnim primjerima uključujući onima u elastičnosti.

Literatura:

CSC – IT Center for Science LTD, *Elmer*, <https://www.csc.fi/web/elmer/>

M. Jurak, *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2006.

Mentor: Ljulj Matko

Mješovita formulacija za model elastične ljuske

Područje: Parcijalne diferencijalne jednačbe, Numerička analiza

Prikladno za studij: Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Mixed formulation for the elastic shell model

Opis teme: Linearni model ljuske Naghdijeva tipa koji su prezentirali Tambača i Tutek 2016. dobro je definiran model za ljuske kojima je srednja ploha parametrizirana Lipschitz-neprekidnom funkcijom. Međutim, varijacijska formulacija u modelu sadrži dva člana koja su množena faktorom h i h^3 , redom (gdje je h parametar debljine ljuske), što prilikom numeričkog rješavanja može dovesti to grešaka za male h . Zato se za ovaj model može izvesti mješovita formulacija kojom bi se numerička aproksimacija učinila stabilnijom. Cilj ovog rada je implementirati mješovitu formulaciju te napraviti odgovarajuću analizu.

Literatura:

M. Jurak, *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2006.

J. Tambača, Z. Tutek, A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity, *Applied Mathematical Modelling* 40 (2016), 23-24, 10549-10562.

F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.

Mentor: Marušić Miljenko

Eksponencijalni integratori

Područje: numerička matematika

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Exponential integrators

Opis teme: U diplomskom radu treba prikazati i usporediti nekoliko eksponencijalno prilagođenih metoda koje se primjenjuju za numeričko rješavanje inicijalnog problema za obične diferencijalne jednačbe. Od posebnog je interesa primjena na krute probleme.

Literatura:

M. Hochbruck, A. Ostermann, *Exponential integrators*, Acta Numerica, **19** (2010) 209–286

Mentor: Marušić Miljenko

Eksponecijalno prilagođene diferencijske sheme

Područje: numerička matematika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Exponentially fitted difference schemes

Opis teme: U diplomskom radu treba prikazati i usporediti nekoliko diferencijskih shema koje se primjenjuju za numeričko rješavanje singularno perturbiranog rubnog problema za ODJ. Singularno perturbirani problem je rubni problem za diferencijalnu jednačbu oblika $\varepsilon y'' + by' + cy = f$, gdje je ε jako mali realni broj.

Literatura:

J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems*, World Scientific, Singapore, 1996.

Mentor: Marušić Miljenko

Splajn kolokacija za singularno perturbirane rubne probleme

Područje: numerička matematika

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Spline collocation for singularly perturbed boundary value problem

Opis teme: U diplomskom radu treba opisati i usporediti nekoliko metoda koje koriste splajn funkcije za numeričko rješavanje singularno perturbiranog rubnog problema za ODJ. Singularno perturbirani problem je rubni problem za diferencijalnu jednadžbu oblika $\varepsilon y'' + by' + cy = f$, gdje je ε jako mali realni broj.

Literatura:

J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems*, World Scientific, Singapore, 1996.

Mentor: Marušić-Paloka Eduard

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Područje: Diferencijalne jednadžbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički, Biomedicinska matematika

Preduvjeti: Obične diferencijalne jednadžbe ili Primijenjena matematička analiza.

Naslov na engleskom: Boundary value problem for ordinary differential equation

Opis teme: Rubni problem za linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Motivacija (npr. jednadžba žice). Greenova funkcija. Egzistencija i jedinstvanost rješenja. Osvrt na numeričke metode.

Literatura:

W.E.Boyce, R.C.DiPrima, D.B.Meade, Elementary Differential Equations, Enhanced eText, 11th Edition, Wiley, 2017.

I.Aganović, K.Veselić, Jednadžbe matematičke fizike, Školska knjiga, 1987.

<https://people.sc.fsu.edu/~jpeterson/bvp.pdf>

Mentor: Marušić-Paloka Eduard

Uvod u varijacijski račun

Područje: Primijenjena matematika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Matematička analiza 1,2,3. + Obične diferencijalne jednačbe ili Diferencijalni i integralni račun 1 i 2 + Primijenjena matematička analiza

Naslov na engleskom: Introduction to the calculus of variations

Opis teme: Cilj rada je uvesti osnovne pojmove i rezultate vezane uz varijacijski račun. Struktura diplomskog rada bi trebala biti: formulacija problema, primjeri i motivacija, Hamiltonov princip i Lagrangeove jednačbe, Eulerove jednačbe.

Literatura:

P. J. Collins, *Differential and integral equations*, Oxford University Press, 2005.

Mentor: Marušić-Paloka Eduard

Fundamentalna rješenja za paraboličke parcijalne diferencijalne jednačbe

Područje: Parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika

Preduvjeti: Matematička analiza 1, 2, 3. Parcijalne diferencijalne jednačbe.

Naslov na engleskom: Fundamental solutions for parabolic partial differential equations

Opis teme: Cauchyjev problem za linearnu paraboličku PDJ. Holderovi prostori. Potencijali. Konstrukcija fundamentalnog rješenja. Svojstva. Egzistencija i jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema.

Literatura:

A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Dover, 2008.

G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, 1996.

Mentor: Mihelčić Matej

Optimizacija bazirana na ponašanju somova kukavica

Područje: Računarstvo, optimizacija na neprekidnim prostorima

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Programiranje u jeziku Java

Naslov na engleskom: Optimisation based on cuckoo catfish

Opis teme: Optimizacija bazirana na ponašanju somova kukavica obuhvaća klasu algoritama za rješavanje raznih kontinuiranih optimizacijskih problema. Ciljevi diplomskog rada su:

1. detaljno proučiti algoritama baziran na roju somova kukavica [1]
2. implementirati algoritme u programskom jeziku Java [2]
3. primijeniti algoritme na zadane standardne testne primjere [3,4,5]
4. ispitati utjecaje hiperparametara, te analizirati rezultate
5. usporediti implementirane algoritme s jednim genetskim [6] algoritmom

Literatura:

1. Wang, TL., Gu, SW., Liu, RJ. et al. Cuckoo catfish optimizer: a new meta-heuristic optimization algorithm. Artif Intell Rev 58, 326 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10462-025-11291-x>
2. Herbert Schildt, Danny Coward, Java: The Complete Reference, Thirteenth edition, McGraw Hill, 2024.
3. <https://al-roomi.org/benchmarks/cec-database>
4. <https://www.kaggle.com/code/kooaslansefat/cec-2022-benchmark>
5. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>
6. <https://github.com/dinavod12/Genetic-Algorithm>

Mentor: Mihelčić Matej

Optimizacija bazirana na ponašanju kitova

Područje: Računarstvo, optimizacija na neprekidnim prostorima

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Programiranje u jeziku Java

Naslov na engleskom: Whale optimisation algorithm

Opis teme: Optimizacija bazirana na ponašanju kitova obuhvaća klasu algoritama za rješavanje raznih kontinuiranih, kombinatornih i drugih optimizacijskih problema. Ciljevi diplomskog rada su:

1. detaljno proučiti dvije do tri varijante algoritama baziranih na ponašanju kitova [1]
2. implementirati algoritme u programskom jeziku Java [2]
3. primijeniti algoritme na zadane standardne testne primjere [3,4,5]
4. ispitati utjecaje hiperparametara, te analizirati rezultate
5. usporediti implementirane algoritme s jednim genetskim [6] algoritmom

Literatura:

1. Nadimi-Shahraki, M., Zamani, H., Asghari Varzaneh, Z. et al. A Systematic Review of the Whale Optimization Algorithm: Theoretical Foundation, Improvements, and Hybridizations. Arch Computat Methods Eng 30, 4113–4159 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11831-023-09928-7>
2. Herbert Schildt, Danny Coward, Java: The Complete Reference, Thirteenth edition, McGraw Hill, 2024.
3. <https://al-roomi.org/benchmarks/cec-database>
4. <https://www.kaggle.com/code/kooaslansefat/cec-2022-benchmark>
5. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>
6. <https://github.com/dinavod12/Genetic-Algorithm>

Mentor: Mihelčić Matej

Optimizacija bazirana na ponašanju ptica kukavica

Područje: Računarstvo, optimizacija na neprekidnim prostorima

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Cuckoo Optimization Algorithm

Opis teme: Optimizacija bazirana na ponašanju ptica kukavica obuhvaća klasu algoritama za rješavanje poglavito kontinuiranih optimizacijskih problema. Ciljevi diplomskog rada su:

1. detaljno proučiti algoritam baziran na ponašanju ptica kukavica [1]
2. implementirati algoritam u programskom jeziku Java [2]
3. primijeniti algoritam na zadane standardne testne primjere [3,4,5]
4. ispitati utjecaje hiperparametara, te analizirati rezultate
5. usporediti implementirane algoritme s jednim genetskim [6] algoritmom

Literatura:

1. Jafari, S., Bozorg-Haddad, O., Chu, X. (2018). Cuckoo Optimization Algorithm (COA). In: Bozorg-Haddad, O. (eds) Advanced Optimization by Nature-Inspired Algorithms. Studies in Computational Intelligence, vol 720. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/981-10-5221-7_5
2. Herbert Schildt, Danny Coward, Java: The Complete Reference, Thirteenth edition, McGraw Hill, 2024.
3. <https://al-roomi.org/benchmarks/cec-database>
4. <https://www.kaggle.com/code/kooaslansefat/cec-2022-benchmark>
5. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>
6. <https://github.com/dinavod12/Genetic-Algorithm>

Mentor: Mihelčić Matej

Inteligencija roja bazirana na ispaši ovaca

Područje: Računarstvo, optimizacija na neprekidnim prostorima

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Programiranje u jeziku Java

Naslov na engleskom: Swarm intelligence inspired by the grazing of sheep

Opis teme: Inteligencija roja bazirana na ispaši ovaca nudi algoritam za rješavanje raznih optimizacijskih problema na neprekidnim prostorima. Ciljevi diplomskog rada su:

1. detaljno proučiti algoritam baziran na roju ispaše ovaca [1]
2. implementirati algoritme u programskom jeziku Java [2]
3. primijeniti algoritme na zadane standardne testne primjere [3,4,5]
4. ispitati utjecaje hiperparametara, te analizirati rezultate
5. usporediti implementirane algoritme s jednim genetskim [6] algoritmom

Literatura:

1. Kivi, M.E., Majidnezhad, V. A novel swarm intelligence algorithm inspired by the grazing of sheep. J Ambient Intell Human Comput 13, 1201–1213 (2022). <https://doi.org/10.1007/s1020-02809-y>
2. Herbert Schildt, Danny Coward, Java: The Complete Reference, Thirteenth edition, McGraw Hill, 2024.
3. <https://al-roomi.org/benchmarks/cec-database>
4. <https://www.kaggle.com/code/kooaslansefat/cec-2022-benchmark>
5. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>
6. <https://github.com/dinavod12/Genetic-Algorithm>

Mentor: Mihelčić Matej

Ispitivanje inicijalizacijskih postupaka za algoritam CLUS-RM

Područje: Računarstvo, dubinska analiza podataka

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Testing initialisation procedures for the CLUS-RM algorithm

Opis teme: CLUS-RM [1] je algoritam za traženje redeskripcija (alternativnih opisa) primjera iz nekog, potencijalno višepoglednog, skupa podataka. Cilj ovog diplomskog rada je ispitati razne algoritme klasteriranja, npr. [2,3], kao potencijalne inicijalizacije algoritma CLUS-RM. Svaki algoritam klasteriranja treba implementirati u programskom jeziku Java i integrirati s algoritmom CLUS-RM. Izabrani algoritmi klasteriranja će biti uspoređeni s ugrađenim načinom inicijalizacije algoritma te će se ispitivati utjecaj inicijalizacije na konačnu točnost algoritma.

Literatura:

1. M. Mihelčić, S. Džeroski, N. Lavrač, T. Šmuc, *Redescription mining augmented with random forest of multi-target predictive clustering trees*, Journal of Intelligent Information Systems, 2018., 63–96
2. M.Z. Rodriguez, C.H. Comin, D. Casanova, O.M. Bruno, D.R. Amancio, et al. *Clustering algorithms: A comparative approach*, PLOS ONE 14(1): e0210236. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0210236>
3. <https://github.com/nematollahsaeidi/ClusteringNumericalCategoricalData>

Mentor: Mlinarić Petar

Randomizirani algoritmi za aproksimaciju traga matrice

Područje: Numerička matematika, statistika

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Randomized algorithms for approximation of matrix trace

Opis teme: Trag matrice ključna je veličina u brojnim područjima primijenjene matematike, strojnog učenja, numeričke analize i statistike. Međutim, matrica nije nužno dana eksplicitno, nego je samo dostupan operator množenja matrice sa vektorom, gdje direktni pristup nije efikasan. Randomizirani algoritmi nude učinkovitu alternativu: koriste stohastičke procjene koje omogućuju brzu aproksimaciju traga bez potrebe za potpunim pristupom matrici ili njenim eksplicitnim pohranjivanjem.

U okviru ovog diplomskog rada istražiti će se teorijska pozadina i praktična svojstva randomiziranih algoritama za aproksimaciju traga, s naglaskom na Hutchinsonov procjenitelj i njegove varijante. Analizirat će se njihova statistička svojstva, brzina konvergencije, ovisnost o strukturi matrice te mogućnosti smanjenja varijance. Nadalje, algoritmi će se implementirati i eksperimentalno evaluirati u programskom jeziku Python, Julia ili Matlab na nizu testnih primjera, uključujući velike rijetke matrice, Laplaceove operatore te matrice koje proizlaze iz metoda strojnog učenja. Posebna pažnja posvetit će se usporedbi točnosti i računske složenosti u odnosu na determinističke pristupe.

Literatura:

M. F. Hutchinson (1989). A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 18(3):1059–1076

H. Avron i S. Toledo (2011). Randomized algorithms for estimating the trace of an implicit symmetric positive semi-definite matrix, *Journal of the ACM*, 58(2), 1–34.

R. A. Meyer, C. Musco, C. Musco i D. P. Woodruff (2011). Hutch++: Optimal Stochastic Trace Estimation, *Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA)*

Mentor: Mlinarić Petar

Racionalna aproksimacija interpolacijom i najmanjim kvadratima

Područje: Numerička matematika

Prikladno za studij: Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Rational approximation using interpolation and least squares

Opis teme: Racionalna aproksimacija daje znatno preciznije rezultate od aproksimacije polinomima i ima široku primjenu, uključujući u teoriji upravljanja i numeričkom rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Razne metode su predložene u literaturi, temeljene na interpolaciji (Loewner), metodi najmanjih kvadrata (vector fitting) ili kombinaciji ta dva pristupa (Adaptive Anderson-Antoulas). Diplomski rad će teorijski analizirati neke od tih metoda i usporediti ih numerički implementacijom u programskom jeziku Python, Julia ili Matlab.

Literatura:

B. Gustavsen i A. Semlyen (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14(3), 1052–1061
A. J. Mayo i A. C. Antoulas (2007). A framework for the solution of the generalized realization problem, *Linear Algebra and its Applications*, 425(2-3), 634–662
Y. Nakatsukasa, O. Sète i L. N. Trefethen (2018). The AAA algorithm for rational approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(3), A1494–A1522

Mentor: Mlinarić Petar

Identifikacija nelinearnih dinamičkih sustava iz podataka metodom rijetkih najmanjih kvadrata

Područje: Obične diferencijalne jednadžbe, numerička matematika, statistika

Prikladno za studij: Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Identification of nonlinear dynamical systems from data using the sparse least squares method

Opis teme: SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) je pristup identifikaciji matematičkih modela nelinearnih dinamičkih sustava iz mjerenih podataka. Za razliku od tradicionalnih metoda koje zahtijevaju unaprijed poznatu strukturu modela, SINDy omogućuje automatsko otkrivanje jednadžbi korištenjem rijetkog regresijskog okvira. Ideja je iz skupa mogućih nelinearnih funkcija odabrati samo one nužne za opis promatranog sustava, čime se dobivaju jednostavni, interpretabilni i fizikalno utemeljeni modeli.

U okviru diplomskog rada istražiti će se teorijska osnova SINDy metode te praktična implementacija korištenjem programskog jezika Python, Julia ili Matlab. Planirano je proučiti metode odabira rijetkih koeficijenata te analiza robusnosti na podatke s različitim razinama šuma. Također, demonstrirati će se primjena SINDy-ja na odabranim primjerima.

Literatura:

S. L. Brunton, J. L. Proctor i J. N. Kutz (2016). Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(15), 3932–3937.

S. L. Brunton i J. N. Kutz (2022). Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control, *Cambridge University Press*

Mentor: Mrazović Rudi

Električne mreže i povratnost slučajnih šetnji

Područje: teorija vjerojatnosti

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Markovljevi lanci

Naslov na engleskom: Electric networks and the recurrence of random walks

Opis teme: George Pólya dokazao je da je simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$ povratna. Drugim riječima, šetač koji se u svakom koraku s jednakom vjerojatnošću pomiče u jedan od četiri susjedna vrha beskonačno će puta posjetiti svaki vrh u $\mathbb{Z}^2$. Nažalost, Pólyjin dokaz je iznimno nerobustan – na primjer, nije ga jednostavno modificirati na situaciju u kojoj smo iz $\mathbb{Z}^2$ uklonili samo jedan brid.

Interpretiranje Markovljevog lanca kao svojevrsne električne mreže omogućuje značajno općenitiji pristup proučavanju povratnosti i prolaznosti. Cilj rada je prezentirati teoriju i osnovne rezultate, te potom pokazati njihovu primjenu na nekoliko primjera.

U moguću literaturu za ovaj rad spadaju Poglavlje 2 u knjizi Lyonsa i Peresa, te Poglavlje 2 u knjizi Nachmiasa, ali ideje o alternativnoj literaturi s drugačijim primjenama su itekako dobrodošle.

Literatura:

Russell Lyons i Yuval Peres. Probability on trees and networks. Sv. 42. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2016., str. xv+699. doi: [10.1017/9781316672815](https://doi.org/10.1017/9781316672815)

Asaf Nachmias. Planar maps, random walks and circle packing. Sv. 2243. Lecture Notes in Mathematics. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLVIII–2018, [Saint-Flour Probability Summer School]. Springer, Cham, 2020., str. xii+118. doi: [10.1007/978-3-030-27968-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-27968-4)

Mentor: Mrazović Rudi

Metoda sedlaste točke

Područje: kompleksna analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: kompleksna analiza

Naslov na engleskom: Saddle-point method

Opis teme: Slavna Stirlingova formula daje sljedeću preciznu asimptotsku ocjenu za $n!$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Jedan od mogućih dokaza ove formule kreće od jednakosti

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz \quad \text{za neku konturu } \Gamma \text{ oko } 0,$$

koja je jednostavna posljedica Taylorovog razvoja funkcije e^z i Cauchyjeve integralne formule. Ostatak dokaza bavi se ocjenom integrala na desnoj strani. Jedan izuzetno efikasan alat u tom zadatku je metoda sedlaste točke u kojoj je posebna pozornost na točkama u kojima je derivacija podintegralne funkcije jednaka 0.

U ovom diplomskom radu predstaviti će se metoda sedlaste točke te prikazati njena primjena na ocjene nekoliko integrala povezanih s nekim kombinatornim veličinama. Jedna moguća literatura za ovaj rad je Poglavlje 7 u knjizi Flajoleta i Sedgewicka, ali ideje o alternativnoj literaturi s drugačijim primjenama su itekako dobrodošle.

Literatura:

Philippe Flajolet i Robert Sedgewick. Analytic combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009., str. xiv+810. doi: [10.1017/CB09780511801655](https://doi.org/10.1017/CB09780511801655)

Mentor: Mrazović Rudi

Mali Picardov teorem i Brownovo gibanje

Područje: teorija vjerojatnosti, kompleksna analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Osim dobrog poznavanja kompleksne analize, korisno je biti upoznat s Brownovim gibanjem i nekim njegovim osnovnim svojstvima.

Naslov na engleskom: Picard's little theorem and Brownian motion

Opis teme: Neka je $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Prema poznatom tzv. "malom Picardovom teoremu" slika od f je ili cijeli $\mathbb{C}$ ili cijeli $\mathbb{C}$ bez samo jedne točke. Cilj rada je prezentirati Davisov dokaz ove tvrdnje u kojem je ključni alat Brownovo gibanje.

Literatura:

Burgess Davis. "Picard's theorem and Brownian motion". Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975.), str. 353–362. doi: [10.2307/1998050](https://doi.org/10.2307/1998050)

Mentor: Muić Goran

Racionalna preslikavanja projektivnih mnogostrukosti

Područje: algebra, algebarska geometrija

Prikladno za studij: Teorijska matematika

Preduvjeti: Algebarske krivulje

Naslov na engleskom: Rational maps of projective varieties

Opis teme: Uvodi se pojam projektivnih mnogostrukosti i proučavaju se svojstva regularnih i racionalnih preslikavanja.

Literatura:

I. Shafarevich, *Basic algebraic geometry I*, Springer–Verlag, 1993.

Mentor: Muić Goran

Određivanje presjeka ravninskih krivulja zadanih implicitnim polinomijalnim jednadžbama

Područje: algebra, geometrija

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Vektorski prostori

Naslov na engleskom: Determination of intersection of plane curves given by implicit polynomial equations

Opis teme: U radu se izlažu osnove teorije polinoma u jednoj i dvije varijable nad poljem poput polja $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Razvija se generalizacija teorema o dijeljenju s ostatkom za polinome u dvije varijable s realnim koeficijentima. Izložena teorija koristi se za računanje presjeka ravninskih krivulja zadanih implicitnim polinomijalnim jednadžbama.

Literatura:

V.V. Prasolov, Polynomials (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 11), Springer (2009).

Mentor: Muić Goran

Konstruktivni dokaz Hilbertovog teorema o nulama

Područje: algebra, algebarska geometrija

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Vektorski prostori

Naslov na engleskom: A constructive proof of Hilbert zeroes theorem

Opis teme: Hilbertov teorem o nulama je osnovni teorem algebarske geometrije. Taj teorem daje nužan i dovoljan uvjet da sustav polinomijalnih jednadžbi u n nezavisnih varijabli ima rješenja u kompleksnim brojevima. U radu će se dati elementaran dokaz temeljen na teoriji eliminacije varijabli.

Literatura:

D. A. Cox, J. Little, D. O. 'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.

Mentor: Nakić Ivica

Kratkotrajna Fourierova transformacija

Područje: Obrada signala, harmonijska analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Nema

Naslov na engleskom: The Short-Time Fourier Transform

Opis teme: Kratkotrajna Fourierova transformacija (STFT - Short-Time Fourier Transform) je često korišteni alat kod obrade zvučnih, posebno glazbenih signala. STFT pruža vremenski lokalizirane informacije o frekvenciji za situacije u kojima komponente frekvencije signala variraju tijekom vremena, dok standardna Fourierova transformacija daje informacije o frekvenciji u prosjeku za cijeli vremenski interval signala. STFT je važan alat u obradi signala, naročito pri obradi zvučnih signala. Cilj diplomskog rada je izložiti matematičku pozadinu STFT-a te objasniti primjenu STFT-a u vremensko-frekvencijskoj analizi zvučnih signala.

Literatura:

K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Springer, (2001)

J. N. Kutz, *Data-driven modeling & scientific computation: Methods for Integrating Dynamics of Complex Systems and Big Data*, 2nd ed, https://faculty.washington.edu/kutz/kutz_book_v2.pdf (2024)

Ø. Ryan, *Linear Algebra, Signal Processing, and Wavelets: A Unified Approach*, Springer, (2019)

Mentor: Nakić Ivica

Algoritmi najkraćeg puta

Područje: Teorija grafova, Računarstvo

Prikladno za studij: Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: predznanje obuhvaćeno kolegijem Kombinatorna i diskretna matematika

Naslov na engleskom: Shortest path algorithms

Opis teme: Cilj diplomskog rada je izložiti Dijkstrin i Bellman-Fordov algoritam za nalaženje najkraćeg puta u težinskom grafu i dokazati njihova osnovna svojstva.

Literatura:

D. P. Williamson, *Network flow algorithms*, Cambridge University Press, 2019.

Mentor: Paar Dalibor

Modeli u nastavi matematike i fizike - geometrijska tijela

Područje: Nastava matematike i fizike

Prikladno za studij: Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Models in the teaching of mathematics and physics - geometric bodies

Opis teme: Cilj rada je kroz primjere pokazati na koji način koristiti modele u nastavi matematike i fizike. U ovom radu fokus će biti na upotrebi geometrijskih tijela u izradi modela u matematici i fizici. Znanstveni model središnji je dio znanstvene metode. Kada govorimo o složenijim temama iz matematike i fizike, doticaj učenika sa znanstvenim modelom je izuzetno važan. U ovom radu fokus ćemo staviti na konstrukciju 3D znanstvenog modela u odabranim temama, koristeći u većini priručne, jeftinije i lako dostupne elemente. Ovakvim se modelima s pojedinom temom učenici mogu upoznati ne samo u okviru formalnog kurikula, već i puno ranije u osnovnoj školi, čak i u vrtiću (npr. model atoma, atomske jezgre, računala, strujnog kruga itd.). Posebni ciljevi su da modeli budu zanimljivi učenicima i da sami sudjeluju u njihovoj konstrukciji.

Literatura:

Hallström and Schönborn (2019): Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. *International Journal of STEM Education* (2019) 6:22, doi.org/10.1186/s40594-019-0178-z

Ornek F. (2008): Models in Science Education: Applications of Models in Learning and Teaching Science. *International Journal of Environmental and Science Education*, 3 (2), 35 – 45, ISSN 1306-3065

Luyten et al. (2016): A comparative study of the physical model as a tool for structural education. In book: *Structures and Architecture* (pp.806-813) DOI:10.1201/b20891-112

Mentor: Paar Dalibor

Digitalni mikroskop u nastavi fizike

Područje: nastava fizike

Prikladno za studij: Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Digital microscope in physics teaching

Opis teme: Digitalni mikroskop predstavlja suvremeno, pristupačno i svestrano nastavničko sredstvo koje unosi novu dimenziju u poučavanje fizike. Za razliku od klasičnog optičkog mikroskopa, digitalni mikroskop omogućuje prikaz mikroskopskih struktura u realnom vremenu na ekranu računala, tableta ili projektoru, čime se sadržaj čini dostupnim cijelom razredu. Time se smanjuje pasivna uloga učenika, a pojačava istraživački pristup nastavi. U okviru ovog rada ćemo razmotriti metodičke prednosti i ograničenja korištenja digitalnog mikroskopa u nastavi fizike uz primjere strukturiranih nastavnih jedinica temeljenih na istraživačkom učenju.

Literatura:

Cutnell and Johnson: Physics, 8th edition, J.Wiley and Sons, 2009.

Mentor: Paar Dalibor

Novi pristupi razumijevanju energije u nastavi fizike

Područje: nastava fizike

Prikladno za studij: Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: New approaches to understanding energy in physics teaching

Opis teme: Pojam energije jedan je od temeljnih, ali i najapstraktnijih pojmova u nastavi fizike. Iako je prisutan kroz gotovo sve nastavne cjeline, njegovo dubinsko razumijevanje često izostaje, budući da ga učenici povezuju s općim, svakodnevnim značenjem, a ne s preciznom znanstvenom definicijom. Jedan od ključnih problema u poučavanju energije je što se ona ne može izravno vidjeti ni dodirnuti, već se opaža kroz njezine učinke (npr. kretanje, toplina, svjetlost). Zbog toga učenici često razvijaju pogrešne predodžbe, koje mogu dugoročno ometati njihovo razumijevanje fizikalnih koncepata. U radu ćemo dati pregled suvremenih pristupa ovoj tematici koji ističu potrebu za aktivnim učenjem kroz pokuse, vizualizacije i interdisciplinarno povezivanje. Temu ćemo obraditi kroz konkretne primjere i njihovu primjenu u nastavi.

Literatura:

Cutnell and Johnson: Physics, 8th edition, J.Wiley and Sons, 2009.

Mentor: Pandžić Pavle

Proste kompleksne Liejeve algebre

Područje: algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Simple complex Lie algebras

Opis teme: U ovoj se temi obrađuju osnove teorije Liejevih algebri te klasifikacija kompleksnih prostih Liejevih algebri pomoću njihovih sistema korijenja.

Literatura:

J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer, 1997.

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course.*, Springer, 1991.

Mentor: Pandžić Pavle

Reprezentacije konačnih grupa

Područje: algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Representations of finite groups

Opis teme: U ovoj se temi obrađuju osnove teorije konačnodimenzionalnih reprezentacija i karaktera u primjeru konačnih grupa. Uključene su i standardne konstrukcije kao induciranje i tenzorski produkti reprezentacija. Sve je ilustrirano konkretnim primjerima.

Literatura:

J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer, 1977.

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course.*, Springer, 1991.

Mentor: Pandžić Pavle

Konačne grupe refleksija

Područje: algebra

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Finite reflection groups

Opis teme: U ovoj se temi obrađuju osnove teorije konačnih grupa refleksija. Osnovni su primjeri Weylove grupe sistema korijena.

Literatura:

L. C. Grove, T. C. Benson, *Finite reflection groups*, Springer, 1985.

J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer, 1997.

W. Soergel, *Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*,

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXSPIEG.pdf>

Mentor: Pažanin Igor

Neizotermni tok fluida u poroznoj sredini

Područje: Parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Non-isothermal fluid flow through a porous medium

Opis teme: Proučavanje toka fluida u poroznoj sredini od iznimnog je značaja sa praktičnog stanovišta. Polazeći od temeljnih zakona sačuvanja, u ovom radu izveli bi osnovne jednačbe koje opisuju neizotermni tok u poroznoj sredini te diskutirali pripadne rubne uvjete. Također, bavili bi se i primjerima jednostavnih tokova za koje je moguće odrediti točna rješenja.

Literatura:

D. A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, 2017.

P. M. Adler, *Porous Media: Geometry and Transports*, Butterworth–Heinemann, 1992.

Mentor: Pažanin Igor

Reynoldsov zakon

Područje: Parcijalne diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Reynolds law

Opis teme: U teoriji lubrikacije (podmazivanja) promatra se tok tankog sloja mazi-va koji razdvaja dvije hrapave površine koje se gibaju jedna u odnosu na drugu. Cilj ovog rada izvesti je osnovni Reynoldsov zakon i dovesti ga u vezu s temeljnim zakoni-ma sačuvanja. Također, diskutirali bi se i određeni modeli iz recentne literature koji predstavljaju korekcije Reynoldsovog zakona.

Literatura:

A. Z. Szeri, *Fluid Film Lubrication*, Cambridge University Press, 2010.

G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: A mathematical proof*, Appl. Math. Opt. 14 (1986), 73–93.

Mentor: Pažanin Igor

Matematičko modeliranje demokratskih procesa

Područje: Matematičko modeliranje

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Mathematical modelling of democratic processes

Opis teme: Cilj ovog rada izvesti je te analizirati jednostavne matematičke modele koji opisuju dinamiku izbornih i postizbornih procesa. Modeli su dani sustavima običnih diferencijalnih jednačbi, a za njihovu analizu koristi se teorija stabilnosti i numeričke simulacije.

Literatura:

A.K. Misra, *A simple mathematical model for the spread of two political parties*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 17 (2012), 343–354.

T. Chilachava, L. Sulava, *Mathematical and computer modeling of elections*, Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences, Proceedings, v. XV – XVI (2018), 174–190.

Mentor: Pedić Tomić Veronika

Struktura i klasifikacijska uloga Cartanovih podalgebri u Liejevim algebrama

Područje: Algebra

Prikladno za studij: Teorijska matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Structure and the Classification Role of Cartan Subalgebras in Lie Algebras

Opis teme: Cartanove podalgebre ključne su za razumijevanje unutarnje strukture polujednostavnih Liejevih algebri jer omogućuju izgradnju korijenskih sustava i time otkrivaju njihove temeljne simetrije. U radu će se prikazati formalna definicija Cartanove podalgebre, njezina osnovna svojstva te uloga u dekompoziciji Liejeve algebre na korijenske prostore. Poseban naglasak bit će na tome kako izbor Cartanove podalgebre doprinosi klasifikaciji polujednostavnih Liejevih algebri i interpretaciji njihovih strukturalnih elemenata.

Literatura:

J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.

A. W. Knap, *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, 2002.

J.-P. Serre, *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer, 1987.

Mentor: Pejković Tomislav

Kongruencije za Stirlingove i povezane brojeve

Područje: kombinatorika, teorija brojeva

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Congruences for Stirling and Related Numbers

Opis teme: U radu će se proučiti neke od kongruencija koje zadovoljavaju Stirlingovi brojevi prve i druge vrste, Bellovi i Fubinijevi brojevi te neke blisko vezane rezultate.

Literatura:

I. Mezo, Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences, Chapman and Hall/CRC, 2019.

D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, 2001.

Mentor: Pejković Tomislav

Melzakova formula

Područje: kombinatorika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Melzak's Formula

Opis teme: U radu će se promatrati binomni identitet pripisan Z.A. Melzaku kao i posljedice i generalizacije te formule. Tijekom proučavanja pojavljuju se i neka poznatija pitanja polinomne interpolacije.

Literatura:

J. Quaintance, Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H W Gould, World Scientific Publishing Co., 2015.

R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics - A foundation for computer science (2nd ed.), Addison-Wesley Professional, 1994.

Mentor: Pejković Tomislav

Simetrične funkcije u kombinatorici

Područje: kombinatorika, algebra

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Symmetric functions in combinatorics

Opis teme: U radu će se proučavati simetrične funkcije te njihova primjena u prebrojavanju kombinatornih objekata i nalaženju odgovarajućih funkcija izvodnica. Poseban naglasak bit će na korištenju matrica prijelaza između različitih baza prostora simetričnih funkcija.

Literatura:

A. Mendes, J. Remmel, Counting with symmetric functions, Springer, 2015.
D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, 2001.

Mentor: Pezer Martina

Analiza koruptivnog rizika u javnoj nabavi

Područje: Ekonomika javnog sektora

Prikladno za studij: Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Ekonomika javnog sektora

Naslov na engleskom: Analysis of corruption risk in public procurement

Opis teme: U zemljama OECD-a vrijednost javne nabave je i do 30% državne potrošnje i stoga znatno utječe na ukupni gospodarski i društveni razvoj. Istovremeno, smatra se jednom od područja najpodložnijih korupciji. Budući da je korupcija u javnoj nabavi itekako prisutna i u Hrvatskoj, cilj je ovoga rada utvrditi postoje li razlike u koruptivnom riziku po ekonomskim sektorima, koji su važni pokazatelji rizika te istražiti eventualne promjene u višegodišnjem razdoblju. Student/ica će se upoznati s literaturom o korupciji i integritetu u javnoj nabavi, bazama podataka o javnoj nabavi te koristiti statističke metode poput klaster analize i linearne regresije.

Literatura:

Frey, B., Škrinjarić, B. i Budak, J. (2024). Private sector perspective on corruption and informality: a comparative analysis of Serbia and Croatia. *Post-Communist Economies*, 36(4), 506–526.

SELDI (2022): Public Procurement Integrity in Southeast Europe: Mechanisms, Red Flags, and State-Owned Enterprises in the Energy Sector (<https://bit.ly/308h2ti>)

Fazekas, M. i Kocsis, G., (2020), Uncovering High-Level Corruption: Cross-National Corruption Proxies Using Public Procurement Data. *British Journal of Political Science*, 50(1)

OECD (2016): Preventing Corruption in Public Procurement (<https://bit.ly/3txh1WG>)

World Bank Group (2013): Fraud and corruption awareness handbook: how it works and what to look for (<https://bit.ly/3E65wuc>)

Budak, J. (2016) Korupcija u javnoj nabavi: trebamo li novi model istraživanja za Hrvatsku?. *Ekonomski pregled: mjesečnik Hrvatskog društva ekonomista Zagreb*, 67 (4), 306–327.

Vuković, V. HUB Think Tank broj 5: Korupcija u javnim nabavama (<https://www.hub.hr/hr/hub-think-tank-broj-5-korupcija-u-javnim-nabavama>)

Opentender: <https://opentender.eu/start>

Mentor: Radulović Marko

Homogenizacija ne-Newtonovskih fluida u poroznoj sredini

Područje: Matematičko modeliranje, diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Homogenization of non-Newtonian fluids in porous media

Opis teme: Tok kompleksnih fluida u poroznim sredinama prirodno se pojavljuju u brojnim inženjerskim primjenama. U ovome radu ćemo proučavati metode modeliranja nehomogenih sredina, tj. metode homogenizacije toka ne-Newtonovskih fluida u poroznim sredinama.

Literatura:

U. Hornung, *Homogenization and Porous Media*, Springer (1997)

A. Mikelić, *An introduction to the homogenization modeling of non-Newtonian and electrokinetic flows in porous media. New trends in non-Newtonian fluid mechanics and complex flow*, Springer, pp. 171-227 (2017)

Mentor: Radulović Marko

Matematičko modeliranje bioloških tkiva

Područje: Matematičko modeliranje, diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Mathematical modelling of biological tissues

Opis teme: Biološka tkiva kao što su hrskavica i mozak imaju kompleksna viskoelastična kao i porozna svojstva, koja imaju važnu ulogu u njihovoj fiziološkoj funkciji. Cilj u ovome radu je proučiti višeskalne modele za opisivanje ovih poroviskoelastičnih tkiva u fiziološkim i patofiziološkim stanjima.

Literatura:

J.P. Whiteley, E.A. Gaffney, *Modelling the inclusion of swelling pressure in a tissue level poroviscoelastic model of cartilage deformation*, Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA 37(3), 389-428 (2020)

G.E. Lang et. al., *Is the Donnan effect sufficient to explain swelling in brain tissue slices?*, Journal of the Royal Society Interface 11, 20140123 (2014)

Mentor: Radunović Goran

Fraktalni skupovi generirani transformacijama

Područje: fraktalna geometrija

Prikladno za studij: svi studiji (i Biomedicinska matematika)

Preduvjeti: integral i mjera, metrički prostori

Naslov na engleskom: Fractal sets generated by transformations

Opis teme: Proučavali bi se fraktalni skupovi generirani transformacijama, tj. sistemima iteriranih funkcija. Najvažniji primjeri ovakvih fraktala su sebi-slični i sebi-afini skupovi. Prethodno bi se uvelo pojmove Hausdorffove dimenzije, box dimenzije i dimenzije Minkowskog te proučilo njihova glavna svojstva. Dokazali bi se glavni teoremi o dimenzijama sebi-sličnih i sebi-afinih skupova.

Literatura:

K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3rd Edition, Wiley, 2014.

G. David, S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications (Book 7), Clarendon Press, 1998.

Mentor: Radunović Goran

Egzistencija meromorfnih funkcija i teorem o Riemannovom preslikavanju

Područje: kompleksna analiza

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: kompleksna analiza

Naslov na engleskom: Existence of Meromorphic Functions and the Riemann Mapping Theorem

Opis teme: Proučavali bi se napredniji koncepti kompleksne analize kao što su analitička proširivost, konformna preslikavanja i kompaktifikacija s ciljem dokazivanja tri fundamentalna teorema: Mittag-Lefflerov teorem o egzistenciji meromorfnih funkcija s unaprijed predodređenim polovima; Weierstrassov teorem o egzistenciji holomorfnih funkcija s unaprijed predodređenim nulama te teorem o Riemannovom preslikavanju.

Literatura:

W. Schlag, *A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics (Book 154). Amer. Mathematical Society, 2014.

S. Lang, *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics (Book 103), Springer, 4th edition, 2003.

Mentor: Radunović Goran

Frakcionalni integro-diferencijalni račun i primjene

Područje: Matematička analiza

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Fractional integro-differential calculus and applications

Opis teme: Proučavao bi se Riemann-Liouvilleov frakcionalni integro-diferencijalni operator koji poopćuje klasične operatore n -strukog diferenciranja i integriranja na slučaj kada n više nije nužno prirodan broj. Obradile bi se i primjene na rješavanje diferencijalnih jednačbi uz osvrt na klasične probleme Abelove integralne jednačbe, Heavisideovog operatorskog računa i Liouvilleovog problema.

Literatura:

Osnovna: K. S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York 1993

Dodatna: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*

Mentor: Radunović Goran

Bedford-McMullenovi sagovi

Područje: fraktalna geometrija, realna analiza

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: metrički prostori

Naslov na engleskom: Bedford-McMullen carpets

Opis teme: Proučavala bi se fraktalna svojstva Bedford-McMullenovih sagova koji predstavljaju najjednostavniji primjer fraktalnih skupova koji su sebi-afini, ali nisu nužno sebi-slični. Naglasak bi bio na određivanju nekoliko klasičnih fraktalnih dimenzija Bedford-McMullenovih sagova kao što su Hausdorffova, Assouadova, box dimenzija te dimenzija pakiranja. Također proučavale bi se i relativno nove tehnike interpoliranja dimenzija.

Literatura:

J. Fraser, Fractal geometry of Bedford-McMullen carpets, In: *Pollicott, M., Vienti, S. (eds) Thermodynamic Formalism. Lecture Notes in Mathematics*, vol 2290. Springer, Cham

K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 3rd Edition, Wiley, 2014.

Mentor: Radunović Goran

Multilinearni funkcionali i tenzori

Područje: linearna algebra

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Multilinear functionals and tensors

Opis teme: Uveo bi se pojam multilinearnog funkcionala i tenzora te bi se proučavala osnovna svojstva i pojmovi konstantnog tenzora i invarijante tenzora. Također bi se obradio i pojam polja tenzora te primjene vezane uz pojmove krivolinijskih koordinata, geodetskih krivulja i Riemannovog prostora.

Literatura:

S. Kurepa *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

Mentor: Radunović Goran

Funkcije izvodnice i primjene

Područje: kombinatorna i diskretna matematika

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Generating functions and applications

Opis teme: Istraživale bi se funkcije izvodnice i njihove primjene uključujući i Lagrangeovu formulu inverzije, poopćene binomne i eksponencijalne redove te hipergeometrijske redove.

Literatura:

Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001

Mentor: Resman Maja

Divergentni redovi i Gevreyeva sumabilnost

Područje: analiza, diferencijalne jednačbe

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Kompleksna analiza

Naslov na engleskom: Divergent series and Gevrey summability

Opis teme: U primjenama (rješavanje diferencijalnih jednačbi, integralne transformacije), rješenja su često *divergentni formalni redovi*, s asimptotskim razvojem u obliku reda potencija. Ocjene ostatka takvih divergentnih redova često posjeduju neku uniformnost, tipa *Gevreyevih ocjena*. To omogućava sektorijalnu sumabilnost divergentnih redova u $\mathbb{C}$ metodom Borel-Laplaceove transformacije. Primjer je rješavanje poznate Eulerove diferencijalne jednačbe u $\mathbb{C}$, čije je formalno rješenje divergentan, ali Gevreyev formalni red.

Literatura:

W. Balser, *From divergent power series to analytic functions*, Springer, 1994.

https://dms.umontreal.ca/~rousseac/Rousseau_divergent_series.pdf

<https://dms.umontreal.ca/~rousseac/divergent.pdf>

M. Loday–Richaud, *Divergent series, Summability and Resurgence II*, Springer, 2016.

Mentor: Resman Maja

Fundamentalna grupa

Područje: metrički prostori, topologija

Prikladno za studij: Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Fundamental group

Opis teme: Fundamentalna grupa topološkog prostora daje informaciju o „obliku“ prostora te, na neki način, razlikuje prostore sa različitim brojem „rupa“ (npr. fundamentalna grupa sfere razlikuje se od fundamentalne grupe torusa s jednom rupom, što se opet razlikuje od fundamentalne grupe torusa s dvije rupe...). Homeomorfni prostori imaju iste fundamentalne grupe. U radu se razrađuje precizna definicija fundamentalne grupe kao grupe klasa ekvivalencije petlji (puteva s istom početnom i završnom točkom) iz iste točke obzirom na relaciju „biti homotopan putevima“, što zapravo znači da se jedna petlja neprekidno može transformirati u drugu ostajući unutar danog prostora. Također se navode neki najjednostavniji primjeri prostora i njihovih fundamentalnih grupa.

Literatura:

J. R. Munkres, Topology, 2nd edition, Prentice Hall (2000)

S. Willard, General topology, Dover Books on Mathematics (First ed.), Dover Publications (1970)

Mentor: Resman Maja

Klasifikacija Riemannovih ploha i uniformizacijski teorem

Područje: kompleksna analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Classification of Riemann surfaces and uniformization theorem

Opis teme: U radu se dokazuje poznati Teorem uniformizacije koji klasificira 1-povezane Riemannove plohe do na biholomorfizam u tri modela: plohe biholomorfne sferi, biholomorfne disku i biholomorfne ravnini. Također se po želji može dokazati i tzv. Teorem o Riemannovom preslikavanju koji tvrdi da je svaki otvoren, 1-povezan podskup kompleksne ravnine koji nije čitava ravnina biholomorfan otvorenom disku.

Literatura:

L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, 3rd edition, McGraw Hill, 1979.

J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, 3rd edition, Princeton University Press, 2011.

S. Lang, *Complex analysis*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 1999.

Mentor: Širola Boris

Grupe permutacija i matrice grupe

Područje: Teorija grupa

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Poznavanje materije predmeta “Linearna algebra 1 i 2” i “Algebarske strukture”.

Naslov na engleskom: Permutation groups and matrix groups

Opis teme: Ova tema nudi bolje razumijevanje osnova teorije grupa, kroz dvije klase važnih primjera; grupe permutacija, i matrice grupe. U dijelu o grupama permutacija dokazale bi se osnovne činjenice i rezultati o tim grupama, i posebno bi se pokazalo da je tzv. alternirajuća grupa prosta grupa. U dijelu o matricnim grupama detaljno bi se definiralo tzv. klasične matrice grupe (opće linearne grupe, specijalne linearne grupe, ortogonalne grupe i simplektičke grupe). Posebno, matrice grupe proučavale bi se kao grupe regularnih matrica s koeficijentima iz komutativnih prstena; budući je to korisno u teoriji brojeva, algebarskoj geometriji, teoriji reprezentacija i algebri.

Literatura:

J. J. Rotman; *Advanced modern algebra, Part 1*, Amer. Math. Soc., Providence, 2015.

Mentor: Širola Boris

Projektivni prostori i projektivne transformacije

Područje: Linearna algebra i projektivna geometrija

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Poznavanje materije “Linearna algebra 1 i 2”.

Naslov na engleskom: Projective spaces and projective transformations

Opis teme: Ako je V konačno dimenzionalan vektorski prostor, tada se skup svih 1-dimenzionalnih potprostora označava s $\mathbb{P}(V)$ i zove *projektivni prostor* pridružen prostoru V . Projektivni prostori su važni objekti i u elementarnoj geometriji i u algebarskoj geometriji. U ovoj bi se temi prvo pokazalo kako postoji jaki paralelizam između standardnih vektorskih prostora i projektivnih prostora. U drugom dijelu proučavale bi se tzv. *projektivne transformacije*. Naime, svakom regularnom operatoru f na V pridružuje se pripadna projektivna transformacija $\mathbb{P}(f)$. I sada imamo situaciju koja je analogna proučavanju standardnih linearnih operatora. Po želji studenta, pored navedenog mogu se obraditi i neki napredniji dijelovi iz područja algebarske geometrije.

Literatura:

I. R. Shafarevich, A. O. Remizov; *Linear algebra and geometry*, Springer, New York, 2013.

Mentor: Širola Boris

Harmonijske funkcije

Područje: Analiza

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika

Preduvjeti: Poznavanje materije iz preddiplomskog kolegija *Kompleksna analiza*.

Naslov na engleskom: Harmonic functions

Opis teme: Realni dio $u(x, y)$ i imaginarni dio $v(x, y)$, holomorfne funkcije $f(z) = u + iv$ jedne kompleksne varijable $z = x + iy$, zadovoljavaju tzv. Laplaceovu diferencijalnu jednačinu; tj. vrijedi $\Delta u = \Delta v = 0$, gdje je operator $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Takve funkcije, klase C^2 , zovu se harmonijske funkcije. Harmonijske funkcije su najklasičnija i najosnovnija rješenja u klasi tzv. eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tema ovog rada je proučiti harmonijske funkcije metodama kompleksne analize.

Literatura:

R. E. Greene, S. G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, Graduate Studies in Math., Vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence 2006.

Mentor: Tambača Josip

Model štapa Naghdijevog tipa

Područje: Matematičko modeliranje, PDJ

Prikladno za studij: Primijenjena matematika

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Model of a Naghdi rod type

Opis teme: Model Naghdijevog štapa je model zakrivljenog elastičnog štapa kod kojeg se, po uzoru na Timošenkov model štapa, ne pretpostavlja nesmičljivost, a ni neproduljivost, već su one penalizirane. Zbog toga je model lakši za analizu i numeričke simulacije. Osnovni zadatak rada u okviru ove teme je usporediti numeričke aproksimacije, metodom konačnih elemenata, za model Naghdijevog i klasični model zakrivljenog štapa.

Literatura:

M. Jurak, *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2006.

M. Jurak, J. Tambaca: Linear curved rod model. General curve, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 11, No. 7, 2001, 1237–1252.

J. Tambača, Z. Tutek, A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity, *Applied Mathematical Modelling* 40 (2016), 23–24, 10549–10562.

Mentor: Validžić Lucija

Izračunljivost realnih brojeva

Područje: Izračunljiva analiza

Prikladno za studij: svi studiji (i Biomedicinska matematika)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Computability of real numbers

Opis teme: Intuitivno govoreći, realan broj je izračunljiv ako postoji *algoritam* koji ga izračunava. U teoriji izračunljivosti postoji nekoliko pristupa kojima se to može formalizirati. Primjerice, možemo reći da je realan broj x izračunljiv ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je n -ta decimala od x jednaka $f(n)$. Drugi način bi bio da izračunljivim smatramo one brojeve koji su limesi izračunljivih nizova racionalnih brojeva, pri čemu je brzina konvergencije određena izračunljivom funkcijom. Postoje još i drugi načini definiranja izračunljivih realnih brojeva (pomoću Dedekindovih rezova i ugnježđenih intervala). Glavni cilj rada je dokazati ekvivalenciju ovih definicija i proučiti glavna svojstva izračunljivih brojeva, primjerice dokazati da oni čine polje.

Literatura:

1. M. Vuković. Izračunljivost, skripta, 2007.
2. K. Weihrauch, Computable Analysis: An Introduction, Springer, 2000.
3. V. Brattka, P. Hertling, Handbook of Computability Theory, Elsevier, 1999.
4. M. B. Pour-El, J. I. Richards, Computability in Analysis and Physics, Springer, 1989.

Mentor: Validžić Lucija

Grupe izometrija kompaktnih skupova u ravnini

Područje: Algebra, geometrija, metrički prostori

Prikladno za studij: nastavnički studiji

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Isometry groups of compact sets in the plane

Opis teme: Grupa izometrija skupa X je skup svih bijekcija $f : X \rightarrow X$ koje čuvaju udaljenost, zajedno s operacijom kompozicije. Poznato je da se grupa izometrija od $\mathbb{R}^2$ sastoji od identitete, translacija, rotacija, osnih simetrija i kliznih simetrija. U radu će se klasificirati grupe izometrija kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^2$. Pokazat će se da su konačne grupe takvih izometrija upravo cikličke grupe rotacija i diedarske grupe, a jedina beskonačna grupa je ortogonalna grupa $O(2)$ - što za posljedicu ima da svaki kompaktan skup s beskonačno izometrija mora biti unija koncentričnih kružnica. Za svaku od ovih grupa dat će se primjer skupa s tom grupom izometrija i proučavat će se odnos između geometrijskih svojstava skupa i algebarske strukture njegove grupe izometrija.

Literatura:

1. M.A. Armstrong, Groups and Symmetry, Springer, 1988.
2. H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley and Sons, Inc., 1969.
3. W.A. Sutherland, Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford University Press, 1975.

Mentor: Validžić Lucija

Savršeni skupovi

Područje: Topologija, teorija skupova

Prikladno za studij: svi studiji (i Biomedicinska matematika)

Preduvjeti: nema

Naslov na engleskom: Perfect sets

Opis teme: Podskup topološkog prostora je savršen ako je zatvoren i nema izoliranih točaka, kao primjerice zatvoreni intervali i Cantorov skup u $\mathbb{R}$. Savršeni skupovi u $\mathbb{R}$ imaju važnu vezu sa zatvorenim skupovima - svaki zatvoren skup u $\mathbb{R}$ može se na jedinstven način prikazati kao disjunktna unija savršenog i prebrojivog skupa. Budući da neprazni savršeni skupovi imaju kardinalnost c , iz ovoga slijedi da je svaki zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ prebrojiv ili kardinalnosti c . Pokazuje se da ovo vrijedi i u općenitijim topološkim prostorima.

U radu će se proučavati osnovna svojstva savršenih skupova te veza s drugim topološkim pojmovima kao što su gomilišta, zatvoreni skupovi i potpuni metrički prostori. Posebna pažnja bit će posvećena Cantor-Bendixsonovom teoremu koji opisuje strukturu zatvorenih skupova u potpunim metričkim prostorima pomoću savršenih skupova.

Literatura:

1. W.A. Sutherland, Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford University Press, 1975.
2. J. R. Munkres, Topology, 2nd Edition, Prentice Hall, 2000.
3. A. S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995.

Mentor: Validžić Lucija

Uređajna topologija

Područje: Topologija, teorija skupova

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

Preduvjeti: Poznavanje gradiva kolegija: Teorija skupova, Metrički prostori i Opća topologija

Naslov na engleskom: Order topology

Opis teme: Ako je $(X, <)$ totalno uređen skup, uređajna topologija na X je topologija čiju bazu čine skupovi oblika $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid a < x\}$ i $\{x \mid a < x < b\}$.

U radu će se proučavati veza između svojstava uređaja (poput Dedekindove potpunosti) i ključnih topoloških svojstava (poput kompaktnosti, povezanosti i metrizabilnosti) totalno uređenih topoloških prostora. Analizirat će se i neki klasični primjeri, kao što su uređajna topologija na jediničnom kvadratu, Aleksandrovljev pravac i ordinali.

Literatura:

1. J.R. Munkres, Topology, 2nd Edition, Prentice Hall, 2000.
2. L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr., Counterexamples in Topology, Springer-Verlag, 1970.
3. S. Eilenberg, Ordered Topological Spaces, American Journal of Mathematics, vol. 63, no. 1, pp. 39–45., 1941.

Mentor: Vuković Mladen

Fragmenti logike prvog reda s konačno mnogo varijabli

Područje: matematička logika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: položen kolegij Matematička logika

Naslov na engleskom: Fragments of first-order logic with finitely many variables

Opis teme: A. Church je dokazao 1936. godine da je logika prvog reda neodlučiva. Prvi cilj diplomskog je detaljno dokazati Churchov teorem. Zatim, u diplomskom treba detaljno dokazati da je fragment logike prvog reda čije formule sadrže samo dvije varijable, tj. kratko FO^2 , odlučiv. U tu svrhu treba dokazati da FO^2 ima svojstvo konačnih modela. Taj fragment je posebno zanimljiv jer standardna translacija svake modalne formule osnovnog modalnog jezika pripada tom fragmentu. Fragment logike prvog reda čije formule sadrže tri varijable, tj. kratko FO^3 , je neodlučiv.

Literatura:

- M. Otto, *Bounded variable logics and counting*, Springer, 1997.
 M. Grohe, *Finite variable logics in descriptive complexity theory*, Bulletin of Symbolic Logic, 4 (1998), 345–398
 L. Libkin, *Elements of Finite Model Theory*, Springer, 2004.
 Grädel i dr, *Finite Model Theory and Its Applications*, Springer, 2007.
 H.–D. Ebbinghaus, J. Flum, *Finite Model Theory*, Springer, 1999.

Mentor: Vuković Mladen

Složenost logika interpretabilnosti

Područje: Matematička logika

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

Preduvjeti: Položen kolegij Matematička logika

Naslov na engleskom: Complexity of interpretability logics

Opis teme: Logika dokazivosti GL je jednostavni modalni sistem koji potpuno opisuje svojstva predikata dokazivosti Pr_{PA} Peanove aritmetike. Logiku interpretabilnosti IL dobivamo proširenjem logike dokazivosti GL novim binarnim modalnim operatorom $\triangleright$. Glavni cilj diplomskog rada je razmotriti složenost nekih proširenja osnovne logike interpretabilnosti IL.

Literatura:

J.J. Joosten, J.M. Rovira, L. Mikec, M. Vuković, *An overview of Verbrugge Semantics a.k.a. Generalised Veltman Semantics*, in N. Bezhanishvili, R. Iemhoff, F. Yang (eds.), *Dick de Jongh on Intuitionistic and Provability Logic, Outstanding Contributions to Logic*, Springer, 2024.

L. Mikec, F. Pakhomov, M. Vuković, *Complexity of the interpretability logic IL*, *Logic Journal of the IGPL* 27 (2019), 1–7

L. Mikec, *On Logics and Semantics for Interpretability*, doctoral thesis, University of Barcelona and University of Zagreb, cotutelle, 2021.

L. Mikec, *Complexity of the interpretability logics ILW and ILP*, *Logic Journal of the IGPL* 31 (2022), 194–213

A. Visser, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in modal logic*, Vol. 1, M. Kracht et al. eds., CSLI Publications, 307–359, 1998.

Mentor: Vuković Mladen**Suvoditelj:** Perkov Tin

Odlučivost logika interpretabilnosti

Područje: matematička logika**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika**Preduvjeti:** položen kolegij Matematička logika**Naslov na engleskom:** Decidability of interpretability logics

Opis teme: U logici dokazivosti GL (Gödel-Löb) Gödelov predikat dokazivosti teorije PA (Peanove aritmetike) formaliziran je kao modalni operator. Veza između modalnog jezika i jezika teorije PA uspostavljena je pomoću pojma aritmetičke interpretacije. Solovay (1976) je dokazao aritmetičku potpunost modalnog sistema GL, tj. da je sistem GL logika dokazivosti teorije PA, u smislu da je formula teorem GL ako i samo ako je svaka njena aritmetička interpretacija teorem teorije PA. Pokazalo se da je isti sistem GL logika dokazivosti i drugih aritmetičkih teorija, pa tako primjerice sistem GL ne razlikuje konačno aksiomatizabilne teorije prvog reda od onih koje to nisu. Stoga se razmatraju logike interpretabilnosti, proširenja sistema GL binarnim modalnim operatorom koji formalizira pojam relativne interpretabilnosti između teorija, u istom smislu u kojem GL formalizira predikat dokazivosti. Glavni cilj diplomskog rada je dokazati odlučivost nekih proširenja osnovne logike interpretabilnosti IL.

Literatura:

- J.J. Joosten, J.M. Rovira, L. Mikec, M. Vuković, *An overview of Verbrugge Semantics a.k.a. Generalised Veltman Semantics*, in N. Bezhanishvili, R. Iemhoff, F. Yang (eds.), *Dick de Jongh on Intuitionistic and Provability Logic, Outstanding Contributions to Logic*, Springer, 2024.
- L. Mikec, T. Perkov, M. Vuković, *Decidability of interpretability logics ILM_0 and ILW^** , *Logic Journal of the IGPL* 25, 758-772, 2017.
- L. Mikec, *On Logics and Semantics for Interpretability*, doctoral thesis, University of Barcelona and University of Zagreb, cotutelle, 2021.
- T. Perkov, M. Vuković, *Filtrations of generalized Veltman models*, *Mathematical Logic Quarterly* 62, 412-419, 2016.
- A. Visser, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in modal logic*, Vol. 1, M. Kracht et al. eds., CSLI Publications, 307-359, 1998.

Mentor: Živković Marko

Aksiom izbora

Područje: Teorija skupova

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Teorija skupova

Naslov na engleskom: The Axiom of Choice

Opis teme: Aksiom izbora istovremeno je općeprihvaćen i kontroverzan aksiom. Cilj rada je opisati koristi ovog aksioma u matematici, ali i razloge kontroverze. Pri tom će se navesti razne tvrdnje ekvivalentne aksiomu izbora, mnoge njegove posljedice, što bismo mogli bez njega i ima li kakvih alternativa. Student bi trebao navesti i tvrdnje o neovisnosti aksioma.

Literatura:

K. Hrbacek and T. Jech, Introduction to Set Theory, 1978.

T. Jech, The Axiom of Choice, 1973.

Mentor: Živković Marko

Jonesov polinom

Područje: Teorija čvorova

Prikladno za studij: Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

Preduvjeti: Opća topologija

Naslov na engleskom: The Jones Polynomial

Opis teme: Jonesov polinom jedan je od najpoznatijih invarijanta čvorova.

Čvor je umetanje kružnice u $\mathbb{R}^3$. Dva se čvora smatraju identičnima ako se jedan može glatko transformirati u drugi. Postoji jednostavan način prikaza čvora pomoću njegove projekcije na ravninu. Te projekcije nazivaju se dijagrami čvorova.

Dugogodišnji je problem u teoriji čvorova odrediti predstavljaju li dva dijagrama čvorova isti čvor. Još uvijek ne postoji jednostavan algoritam za to. Iz dijagrama čvorova mogu se izračunati različite invarijante čvorova, veličine koje su iste kod dijagrama koji predstavljaju isti čvor. Jedna od najjednostavnijih invarijanti čvorova je Jonesov polinom. Moguće je da dva različita čvora imaju isti Jonesov polinom, ali je on i dalje koristan kao alat za razlikovanje mnogih čvorova.

Cilj rada je proučiti osnove teorije čvorova, invarijante čvorova, opisati Jonesov polinom te eventualno njegova proširenja.

Literatura:

Adams, Colin (2004), The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots, American Mathematical Society, ISBN 0-8218-3678-1

Mentor: Živković Marko

Napredne strukture podataka

Područje: Računarstvo

Prikladno za studij: svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

Preduvjeti: Strukture podataka i algoritmi

Naslov na engleskom: Advanced Data Structures

Opis teme: Cilj rada je proučiti naprednije strukture podataka od onih uvedenih na studiju, posebno razne vrste stabala i hrpa. Student će izračunati složenosti operacija na tim strukturama te utvrditi njihove prednosti u primjeni. Odabrane strukture mogu se implementirati u programskom jeziku po izboru.

Literatura:

Brass, P. (2008). Advanced Data Structures. Cambridge University Press.