

# Teme za diplomske radove za ak. godinu 2025/2026

PMF–Matematički odsjek

## Popis tema

|                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Arambašić Ljiljana, Tomašević Mateo: Determinanta i inverz blok-matrice                                                   | 1  |
| Basrak Bojan: Slučajne diskretne razdiobe i uzorkovanje                                                                   | 2  |
| Basrak Bojan: Osnovna pitanja teorije perkolacija                                                                         | 3  |
| Biočić Ivan: Lutrija: strategije ulaganja i analiza optimalnih oklada                                                     | 4  |
| Bosner Nela: Algoritmi evolucijske strategije i diferencijalne evolucije                                                  | 5  |
| Bosner Nela: Brzi algoritmi za matrično množenje                                                                          | 6  |
| Bošnjak Barbara: Slučajni grafovi i model malog svijeta                                                                   | 7  |
| Bošnjak Barbara: Modeli rasta mreža                                                                                       | 8  |
| Bujanović Zvonimir: Heuristička optimizacija ruta u pregledniku                                                           | 9  |
| Bujanović Zvonimir: Federirano strojno učenje                                                                             | 10 |
| Cota Boris: Monetarna politika u uvjetima neizvjesnosti                                                                   | 11 |
| Čačić Vedran: Sparivanje u općim grafovima                                                                                | 12 |
| Čačić Vedran: Suralni brojevi                                                                                             | 14 |
| Drmač Zlatko: Metoda empirijske interpolacije u redukciji modela                                                          | 15 |
| Drmač Zlatko: Predikcija veza u evoluciji mreža                                                                           | 16 |
| Drmač Zlatko: Prepoznavanje i klasifikacija slika koristeći tenzorski vlakić                                              | 17 |
| Drmač Zlatko: Prepoznavanje akcije u video zapisu ili na slici pomoću tenzorskih dekompozicija i dubokih neuronskih mreža | 18 |
| Dujella Andrej: Kriptografija i glazba                                                                                    | 20 |
| Erceg Marko: Neomeđeni linearni operatori i njihova proširenja na Hilbertovim prostorima                                  | 21 |
| Erceg Marko: Konveksna optimizacija u praćenju indeksa s ograničenim brojem imovine                                       | 22 |

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Franušić Zrinka: Fareyjevi nizovi</b>                                                                       | <b>23</b> |
| <b>Franušić Zrinka: Sustavi linearnih jednadžbi u nastavi matematike</b>                                       | <b>24</b> |
| <b>Franušić Zrinka: Faktorizacija Choleskog i primjene</b>                                                     | <b>25</b> |
| <b>Franušić Zrinka: Konike i kvadrike</b>                                                                      | <b>26</b> |
| <b>Gogić Ilja, Tomašević Mateo: Tenzorski produkti Banachovih prostora i aproksimacijsko svojstvo</b>          | <b>27</b> |
| <b>Gogić Ilja: Komutatori</b>                                                                                  | <b>28</b> |
| <b>Gogić Ilja: Potpuno pozitivni operatori i njihove primjene u kvantnoj teoriji informacija</b>               | <b>29</b> |
| <b>Goldstein Pavle: Geometrijske tehnike za analizu grafova</b>                                                | <b>30</b> |
| <b>Goldstein Pavle: Analiza eukariotskih proteinskih familija</b>                                              | <b>31</b> |
| <b>Grubišić Luka: Modeli evaluacije kvalitete LLM-generiranih transformacija teksta</b>                        | <b>32</b> |
| <b>Grubišić Luka: Analiza Extreme Learning Machine metode</b>                                                  | <b>33</b> |
| <b>Grubišić Luka: Varijacijski autoenkoderi i primjene</b>                                                     | <b>34</b> |
| <b>Horvat Marko: Poboljšanje vjernosti alata i modela za formalnu verifikaciju u informacijskoj sigurnosti</b> | <b>35</b> |
| <b>Horvat Marko: Chaitinov teorem nepotpunosti</b>                                                             | <b>36</b> |
| <b>Horvat Marko: Strategije redukcije u sustavima prepisivanja terma</b>                                       | <b>37</b> |
| <b>Horvat Sebastijan, Horvat Marko: Modeliranje problema dinamičke epistemičke logike u jeziku Prolog</b>      | <b>38</b> |
| <b>Huzak Miljenko: Uzročno statističko zaključivanje</b>                                                       | <b>39</b> |
| <b>Huzak Miljenko: Modeli stohastičke volatilnosti</b>                                                         | <b>40</b> |
| <b>Huzak Miljenko: Slučajne kovarijacijske matrice</b>                                                         | <b>41</b> |
| <b>Igaly Goran: Mogućnost primjene robotske ruke u nastavi</b>                                                 | <b>42</b> |
| <b>Igaly Goran, Horvat Sebastijan: Umjetna inteligencija u videoigri simulacije pojednostavljenog nogometa</b> | <b>43</b> |
| <b>Igaly Goran: Generiranje i vizualizacija fraktalnih glazbenih sekvenci pomoću L-sustava</b>                 | <b>44</b> |
| <b>Igaly Goran: Baze podataka u nastavi informatike</b>                                                        | <b>45</b> |
| <b>Iljazović Zvonko: Dekompozabilnost kontinuuma</b>                                                           | <b>46</b> |
| <b>Iljazović Zvonko: Adjunkcijski prostori</b>                                                                 | <b>47</b> |

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Jazbec Anamarija: Analiza trajanja aktivnosti korisnika online kladionice metodama analize doživljenja | 48 |
| Jurak Mladen: Konvolucijske neuralne mreže                                                             | 49 |
| Kamčev Nina: Algoritmi za stohastičke igre                                                             | 50 |
| Kamčev Nina: Evaluacija šahovskih pozicija: matematičko modeliranje i konstrukcija programa            | 51 |
| Kovač Vjekoslav: Klasični model grabežljivca i plijena                                                 | 52 |
| Kovač Vjekoslav: Funkcija zbroja djelitelja: povijesni pregled i problemi                              | 53 |
| Kozić Slaven: Problem četiri broja                                                                     | 54 |
| Krčadinac Vedran: $q$ -Račun u kombinatorici                                                           | 55 |
| Krčadinac Vedran: Ortogonalni polinomi u kombinatorici                                                 | 56 |
| Lubura Strunjak Snježana: CART - Klasifikacijska i regresijska stabla odlučivanja                      | 57 |
| Lubura Strunjak Snježana: BART - Bayesovska aditivna regresijska stabla odlučivanja                    | 58 |
| Lubura Strunjak Snježana: Bayesovski hijerarhijski modeli                                              | 59 |
| Ljulj Matko: Lema o podizanju eksponenta                                                               | 60 |
| Matejak Cvenić Karolina: Istraživanje učeničkog konceptualnog razumijevanja zakona idealnog plina      | 61 |
| Matejak Cvenić Karolina: Usporedba učeničkog rješavanja zadataka iz fizike s kalkulatorom i bez njega  | 62 |
| Milin Šipuš Željka: Ekvidistantni skupovi i generalizacije                                             | 63 |
| Milin Šipuš Željka: Financijska pismenost u nastavi matematike                                         | 64 |
| Milin Šipuš Željka: Pojam funkcije u nastavi matematike                                                | 65 |
| Mrazović Rudi: Generiranje slučajnih latinskih kvadrata                                                | 66 |
| Muha Boris: Nash-Kuiperov teorem                                                                       | 67 |
| Muha Boris: Matematičko modeliranje umjetne gušterače: spregnuti Stokes-Biotov sustav                  | 68 |
| Muić Goran: Ireducibilnost polinoma s racionalnim koeficijentima                                       | 69 |
| Muić Goran: Konstrukcija realnih brojeva pomoću Dedekindovih rezova                                    | 70 |
| Najman Filip: Kriptografija bazirana na kodovima                                                       | 71 |
| Najman Filip: Financijski sustavi bazirani na kriptovalutama                                           | 72 |

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Nakić Ivica: Nelinearno upravljanje linearnim sustavima                                                   | 73 |
| Orel Ognjen: Primjena statističkih metoda u procesu izgradnje skladišta po-<br>dataka                     | 74 |
| Pedić Tomić Veronika: Pogreške učenika u učenju algebre                                                   | 75 |
| Pedić Tomić Veronika: Primjena digitalnih alata u nastavi matematike                                      | 76 |
| Planinić Hrvoje: Modeliranje i zaključivanje za prostorne točkovne uzorke                                 | 77 |
| Planinić Hrvoje: Lokalna konvergencija slučajnih grafova                                                  | 78 |
| Prlić Ana: Konačna polja i njihove primjene u kriptografiji                                               | 79 |
| Prlić Ana: Primjene determinanti u algebri, geometriji i analizi                                          | 80 |
| Prlić Ana: Geometrijske transformacije i njihova primjena u natjecateljskoj<br>geometriji                 | 81 |
| Radulović Marko: Kvantitativno modeliranje kreditnog rizika                                               | 83 |
| Radulović Marko: Modeliranje invazije tumora                                                              | 84 |
| Radulović Marko: Mehanika biološkog rasta                                                                 | 85 |
| Sandrić Nikola: Impulsne neuronske mreže                                                                  | 86 |
| Sandrić Nikola: Razvoj i treniranje modela za igranje videoigara primjenom<br>algoritama pojačanog učenja | 87 |
| Slijepčević Siniša: Rasna diskriminacija među košarkaškim sucima i line-<br>arna regresija                | 88 |
| Slijepčević Siniša: Mjerenje pristranosti u potrošačkom kreditiranju                                      | 89 |
| Slijepčević Siniša: Utjecaj imunoterapije na smrtnost od raka i linearna re-<br>gresija                   | 90 |
| Slijepčević Siniša: Optimizacija marketinških akcija i linearna regresija                                 | 91 |
| Špalj Eva: Trigonometrijske funkcije - Prijelaz s geometrijskih alata na funk-<br>cije                    | 92 |
| Špalj Eva: Eksponencijalna i logaritamska funkcija u srednjoj školi                                       | 93 |
| Tambača Josip: Matematičko modeliranje pužnice                                                            | 94 |
| Tambača Josip: Optimizacija portfelja                                                                     | 95 |
| Valentić Ivana: Teorija izleta za Wright–Fisherov i Moranov model                                         | 96 |
| Valentić Ivana: Granično ponašanje guljenja konveksnih ljuski                                             | 97 |
| Valentić Ivana: Pronalaženje stršćih vrijednosti guljenjem konveksnih lju-<br>ski                         | 98 |

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Valentić Ivana: Algoritmi za guljenje konveksnih ljuski</b>                      | <b>99</b>  |
| <b>Varošanec Sanja: Strategije poučavanja osnovnih geometrijskih teorema</b>        | <b>100</b> |
| <b>Varošanec Sanja: Primjene metode površine u planimetriji</b>                     | <b>101</b> |
| <b>Varošanec Sanja: Obujam u nastavi matematike</b>                                 | <b>102</b> |
| <b>Varošanec Sanja: Formiranje pojma cijelog broja u nastavi matematike</b>         | <b>103</b> |
| <b>Varošanec Sanja: Trokuti čije stranice čine aritmetički niz</b>                  | <b>104</b> |
| <b>Varošanec Sanja: Heronovi trokuti</b>                                            | <b>105</b> |
| <b>Vondraček Zoran: Lokalno vrijeme Brownovog gibanja</b>                           | <b>106</b> |
| <b>Vondraček Zoran: Jaka aproksimacija slučajne šetnje pomoću Brownovog gibanja</b> | <b>107</b> |
| <b>Vrdoljak Marko: Robusnost i metoda potpornih vektora</b>                         | <b>108</b> |
| <b>Vrdoljak Marko: Optimizacija i ravnoteža u prometnim mrežama</b>                 | <b>109</b> |
| <b>Wagner Vanja: Primjene Markovljevih lanaca u analiza slijeda klikova</b>         | <b>110</b> |
| <b>Wagner Vanja: Neprekidni modeli financijskih tržišta s troškovima trgovanja</b>  | <b>111</b> |

**Mentor:** Arambašić Ljiljana

**Suvoditelj:** Tomašević Mateo

## Determinanta i inverz blok-matrice

**Područje:** Linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Nema

**Naslov na engleskom:** Determinant and inverse of a block-matrix

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu proučavat će se blok-matrice, to jest matrice čiji su elementi matrice odgovarajućeg tipa koje nazivamo podmatricama početne matrice. Zapis matrice u obliku blok-matrice omogućuje jednostavnije i elegantnije dokaze određenih tvrdnji, te pojednostavljivanje računanja s matricama velikog formata. U ovom diplomskom radu poseban naglasak bit će na računanju determinante i inverza određenih blok-matrica.

### Literatura:

Lj. Arambašić, Linearna algebra, Element, Zagreb, 2022.

J. Hefferon, Linear algebra, <https://hefferon.net/linearalgebra/index.html>

C. D. Meyer, Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, Philadelphia, 2000.

F. Zhang, Matrix theory: basic results and techniques, New York, 2011.

**Mentor:** Basrak Bojan

## Slučajne diskretne razdiobe i uzorkovanje

**Područje:** Statistika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Random discrete distributions and their sampling

**Opis teme:** Važna klasa slučajnih vjerojatnosnih mjera može se iterativno konstruirati rezidualnim alokacijskim modelima tzv. *stick-breaking* tipa. Zbog svoje bitne uloge u matematici, statistici i primjenama, neki od ovih modela pomno su proučavani već desetljećima. To se posebno odnosi na tzv. Poisson-Dirichletov model. U članku Ishwaran i James iz 2001. godine, autori proučavaju proširenu klasu ovakvih modela, kao i neke napredne algoritme za simulaciju uzoraka iz ovih razdioba. Cilj rada je prikazati navedenu klasu modela, neke od algoritama za njihovu simulaciju, kao i neke od povezanih metoda koje se koriste u neparametarskoj bayesovskoj statističkoj teoriji.

**Literatura:**

Ishwaran, H., i James, L. F. (2001). Gibbs sampling methods for stick-breaking priors. *Journal of the American statistical Association*, 96, 161-173.

**Mentor:** Basrak Bojan

## Osnovna pitanja teorije perkolacija

**Područje:** Vjerojatnost, Slučajni procesi

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** Slučajni procesi

**Naslov na engleskom:** Basic questions of percolation theory

**Opis teme:** Glavna pitanja teorije perkolacija motivirana su problemima iz statističke fizike, odn. proučavanjem širenja fluida kroz porozne medije. Teorija studira klastere u modelima slučajnih mreža te se u pravilu bavi proučavanjem složenih globalnih svojstava ovih sustava koja potiču iz jednostavnih lokalnih pretpostavki. Cilj je diplomskog rada prikazati osnovne perkolacijske modele na pravilnim rešetkama, njihova svojstva te neki od istaknutih klasičnih rezultata poput npr. Menshnikove eksponencijalne ograde na vjerojatnost perkolacije u subkritičnom režimu.

**Literatura:**

Duminil-Copin, H. (2018). Sixty years of percolation. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018* (pp. 2829-2856).

Grimmett, G. (2012). Percolation. Springer.

**Mentor:** Biočić Ivan

## Lutrija: strategije ulaganja i analiza optimalnih oklada

**Područje:** Vjerojatnosni modeli u financijskom modeliranju

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematička statistika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Lottery: investment strategies and analysis of optimal bets

**Opis teme:** Rad se bavi pitanjem: "Zašto je lutrija loša investicija?" Koristeći matematiku i ekonomsku teoriju analiziraju se lutrijske igre s rotirajućim velegoditcima poput Mega Millions i Powerball. Dat će se matematički model za analizu lutrijskih izvlačenja te dati kriteriji za određivanje kada izvlačenje ima pozitivnu očekivanu stopu povrata. Pokazat će se da izvlačenja s "malom" prodajom listića mogu ponuditi pozitivne stope povrata kada velegoditak premaši određeni prag, dok izvlačenja s "velikom" prodajom uvijek imaju negativne stope povrata. Konačno, prelazi se izvan čiste matematike i primjenjuju se rezultati na teoriju portfelja kako bi se analizirao rizik investicijskog portfelja.

### Literatura:

A. Abrams i R. S. Garibaldi, Finding good bets in the lottery, and why you shouldn't take them, Amer. Math. Monthly **117** (2010), no. 1, 3–26.

**Mentor:** Bosner Nela

## Algoritmi evolucijske strategije i diferencijalne evolucije

**Područje:** Optimizacija; Strukture podataka i algoritmi

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Strukture podataka i algoritmi; Uvod u optimizaciju; Znanstveno računanje 2; Numeričke metode financijske matematike

**Naslov na engleskom:** Evolution strategies and differential evolution algorithms

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu obradila bi se dva heuristička algoritma za rješavanje optimizacijskih problema inspirirana evolucijom. Algoritam evolucijske strategije je specifičan evolucijski algoritam koji ima sposobnost samoadaptacije, u smislu da tijekom svog izvođenja mijenja stopu generiranja raznolikosti na temelju povratnih informacija o konvergenciji optimizacijskog procesa. To se postiže adaptacijom strategijskih parametara koji utječu na mutaciju, što se može postići determinističkim shemama ili ubacivanjem samih strategijskih parametara u evolucijski proces. Algoritam diferencijalne evolucije je algoritam baziran na pretraživanju populacija, i ima dosta sličnosti sa evolucijskim algoritmima. Ovaj algoritam iterativno generira dobra rješenja danog problema manipulacijom populacije dosadašnjih rješenja. S druge strane, poput evolucijskih strategija također ima mogućnost samoadaptacije stope mutacije na temelju lokacija rješenja u populaciji. Od svake vrste algoritama obradilo bi se nekoliko varijanti, a njihov rad bi se ilustrirao na konkretnim primjerima izrađenima u MATLAB-u ili nekom višem programskom jeziku.

### Literatura:

A. Brabazon, M. O'Neal, S. McGarraghy, "Natural Computing Algorithms", Springer, Berlin, 2015.

**Mentor:** Bosner Nela

## Brzi algoritmi za matrično množenje

**Područje:** Numerička naliza; Znanstveno računanje

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Znanstveno računanje 1; Numeričke metode financijske matematike

**Naslov na engleskom:** Fast algorithms for matrix multiplication

**Opis teme:** Poznata je činjenica da standardno matrično množenje dviju  $n \times n$  matrica zahtijeva  $\mathcal{O}(n^3)$  operacija. Za velike matrice to često predstavlja preveliku složenost, tako da je i najmanje ubrzanje dobrodošlo kod primjene te česte matrične operacije. U ovom diplomskom radu obradile bi se razne varijante originalnog algoritma matričnog množenja koje reduciraju njegovu složenost. Prvi algoritam koji je postigao subkubičnu složenost je Strassenov algoritam sa složenošću  $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) = \mathcal{O}(n^{2.807})$ , koji je i danas najbrži praktični algoritam za matrice većih dimenzija. Nakon njega slijedili su algoritmi koji su uspjeli minimalno sniziti teoretsku složenost, međutim, oni su zbog svoje komplicirane strukture isplativi samo na matricama ogromnih dimenzija, puno većima od matrica koje se pojavljuju u praksi. Takav je Coppersmith i Winogradov algoritam, i njegovi sljedbenici, koji su složenost reducirali na  $\mathcal{O}(n^{2.3729})$ . Osim računске složenosti, algoritmi za matrično množenje ubrzavaju se posebnim tehnikama blokiranja i paralelizacije, koje optimalno koriste memorijsku hijerarhiju. Implementiran na taj način i standardni algoritam postao je jedan od najefikasnijih algoritama uopće. U radu bi se dao pregled, opis i analiza složenosti predloženih varijanti algoritma, te bi se njihov rad ilustrirao na konkretnim primjerima izrađenima u nekom višem programskom jeziku.

### Literatura:

Å. Björck, "Numerical Methods in Matrix Computations", Springer, Cham, 2015.  
V. Strassen, "Gaussian elimination is not optimal", Numerische Mathematik 13, 1969, pp. 354–356.

**Mentor:** Bošnjak Barbara

## Slučajni grafovi i model malog svijeta

**Područje:** Diskretna matematika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Diskretna matematika, Vjerojatnost

**Naslov na engleskom:** Random graphs and The Small-World model

**Opis teme:** U ovom radu će se proučavati mreže koristeći pojmove teorije grafova i vjerojatnosti. Glavna tema rada je "The small-world model" kojeg su kreirali Watts i Strogatz. Model je inspiriran socijalnim mrežama gdje većina ljudi ima prijatelje među geografski bliskim ljudima, dok svi imaju i par prijatelja koji žive daleko. U radu će se obraditi osnovni pojmovi teorije slučajnih grafova, konstruirati "The small-world model" te opisati pojmovi poput distribucije stupnjeva, prosječne duljine puta i koeficijenta grupiranja. Također će se opisati i primjena modela u ekonomiji ili biologiji.

### Literatura:

- D. J. Watts, "Networks, dynamics, and the small world phenomenon", Am. J. Sociol. 105, 493–592 (1999), [https://www.columbia.edu/itc/sociology/watts/w3233/client\\_edit/watts\\_networks.pdf](https://www.columbia.edu/itc/sociology/watts/w3233/client_edit/watts_networks.pdf)
- M. E. J. Newman, "The structure and function of complex networks" (2003), <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0303516>
- M. D. König, S. Battiston, "From Graph Theory to Models of Economic Networks. A Tutorial" (2009), [https://www.researchgate.net/publication/226175200\\_From\\_Graph\\_Theory\\_to\\_Models\\_of\\_Economic\\_Networks\\_A\\_Tutorial](https://www.researchgate.net/publication/226175200_From_Graph_Theory_to_Models_of_Economic_Networks_A_Tutorial)
- F. Vega-Redondo, "Complex Social Networks", Series: Econometric Society Monographs, Cambridge University Press (2007)

**Mentor:** Bošnjak Barbara

## Modeli rasta mreža

**Područje:** Diskretna matematika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Diskretna matematika, Vjerojatnost

**Naslov na engleskom:** Models of Network Growth

**Opis teme:** U ovom radu će se obraditi modeli rasta mreža koristeći teoriju grafova i vjerojatnost. Proučit će se klase modela za koje je glavni cilj rada objasniti njihova svojstva te karakteristična strukturalna svojstva. Naime, u tim modelima mreže rastu postepenim dodavanjem vrhova i bridova na određeni način kojim očekujemo opis procesa rasta mreža koje nalazimo u primjenama. Uvest će se osnovna teorija o Poissonovim i generaliziranim slučajnim grafovima te opisati modeli, poput Priceovog ili Barabási–Albert modela. Dodatno će se opisati primjene modela u ekonomiji ili biologiji.

### Literatura:

M. E. J. Newman, "The structure and function of complex networks" (2003), <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0303516>

M. D. König, S. Battiston, "From Graph Theory to Models of Economic Networks. A Tutorial" (2009), [https://www.researchgate.net/publication/226175200\\_From\\_Graph\\_Theory\\_to\\_Models\\_of\\_Economic\\_Networks\\_A\\_Tutorial](https://www.researchgate.net/publication/226175200_From_Graph_Theory_to_Models_of_Economic_Networks_A_Tutorial)

F. Vega-Redondo, "Complex Social Networks", Series: Econometric Society Monographs, Cambridge University Press (2007)

**Mentor:** Bujanović Zvonimir

## Heuristička optimizacija ruta u pregledniku

**Područje:** Računarstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** poznavanje osnovnih koncepata razvoja web-aplikacija

**Naslov na engleskom:** Heuristic route optimization in the browser

**Opis teme:** Brojni optimizacijski problemi u logistici, poput problema trgovačkog putnika (TSP) ili raspoređivanja vozila (VRP), su NP-teški i njihovo rješavanje u praksi se svodi na (meta)heuristike. S druge strane, zbog privatnosti podataka, nužnosti *offline* rada ili potrebe za brzom interakcijom s korisničkim sučeljem, u nekim slučajevima se optimizacija ne može vršiti na snažnom, udaljenom serverskom računalu, nego ju treba provesti izravno u pregledniku na računalu ili mobilnom uređaju korisnika.

Dva su cilja ovog diplomskog rada: istražiti i opisati osnovne heuristike za problem trgovačkog putnika i/ili raspoređivanja vozila (poput Nearest Neighbor, 2/3-or-opt, Clarke–Wright, Iterated Local Search, eventualno Lin–Kernighan lite), te ih što efikasnije implementirati korištenjem modernih web-tehnologija. Student će napraviti web-aplikaciju koja će vizualizirati tijek inkrementalnih poboljšanja prilikom izvršavanja odabranog algoritma te omogućiti njihovu evaluaciju na standardnim benchmark problemima (TSPLIB, CVRPLIB) i usporedbu performansi ostvarenih uključivanjem sve naprednijih web-tehnologija (JavaScript → WebWorkers → WebAssembly).

### Literatura:

D. Applegate et al., *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, 2007.

P. Toth, D. Vigo, *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*, MOS-SIAM Series on Optimization, 2014.

S. Luke, *Essentials of Metaheuristics*, <https://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>, 2013.

Dokumentacija standarda WebAssembly, <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/WebAssembly>

**Mentor:** Bujanović Zvonimir

## Federirano strojno učenje

**Područje:** Računarstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** poznavanje osnovnih koncepata strojnog učenja i razvoja web-aplikacija

**Naslov na engleskom:** Federated machine learning

**Opis teme:** Federirano učenje (FL) je koncept strojnog učenja kod kojeg se, umjesto standardnog centralnog prikupljanja podataka i njihove obrade, ovaj proces odvija na strani klijenta. Tako korisnički uređaji (putem web-preglednika ili mobilne aplikacije) lokalno računaju gradijente i promjene težina u neuronskoj mreži, a poslužitelj samo agregira ažuriranja. Na taj način podaci nikada ne napuštaju korisnički uređaj, čime se povećava efikasnost zbog potrebe za manjim mrežnim prometom, a može osigurati i privatnost podataka.

U ovom diplomskom radu student će prikazati temeljne ideje i algoritme federiranog učenja (npr. FedAvg), izazove rada s podacima koji nisu svi jednako distribuirani, problematiku ograničenja komunikacije, te diskutirati metode privatnosti kao što su sigurna agregacija i diferencijalna privatnost. Poseban naglasak bit će na implementaciji federiranog učenja u web-pregledniku korištenjem TensorFlow.js i web tehnologija. Student će implementirati web-aplikaciju u kojoj više klijenata lokalno trenira model (na primjer, klasifikator rukopisa) i sudjeluje u nekoliko iteracija federiranog učenja, dok poslužitelj orkestrira i agregira ažuriranja. Opcionalno, student će proučiti razvojni okvir Flower i korištenjem njega implementirati aplikaciju.

### Literatura:

P. Kairouz et al., *Advances and Open Problems in Federated Learning*, Foundations and Trends in Machine Learning, Vol. 14, No. 1–2, pp 1–210, 2021.

B. McMahan et al., *Communication-Efficient Learning of Deep Networks from Decentralized Data*, Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, PMLR 54:1273-1282, 2017.

TensorFlow.js, dokumentacija, <https://www.tensorflow.org/js/>

Flower: A Friendly Federated AI Framework, <https://flower.ai>

**Mentor:** Cota Boris

## Monetarna politika u uvjetima neizvjesnosti

**Područje:** Opća ekonomija

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Položen ispit iz Makroekonomike

**Naslov na engleskom:** Monetary policy under uncertainty

**Opis teme:** Neizvjesnost djeluje na makroekonomska kretanja što djeluje na reakciju monetarne politike. Polazi se od činjenice kako svijet nije linearan i kako distribucije ekonomskih varijabli nisu normalne (Gaussove) već imaju imaju debele repove (*fat tails*). To znači kako se ekstremni događaji (kao što su na primjer financijske krize) javljaju češće nego što bi se očekivalo u normalnoj distribuciji, a učinci šokova i ekonomske politike vrlo su ovisni o kontekstu. Zato monetarna politika mora reagirati kroz aktivnu stabilizaciju jaza proizvodnje, a ne samo inflacije. Temeljni model se sastoji od tri jednadžbe koje opisuju:

1. agregatnu potražnju, koja ovisi o očekivanoj budućoj potražnji i realnoj kamatnoj stopi,
2. agregatna ponudu (ili Novokeynesijansku Phillipsovu krivulju) pri čemu inflacija ovisi o očekivanoj inflaciji i jazu proizvodnje
3. Taylorovo pravilo koje pokazuje kako središnja banka postavlja kamatne stope kako bi postigla ciljnu inflaciju i stabilizirala jaz proizvodnje.

Pretpostavka je kako ljudi kao ekonomski akteri ne razumiju potpunu složenost svijeta, te koriste jednostavna heuristička pravila za donošenje odluka.

### Literatura:

Anderson, S., de Palma, A., Thisse, J.-F. (1992). \*Discrete Choice Theory of Product Differentiation\*. MIT Press, Cambridge, Mass.

De Grauwe, P., and Ji, Y. (2019). \*Behavioural Macroeconomics: Theory and Policy\*. Oxford University Press.

De Grauwe, P. and Ji, Y. (2024). Trust and Monetary Policy. *Journal of Forecasting*, 43(4), 903-931.

De Grauwe, P. and Ji, Yuemei (2024). Monetary Policy and Radical Uncertainty. CE-Sifo Working Paper No. 11068.

Gali, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle*. Princeton University Press.

**Mentor:** Čačić Vedran

## Sparivanje u općim grafovima

**Područje:** teorija grafova

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Matching in general graphs

**Opis teme:** Poznati problem sparivanja, traženja što je moguće više disjunktih bridova u grafu, obično se promatra za *bipartitne* grafove, čiji vrhovi su unaprijed podijeljeni u dvije vrste, tako da svaki brid spaja raznovrsne vrhove. Recimo, ako se nekoliko programera želi zaposliti na nekoliko otvorenih pozicija, nema smisla imati brid između dvaju programera niti između dviju pozicija. Poznati su mnogi algoritmi, kao što je Ford–Fulkersonov, za rješavanje takvih problema, i proučene su mnoge optimizacije kao i teorijske ograde za složenost. Problem je svakako moguće riješiti u polinomnom (precizno, kvadratnom) vremenu.

U općim grafovima, koji ne moraju biti bipartitni, problem se čini mnogo težim. Već sama potencijalna particija skupa vrhova na dva disjunktne podskupa, među kojima bi se tražilo sparivanje, može se izvesti na eksponencijalno mnogo načina. Ipak, podjela se može izvesti paralelno s traženjem sparivanja, tako da se svaki novi vrh (pretraživanjem u širinu) proglasi suprotne vrste od vrha preko kojeg smo do njega došli.

Ako pritom naiđemo na proturječne zahtjeve za pojedini vrh, to znači da u početnom grafu postoji ciklus neparne duljine, koji sažmemo u jedan vrh (*pupoljak*) i neko vrijeme s njim radimo kao nedjeljivim objektom, ostavljajući njegovo rješavanje za kasnije. Eliminirajući sve takve cikluse, dobili smo bipartitni graf, a zapravo i njegovo sparivanje. Za kraj još samo preostaje *rascvjetati* sve pupoljke natrag u cikluse i vidjeti kako ih najbolje uklopiti u već postojeće sparivanje.

To je grubi opis Edmondsova *cvjetajućeg algoritma*, čiji precizni opis, implementacija, analiza, ocjena složenosti i dokaz korektnosti čine osnovu diplomskog rada. Po želji studenta, mogu se promatrati srodni problemi kao što je savršeno sparivanje najmanjeg troška, ili Micali–Vaziranijeva optimizacija.

### Literatura:

Richard Karp: Edmond's Non-Bipartite Matching Algorithm (2006), <https://web.archive.org/web/20081230183603/http://www.cs.berkeley.edu/~karp/greatalgo/lecture05.pdf>

Jack Edmonds: "Paths, trees, and flowers" (1965), Canadian Journal of Mathematics #17 (449–467)

Robert Tarjan: Sketchy Notes on Edmonds' Incredible Shrinking Blossom Algorithm for General Matching (2002), <https://www.cs.dartmouth.edu/~ac/Teach/CS105-Winter05/Handouts/tarjan-blossom.pdf>

**Mentor:** Čačić Vedran

## Surealni brojevi

**Područje:** analiza, teorija skupova

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** Surealni brojevi

**Opis teme:** Surealne brojeve otkrio/izumio je John Horton Conway početkom sedamdesetih godina prošlog stoljeća, a ime im je dao Donald Knuth u svojoj knjizi *Surreal numbers* iz 1974. Slične koncepte otkrili su i brojni drugi matematičari u prošlom stoljeću, ali Conwayev je najrazrađeniji. Radi se o enormno velikoj kolekciji (pravoj klasi, terminologijom teorije skupova) rekursivno izgrađenih brojeva, koja uključuje sve realne brojeve, infinitezimale, ordinale, kao i vrijednosti raznih izraza definirane iz njih pomoću brojnih analitičkih funkcija.

Štoviše, na klasi surealnih brojeva moguće je definirati savršeno usklađene operacije zbrajanja i množenja te relaciju uređaja, dobivši tako uređeno polje (do na činjenicu da nije skup). Brojni teoremi iz analize i teorije brojeva mogu se iskazati, a neki i dokazati, i u tom mnogo općenitijem kontekstu od običnog polja realnih brojeva. Diplomski rad zamišljen je kao prezentacija nekih od tih rezultata.

**Literatura:**

C. Tøndering, *Surreal Numbers—an introduction*, 2019

D. Knuth, *Surreal Numbers: how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*, Addison–Wesley, 2006

**Mentor:** Drmač Zlatko

## Metoda empirijske interpolacije u redukciji modela

**Područje:** numerička matematika, znanstveno računanje

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, teorija matrica, programiranje

**Naslov na engleskom:** Empirical interpolation method for model order reduction

**Opis teme:** Empirijska interpolacija je metoda koja se koristi u konstrukciji niže-dimenzionalnih aproksimacija modela visoke rezolucije. Osnovna ideja je da se aproksimacija rješenja velikog sustava diferencijalnih jednadžbi konstruira u dobro odabranom potprostoru relativno male dimezije. Zbog problema složenosti se odgovarajuće ortogonalne projektore zamjenjuje kosim projektorima koji imaju određena interpolatorna svojstva, pri čemu se pozicije u domeni u kojima se interpolira određuje empirijski, na osnovu dostupnih podataka.

Ciljevi ove radnje su efikasna implementacija metode, njena teorijska analiza, te primjena na odabranim studijskim primjerima. Za praktični dio je nužna vještina programiranja (Matlab ili Python, te neki od paketa za numeričke simulacije (npr. SimFlow, FreeFEM, Elmer)). Sve proučavane metode će biti testirane na primjerima iz realnih aplikacija. Otvorena je mogućnost istraživačkog rada na ovoj temi.

### Literatura:

1. M. Barrault, Y. Maday N. C. Nguyen, A. T. Patera, An 'empirical interpolation' method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations, Comptes Rendus Mathematique Volume 339, Issue 9, 1 November 2004, Pages 667-672.
2. S. Chaturantabut, D.C. Sorensen, Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. SIAM Journal on Scientific Computing 32 (5), 2737-2764.
3. Z Drmač, S Gugercin, A new selection operator for the discrete empirical interpolation method-improved a priori error bound and extensions. SIAM Journal on Scientific Computing 38 (2), A631-A648.
4. Y. Maday, O. Mula. A generalized empirical interpolation method : application of reduced basis techniques to data assimilation. Springer. Analysis and Numerics of Partial Differential Equations, Springer, pp.221-235, 2013, Springer INdAM Series
5. S. Chellappa, L. Feng, P. Benner. Discrete empirical interpolation in the tensor t-product framework, arXiv:2410.14519v1.

**Mentor:** Drmač Zlatko

## Predikcija veza u evoluciji mreža

**Područje:** Strojno učenje, znanstveno računanje, numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Teorija matrica, multilinearna algebra, znanstveno računanje, teorija grafova, programiranje

**Naslov na engleskom:** Link prediction in evolving networks

**Opis teme:** Dinamika u raznim vrstama mreža se može matematički modelirati pomoću bipartitnog grafa koji evoluira u vremenu. Pitanje je da li se može nakon određenog vremena praćenja dinamike predvidjeti buduće veze. Prirodna struktura za operacije na grafovima su matrice, a evolucija grafa u vremenu prirodno postaje tenzor. Zbog toga su moderne metode predikcije veza među vrhovima bazirane na tenzorima i tenzorskim dekompozicijama. U ovoj radnji će problem biti analiziran pomoću tenzorskih kanonskih poliadskih dekompozicija (npr. PARAFAC), te koristeći bipartitnu Katzovu mjeru i Holt-Wintersov prediktor. Rad na ovoj temi uključuje teoriju matrica i tenzora, numeričke metode, i razvoj softwera. Za praktični dio je nužna vještina programiranja (Python s bibliotekama, Matlab i sl.). Sve proučavane metode će biti testirane na primjerima/podacima iz realnih aplikacija. Tema vrijedi samo za a.g.2025/26 i ne može se prenositi u sljedeću a.g.

### Literatura:

1. M.D. Dunlavy, T. G. Kolda, E. Acar: Temporal Link Prediction Using Matrix and Tensor Factorizations, ACM Trans. Knowl. Discov. Data, 2011.
2. Menon, A.K., Elkan, C. (2011). Link Prediction via Matrix Factorization. In: Gunopulos, D., Hofmann, T., Malerba, D., Vazirgiannis, M. (eds) Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD 2011.
3. T. Kolda, B. Bader: Tensor Decompositions and Applications. SIAM REVIEW, Vol. 51, No. 3, pp. 455–500, 2009.

**Mentor:** Drmač Zlatko

## Prepoznavanje i klasifikacija slika koristeći tenzorski vlakić

**Područje:** Strojno učenje, znanstveno računanje, numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Teorija matrica, multilinearna algebra, znanstveno računanje, primijenjena matematika, programiranje

**Naslov na engleskom:** Image recognition and classification using tensor-train decomposition

**Opis teme:** Prepoznavanje i klasifikacija objekata su centralni problemi računalnog vida. Tenzori se pri tome javljanju i kao prirodna struktura podataka i kao pogodan matematički model za razne operacije kao npr. kompresija, klasifikacija. Posebno su korisne razne vrste tenzorskih dekompozicija, koje se koriste za redukciju dimenzije problema (smanjenje volumena podataka i manja složenost u terminima računskih operacija). Tenzorski vlakić (tensor train decomposition, TT) je trenutno jedna od najboljih metoda za računanje s tenzorima velikih dimenzija, s širokim spektrom primjena. U ovom radu će TT dekompozicija biti primijenjena na problem klasifikacije slika - prepoznavanje objekata, lica osoba itd. Rad na ovoj temi uključuje teoriju matrica i tenzora, numeričke metode, i razvoj softwera. Za praktični dio je nužna vještina programiranja (Python s bibliotekama, Matlab i sl.). Sve proučavane metode će biti testirane na primjerima/podacima iz realnih aplikacija. Tema vrijedi samo za a.g.2025/26 i ne može se prenositi u sljedeću a.g.

### Literatura:

1. Brandoni, D., Simoncini, V. Tensor-Train decomposition for image recognition. *Calcolo* 57, 9 (2020)
2. Ivan Oseledets. Tensor-train decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2295–2317, 2011
3. Ning Hao, Misha E Kilmer, Karen Braman, and Randy C Hoover. Facial recognition using tensor-tensor decompositions. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(1):437–463, 2013.

**Mentor:** Drmač Zlatko

## Prepoznavanje akcije u video zapisu ili na slici pomoću tenzorskih dekompozicija i dubokih neuronskih mreža

**Područje:** Umjetna inteligencija, strojno učenje, znanstveno računanje, numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Teorija matrica, multilinearna algebra, znanstveno računanje, primijenjena matematika, programiranje

**Naslov na engleskom:** Action recognition in videos and images using tensor decompositions and deep neural networks

**Opis teme:** Prepoznavanje akcije u video zapisu ili na slici spada u probleme računalnog vida kao dijela umjetne inteligencije. Za učitani kratki video zapis, algoritam treba prepoznati sadržaj, tj. izvijestiti o kojoj od ranije naučenih radnji/akcija se radi. Primjene uključuju npr. autonomna vozila, video nadzor/sigurnosne kamere. U odnosu na probleme prepoznavanja znakova ili lica na slici (koja je reprezentirana matricom), prepoznavanje akcije ima i vremensku komponentu, tako da je tenzor reda tri prirodan matematički model za obradu video zapisa. U novije vrijeme, metode dubokog učenja, posebice neuronske mreže, postale su dominantan pristup za prepoznavanje akcija u video zapisima. Razvijene su specijalizirane arhitekture kao što su 3D konvolucijske neuronske mreže (3D-CNN), dvostruke strujne neuronske mreže (Two-Stream Networks) te transformerski pristupi prilagođeni video sekvencama. Ove metode automatski uče relevantne značajke iz sirovih podataka, postižu impresivnu točnost, ali zahtijevaju velike količine podataka za učenje i računalne resurse. U ovoj radnji će biti analizirani odabrani algoritmi numeričke multilinearne algebre koji uspješno rješavaju problem prepoznavanja akcije. Bit će korištene tenzorske dekompozicije (npr. SVD višeg reda (HOSVD), Tuckerova dekompozicija itd.). Paralelno će se istražiti i suvremene metode dubokog učenja prilagođene obradi video sekvenci. Cilj rada je provesti komparativnu analizu između tradicionalnih tenzorskih pristupa i modernih neuronskih mreža, evaluirajući ih prema točnosti, računalnoj složenosti, potrebama za podacima i robustnosti. Rad na ovoj temi uključuje teoriju matrica i tenzora, numeričke metode, duboko učenje i razvoj softwera. Za praktični dio je nužna vještina programiranja (Python s bibliotekama kao što su TensorLy, PyTorch/TensorFlow, OpenCV). Sve proučavane metode će biti testirane na primjerima iz realnih aplikacija. Otvorena je mogućnost istraživačkog rada na ovoj temi. Tema vrijedi samo za a.g.2025/26 i ne može se prenositi u sljedeću a.g.

**Literatura:**

1. M. Sun, S. Wang, X. Liu, C. Jia, C. Zhou, Human Action Recognition Using Tensor Principal Component Analysis, *Journal of Computational Information Systems*, 8 (2012)
2. Zhang, J., Han, Y. Jiang, J. Tucker decomposition-based tensor learning for human action recognition. *Multimedia Systems* 22, 343–353 (2016)
3. Y. M. Lui, J. R. Beveridge and M. Kirby, Action classification on product manifolds, 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco, CA, USA, (2010)
4. K. Simonyan, A. Zisserman, Two-Stream Convolutional Networks for Action Recognition in Videos, *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 2014
5. D. Tran, H. Wang, L. Torresani, J. Ray, Y. LeCun, M. Paluri, A Closer Look at Spatiotemporal Convolutions for Action Recognition, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018

**Mentor:** Dujella Andrej

## Kriptografija i glazba

**Područje:** Kriptografija

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Cryptography and music

**Opis teme:** Obradit će se primjene glazbe u kriptografiji, koje uključuju nekoliko poznatih metoda za šifriranje poruka pomoću glazbe, a također i načine za skrivanje poruka (steganografija) u zvuk i glazbu.

**Literatura:**

C.-S. Lu, *Multimedia Security: Steganography and Digital Watermarking Techniques for Protection of Intellectual Property*, Idea Group Publishing, 2005

P. Špaček, P. Sobota, *Musipher: Hiding information in music composition*, Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 25 (2021), 161-179.

B. Thompson, *Musical Cryptography: Codes, Ciphers, Form, and Function*, University of Nottingham, 2024.

J. Winterson, *Maths & Music*, University of Huddersfield Press, 2024.

**Mentor:** Erceg Marko

## Neomeđeni linearni operatori i njihova proširenja na Hilbertovim prostorima

**Područje:** Teorija operatora, parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Parcijalne diferencijalne jednačbe 1, Normirani prostori

**Naslov na engleskom:** Unbounded linear operators and their extensions in Hilbert spaces

**Opis teme:** Linearne parcijalne diferencijalne jednačbe možemo zapisati u apstraktnom obliku  $Au = f$ , gdje je  $f$  dana funkcija,  $A$  je (diferencijalni) linearni operator, dok je  $u$  traženo rješenje. Dodatno, često za  $f$  i  $u$  tražimo da su sadržani u prikladnom Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$  (npr. Lebesgueov prostor  $L^2$ ). Međutim, čim se u operatoru  $A$  pojavljuju derivacije, on ne može biti omeđen s  $\mathcal{H}$  u  $\mathcal{H}$ . Stoga je prikladno  $A$  promatrati kao neomeđen operator na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$ , odnosno linearno preslikavanje s (gustog) vektorskog potprostora od  $\mathcal{H}$  u  $\mathcal{H}$ . Tada se izbor rubnih (i početnih) uvjeta za danu parcijalnu diferencijalnu jednačbu svodi na izbor domene operatora  $A$ . Stoga je od ključne važnosti razviti postupak kojim se rubni uvjeti povezuju s pripadnom domenom, te taj postupak strukturirati ovisno o svojstvima operatora, odnosno zadaće. U ovom radu je cilj obraditi teoriju neomeđenih linearnih operatora s posebnim naglaskom na teoriju klasifikacije proširenja za simetrične (npr. Friedrichsovo proširenje, von Neumannovo proširenje, rubne trojke) i nesimetrične operatore. Teorija će se ilustrirati na parcijalnim diferencijalnim jednačbama od interesa (Poissonova jednačba, Schrödingerova jednačba, Friedrichsovi sustavi).

### Literatura:

J. Behrndt, S. Hassi, H. de Snoo, Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators, Monographs in Mathematics 108, Birkhäuser, 2020.

G. Grubb, Distributions and operators, Graduate Texts in Mathematics 252, Springer, 2009.

J. L. Lions, E. Magenes, Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1972.

K. Schmüdgen, Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, Graduate Texts in Mathematics 265, Springer 2012.

**Mentor:** Erceg Marko

## Konveksna optimizacija u praćenju indeksa s ograničenim brojem imovine

**Područje:** Optimizacija

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Uvod u optimizaciju

**Naslov na engleskom:** Convex optimization in index tracking with a limited number of assets

**Opis teme:** Ovaj diplomski rad obrađuje problem efikasnog praćenja financijskog indeksa (eng. index tracking), pri čemu je primarni cilj kreiranje prorijeđenog portfelja koji se sastoji od malog broja imovine kako bi se smanjili transakcijski troškovi i operativna složenost. U klasičnoj formulaciji, ovaj problem s ograničenjem na broj dionica (tzv.  $L_0$  norma) spada u NP-tešku klasu mješovitog cjelobrojnog programiranja, što ga čini neprimjenjivim za velike dimenzije. Rješenje je u konveksnoj relaksaciji: problem se preoblikuje primjenom  $L_1$ -regularizacije (tkz. LASSO metodologija), koja dodaje kazneni član na zbroj apsolutnih vrijednosti težina imovine, čime se efikasno potiče njihova rijetkost (eng. sparsity). Rad analizira matematički zapis problema iz nekonveksnog u konveksan te razvija i implementira efikasne algoritme za njegovo brzo rješavanje.

### Literatura:

K. Benidis, Y. Feng and D. P. Palomar, Optimization Methods for Financial Index Tracking: From Theory to Practice, Foundations and Trends in Optimization: Vol. 3: No. 3, pp 171-279., 2018.

D. P. Palomar, Portfolio Optimization. Theory and Application, Cambridge University Press, 2025.

**Mentor:** Franušić Zrinka

## Fareyjevi nizovi

**Područje:** Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** -

**Naslov na engleskom:** Farey sequences

**Opis teme:** Fareyevi nizovi predstavljaju važan koncept u teoriji brojeva te u racionalnim aproksimacijama realnih brojeva. Fareyev niz reda  $n$  definira se kao niz potpuno skraćenih razlomaka između 0 i 1 čiji su nazivnici manji ili jednaki  $n$ , poredanih u rastućem poretku. Na primjer,

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}.$$

U radu bi se izložila glavna svojstva Fareyevih nizova te prikazala njihova uloga u diofantskim aproksimacijama realnih brojeva (npr. kroz Hurwitzov teorem). Nadalje, rad bi obradio i nekoliko problema koji uključuju Fareyev nizove, a koji prirodno dovode do zanimljivih vizualnih prikaza poput Fareyevog trokuta, Fordovih krugova i Stern–Brocotovog stabla.

### Literatura:

- J. H. Conway, R. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus, Springer-Verlag, 1996.  
 A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, 2019.  
 G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th Edition, Oxford University Press, 2008

**Mentor:** Franušić Zrinka

## Sustavi linearnih jednadžbi u nastavi matematike

**Područje:** Linearna algebra, metodika

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** -

**Naslov na engleskom:** Systems of linear equations in mathematics education

**Opis teme:** U radu će se obraditi teorijski i metodički aspekti sustava linearnih jednadžbi. U teorijskom dijelu definirat će se pojam sustava linearnih jednadžbi te će se analizirati uvjeti rješivosti sustava. Posebna će se pažnja posvetiti metodama rješavanja, s naglaskom na Gaussovu metodu i Cramerovo pravilo, kao i na ulogu računala i numeričkih metoda u njihovoj primjeni. U metodičkom dijelu istražiti će se način na koji su sustavi linearnih jednadžbi zastupljeni u nastavnim planovima i programima te u udžbenicima matematike za osnovnu i srednju školu. Također će se razmotriti mogućnosti poučavanja navedenog sadržaja u nastavi matematike, uključujući upotrebu digitalnih alata (npr. GeoGebra, Maxima, WolframAlpha). Ako okolnosti dopuste, u radu će se provesti istraživanje među učenicima, s ciljem ispitivanja razumijevanja koncepta rješavanja sustava linearnih jednadžbi te utvrđivanja kako učenici doživljavaju prijelaz s klasičnog algebarskog pristupa na matrični pristup rješavanja.

### Literatura:

- sveučilišni udžbenici iz linearne algebre
- školski udžbenici iz matematike

**Mentor:** Franušić Zrinka

## Faktorizacija Choleskog i primjene

**Područje:** Linearna algebra, numerička matematika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** -

**Naslov na engleskom:** Cholesky factorization and applications

**Opis teme:** Faktorizacija Choleskog (ili Choleskyjeva dekompozicija) je rastav pozitivno definitne matrice na umnožak donjotrokutaste matrice i njezine transponirane matrice. Primjena ove dekompozicije vrlo je široka jer optimizira neke numeričke izračune. Koristi se za rješavanje sustava linearnih jednačbi, računanje determinanti i inverza, ortonormiranje baza, aproksimaciju niskog ranga, u simulacijama i financijskim modelima (npr. generiranje koreliranih slučajnih varijabli za portfelje rizika) itd. U radu bi se proučila osnovna svojstva pozitivno definitnih matrica, pokazala egzistencija i jedinstvenost ove dekompozicije te opisale neke njezine primjene.

### Literatura:

Z. Drmač i dr., *Numerička analiza*, skripta Matematičkog odjela PMF-a, 2003.

J. Lu, *Matrix Decomposition and Applications*, arXiv:2201.00145

G. Strang, *Linear Algebra and Its Application*, 4th edition, Thomson, Brooks/Cole, 2006.

L. N. Trefethen, D. Bau III, *Numerical Linear Algebra*, Siam, 1997.

**Mentor:** Franušić Zrinka

## Konike i kvadrike

**Područje:** Geometrija, linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** -

**Naslov na engleskom:** Conics and quadrics

**Opis teme:** Konike (kružnica, elipsa, parabola, hiperbola) su algebarske krivulje drugog reda, a kvadrike su algebarske plohe drugog reda (elipsoidi, hiperboloidi, paraboloidi, stošci, valjci). Ideja rada je produbiti i objediniti znanja o ovim objektima stečena na različitim kolegijima sa studija.

**Literatura:**

R. Fenn, *Geometry*, Springer, 2003.

D. C. Lay, S. R. Lay, J. J. McDonald, *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson, 2020.

**Mentor:** Gogić Ilja

**Suvoditelj:** Tomašević Mateo

## Tenzorski produkti Banachovih prostora i aproksimacijsko svojstvo

**Područje:** Funkcionalna analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Operatori na normiranim prostorima

**Naslov na engleskom:** Tensor products of Banach spaces and the approximation property

**Opis teme:** Za Banachov prostor  $X$  kažemo da posjeduje *aproksimacijsko svojstvo* ako se jedinični operator  $I_X$  može uniformno aproksimirati operatorima konačnog ranga na svakom relativno kompaktnom podskupu od  $X$ . Dobro je poznato da svi Hilbertovi prostori posjeduju ovo svojstvo, što otvara pitanje o njegovoj prisutnosti u općenitijim Banachovim prostorima, kao i o njegovom utjecaju na strukturu njihovih tenzorskih produkata.

U ovom radu sustavno se proučavaju tenzorski produkti Banachovih prostora, s posebnim naglaskom na projektivne i injektivne tenzorske norme, nakon čega se analizira aproksimacijsko svojstvo. Ispituje se kako prisutnost ili odsutnost aproksimacijskog svojstva utječe na kanonska preslikavanja između tenzorskih produkata i prostora linearnih operatora, naglašavajući njegovu ključnu ulogu u analizi i geometriji Banachovih prostora.

### Literatura:

- R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, 2002.
- A. Defant, K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.
- J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I & II*, Springer, 1996.
- R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer, 1998.
- A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1953), 1–79.

**Mentor:** Gogić Ilja

## Komutatori

**Područje:** Funkcionalna analiza, Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** Operatori na normiranim prostorima

**Naslov na engleskom:** Commutators

**Opis teme:** *Komutatori* su elementi oblika  $[A, B] := AB - BA$  i mjere nekomutativnost u prstenovima i algebrama. Jedan od najranijih rezultata je Shodin teorem iz 1936. koji kaže da je matrica nad poljem karakteristike nula komutator ako i samo ako je traga nula. Osim u matematici, komutatori igraju važnu ulogu u kvantnoj mehanici, gdje je za operatore položaja  $Q$  i momenta  $P$  relacija  $[Q, P] = i\hbar I \neq 0$  osnova Heisenbergovog principa neodređenosti.

Cilj ovog diplomskog rada je razraditi teoriju komutatora u algebarskom i analitičkom okviru, počevši od klasičnih rezultata Halmosa i Brown-Pearcyja za  $B(H)$ , do Popove karakterizacije unitalnih  $C^*$ -algebri bez tragova preko svojstva da je svaki element prikaziv kao (uniformno) konačna suma komutatora, sve do najrecentnijih istraživanja kao npr. radovi Marcoux (J. Operator Theory, 2007), Roberta (J. Operator Theory, 2016), Brešara (Adv. Math., 2020), te Gardelle i Thiela (J. Algebra, 2025).

### Literatura:

- P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer, 1982.  
 A. Brown, C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. of Math., **82** (1965), 112–127.  
 C. Pop, *On traces and commutators in  $C^*$ -algebras*, J. Operator Theory, **37**(1) (1997), 111–129.  
 M. Brešar, *Commutators and images of noncommutative polynomials*, Adv. Math., **372** (2020), 107295.  
 L. W. Marcoux, *Sums of a small number of commutators*, J. Operator Theory, **57**(1) (2007), 55–78.  
 L. Robert, *On the Lie ideals of  $C^*$ -algebras*, J. Operator Theory, **75**(2) (2016), 387–408.  
 E. Gardella, H. Thiel, *Rings and  $C^*$ -algebras generated by commutators*, J. Algebra, **662** (2025), 1–45.

**Mentor:** Gogić Ilja

## Potpuno pozitivni operatori i njihove primjene u kvantnoj teoriji informacija

**Područje:** Funkcionalna analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Operatori na normiranim prostorima

**Naslov na engleskom:** Completely positive maps and their applications in quantum information theory

**Opis teme:** Potpuno pozitivni operatori predstavljaju jednu od temeljnih klasa preslikavanja u operatorskim algebrama i kvantnoj teoriji informacija, budući da njihove amplifikacije na matrice i dalje čuvaju pozitivnost.

U ovom radu detaljno se analiziraju potpuno pozitivni operatori između  $C^*$ -algebri i prostora matrica, s posebnim naglaskom na Stinespringov teorem dilatacije, operatorske sustave i Arvesonov teorem proširenja. Nadalje, proučavaju se primjene potpuno pozitivnih operatora u modeliranju kvantnih kanala otvorenih kvantnih sustava unutar okvira kvantne teorije informacija, s posebnim fokusom na Choi–Krausovu reprezentaciju, koja se pokazuje kao snažan alat za analizu i razumijevanje dinamike takvih sustava.

### Literatura:

V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, 2002.

V. P. Gupta, P. Mandayam, V. S. Sunder, *The Functional Analysis of Quantum Information Theory*, Springer, 2020.

D. W. Kribs, *A Quantum Computing Primer for Operator Theorists*, Linear Algebra Appl., **400** (2005), 147–167.

M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

W. F. Stinespring, *Positive Functions on  $C^*$ -Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 211–216.

M.-D. Choi, *Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices*, Linear Algebra Appl., **10** (1975), 285–290.

**Mentor:** Goldstein Pavle

## Geometrijske tehnike za analizu grafova

**Područje:** statistika

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Bioinformatika, Statistika

**Naslov na engleskom:** Geometric Techniques for Graph Analysis

**Opis teme:** U radu će se geometrijskim i statističkim tehnikama proučavati struktura grafova

**Literatura:**

Clustering of protein domains for functional and evolutionary studies, Cullum et al;  
Euclidean embeddings of finite metric spaces, Maehara, Discrete Mathematics 313  
(2013)

**Mentor:** Goldstein Pavle

## Analiza eukariotskih proteinskih familija

**Područje:** statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Bioinformatika, Statistika

**Naslov na engleskom:** Analysis of Eukaryotic Protein Families

**Opis teme:** U radu će se promatrati poravnati proteinski fragmenti iz nekih proteinskih familija. Metodama strojnog učenja provede će se njihova klasifikacija

**Literatura:**

Gerard Salton, Christopher Buckley, Term-weighting approaches in automatic text retrieval, In Information Processing and Management, Volume 24, Issue 5, 1988; Durbin et al, Biological Sequence Analysis; IGLOSS, Rabar et al, Bioinformatics, 2018

**Mentor:** Grubišić Luka

## Modeli evaluacije kvalitete LLM-generiranih transformacija teksta

**Područje:** računarstvo i numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Umjetna inteligencija

**Naslov na engleskom:** Models for Evaluating the Quality of LLM-Generated Text Transformations

**Opis teme:** Veliki jezični modeli (LLM-ovi) se mogu promatrati kao univerzalni alat za transformaciju teksta. Nas posebno zanima problem automatskog sažimanja te metoda iterativnog (refleksivnog) poboljšavanja izlaza. Zadatak je razviti model evaluacije kvalitete transformacija teksta koje generira LMM. Kao studije slučaja će se promotriti (1) sažimanje znanstvenih radova i (2) analiza trajektorije niza refleksivnih upita.

Potrebno je napraviti implementaciju prototipa koji koristi LLM preko programerskog sučelja (API-ja), te provesti empirijsku evaluaciju nad stvarnim tekstualnim podacima. Mjere kvalitete treba konstruirati nad vektorskim reprezentacijama kao kombinaciju mjera jezične složenost, statističke analize te sinteze korisničkih evaluacija.

### Literatura:

Zhang, T., Kishore, V., Wu, F., Weinberger, K. Q., Artzi, Y. (2020). BERTScore: Evaluating Text Generation with BERT. International Conference on Learning Representations (ICLR). <https://arxiv.org/abs/1904.09675>

Celikyilmaz, A., Clark, E., Gao, J. (2020). Evaluation of Text Generation: A Survey. <https://www.researchgate.net/publication/342520480>

Matthew Renze, Erhan Guven (2024) Self-Reflection in Large Language Model Agents: Effects on Problem-Solving Performance. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10852426> 2nd International Conference on Foundation and Large Language Models (FLLM)

Fengyuan Liu, Nouar AlDahoul, Gregory Eady, Yasir Zaki, Talal Rahwan. (2025) Self-Reflection Makes Large Language Models Safer, Less Biased, and Ideologically Neutral <https://arxiv.org/html/2406.10400v2>

**Mentor:** Grubišić Luka

## Analiza Extreme Learning Machine metode

**Područje:** računarstvo i numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Umjetna inteligencija

**Naslov na engleskom:** Analysis of the Extreme Learning Machine method

**Opis teme:** Extreme Learning Machine (ELM) predstavlja brzu i efikasnu metodu treniranja neuronskih mreža s jednim skrivenim slojem. Koristeći rezultate o redukciji dimenzije modela slučajnim ulaganjem, u metodi Extreme Learning Machine skriveni sloj neuronske mreže biramo slučajno a preostale parametre određujemo direktnim rješavanjem strukturiranog linearnog sustava normalnih jednadžbi. Iako ELM pokazuje iznimno dobre rezultate u pogledu brzine treniranja, njegova pouzdanost i točnost mogu biti umanjene u slučajevima kada je ulazni prostor visoke dimenzionalnosti ili kada se koristi veliki broj neurona u skrivenom sloju.

U ovom radu potrebno je dati teorijski prikaz rezultata iz područja randomiziranih algoritama linearne algebre te teorije aproksimacije ovako definiranih funkcija (jednoslojnih neuronskih mreža).

### Literatura:

- Huang, G.-B., Zhu, Q.-Y., Siew, C.-K. (2006). *Extreme learning machine: Theory and applications*. Neurocomputing. <https://extreme-learning-machines.org/pdf/ELM-NC-2006.pdf>
- Dimitris Achlioptas. Database-friendly Random Projections. <https://scispace.com/pdf/database-friendly-random-projections-2shb8iodoz.pdf>
- Gianluca Fabiani. Random Projection Neural Networks of Best Approximation: Convergence Theory and Practical Applications. SIAM Journal on Mathematics of Data Science Vol. 7, Iss. 2 (2025) 10.1137/24M1639890 <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/24M1639890>

**Mentor:** Grubišić Luka

## Varijacijski autoenkoderi i primjene

**Područje:** računarstvo i numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Umjetna inteligencija

**Naslov na engleskom:** Variational Autoencoders and Applications

**Opis teme:** U ovom radu treba proučiti metodu varijacijskih autoenkodera (VAE) kao metodu otkrivanje skrivene dimenzije latentnih prostora. Također treba proučiti tehnike korištenje VAEa za Bayesovu inverziju.

### Literatura:

Diederik P. Kingma, Max Welling (2019) An Introduction to Variational Autoencoders <https://arxiv.org/pdf/1906.02691>

Francesco Paolo Casale et al. Gaussian Process Prior Variational Autoencoders <https://arxiv.org/pdf/1810.11738>

Jiaxun Guo et al. Deep clustering analysis via variational autoencoder with Gamma mixture latent embeddings <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608024009080>

Diederik P Kingma, Max Welling Auto-Encoding Variational Bayes <https://arxiv.org/abs/1312.6114>

**Mentor:** Horvat Marko

## Poboljšanje vjernosti alata i modela za formalnu verifikaciju u informacijskoj sigurnosti

**Područje:** Informacijska sigurnost

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Improving the Fidelity of Tools and Models for Formal Verification in Information Security

**Opis teme:** In order to verify the desired properties of complex systems, we typically formally model the system and properties, and use partially automated tools such as theorem provers to either verify the properties or find counterexamples. However, the desired properties are sometimes undecidable, so we resort to approximations: we weaken the properties, make the models more abstract, the tools less precise, and so on. The aim of this paper is to provide some new suggestions for improving the fidelity of tools and models for formal verification in Information Security, where an adversary is modelled as part of the system, counterexamples to properties are considered attacks, and specialized theorem provers such as Tamarin are used to guide analysis efforts.

### Literatura:

Simon Meier, Benedikt Schmidt, Cas Cremers, David Basin, *The TAMARIN prover for the symbolic analysis of security protocols*, International Conference on Computer Aided Verification (CAV), 2013.

Felix Emanuel Linker, Christoph Sprenger, Cas Cremers, David Basin, *Looping for Good: Cyclic Proofs for Security Protocols*, 32nd ACM Conference on Computer and Communications Security (CCS), 2025.

**Mentor:** Horvat Marko

## Chaitinov teorem nepotpunosti

**Područje:** Logika i računarstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Chaitin's Incompleteness Theorem

**Opis teme:** Chaitinov teorem nepotpunosti predstavlja značajan doprinos razumijevanju fundamentalnih ograničenja formalnih aksiomatskih sustava. Taj teorem pokazuje da za svako aksiomatizabilno i konzistentno proširenje  $T$  Robinsonove aritmetike postoji prirodna konstanta  $c(T)$  takva da za svaki konačan binarni niz  $s$  vrijedi da  $T$  ne dokazuje  $K(s) > c(T)$ , gdje je  $K(s)$  Kolmogorovljeva složenost od  $s$ . U ovom diplomskom radu obradit će se osnovni pojmovi i rezultati iz algoritamske teorije informacija, dokazat će se Chaitinov teorem nepotpunosti te diskutirati njegova ograničenja i posljedice.

### Literatura:

Gregory J. Chaitin, *Information-theoretic limitations of formal systems*, Journal of the ACM, 21(3):403–434, 1974.

Ming Li, Paul Vitányi, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer, 1997.

John Baez, *Chaitin's Theorem and the Surprise Examination Paradox*, <https://johnbcae.wordpress.com/2011/10/06/>

**Mentor:** Horvat Marko

## Strategije redukcije u sustavima prepisivanja terma

**Područje:** Prepisivanje terma

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Reduction Strategies in Term Rewriting Systems

**Opis teme:** Teorija sustava prepisivanja terma bavi se formalnim modeliranjem transformacija izraza pomoću pravila prepisivanja. U okviru te teorije posebno su važne strategije redukcije, koje određuju redoslijed primjene pravila pri izvođenju normalne forme danog terma. U ovom diplomskom radu bit će prikazane osnovne ideje teorije prepisivanja i glavne strategije redukcije te razmotrena njihova svojstva, s posebnim naglaskom na rezultate o normalizaciji u ortogonalnim sustavima.

### Literatura:

F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.  
G. Huet, J.-J. Lévy, *Computations in Orthogonal Rewriting Systems 1 and 2*. In Computational logic: Essays in Honor of Alan Robinson, Ed. J.-L. Lassez & G.D. Plotkin, 1991.

**Mentor:** Horvat Sebastijan

**Suvoditelj:** Horvat Marko

## Modeliranje problema dinamičke epistemičke logike u jeziku Prolog

**Područje:** Matematička logika i računarstvo

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** položen kolegij Matematička logika

**Naslov na engleskom:** Modeling dynamic epistemic logic problems in the Prolog language

**Opis teme:** Dinamička epistemička logika opisuje kako agenti mijenjaju svoja znanja i vjerovanja kroz komunikaciju i promatranje, što predstavlja važan teorijski okvir za razumijevanje koordinacije i odlučivanja u višeagentnim sustavima. Prvi zadatak rada je predstaviti dinamičku epistemičku logiku, njena svojstva i primjene, posebno istaknuvši pojmove individualnog, općeg i zajedničkog znanja te ih ilustrirati kroz primjere. Glavni cilj diplomskog rada je modelirati poznate probleme iz područja dinamičke epistemičke logike u logičkom programskom jeziku Prolog. Poseban fokus bit će stavljen na implementaciju nekog klasičnog problema poput *The muddy children* koji demonstrira fundamentalne principe iterativnog stjecanja zajedničkog znanja kroz komunikaciju. Prolog je odabran kao implementacijski jezik zbog svoje deklarativne prirode koja prirodno izražava logičke formule, backtracking mehanizma za pretraživanje prostora mogućih znanja, te unifikacije koja elegantno rukuje podudaranjem uzoraka (engl. *pattern matching*).

### Literatura:

Jorge Medina, A Model Checker for Unbounded Dynamic Epistemic Logic Models, diplomski rad, University of Groningen, 2013  
 van Ditmarsch, H., van der Hoek, W., Kooi, B., Playing Cards with Hintikka: An Introduction to Dynamic Epistemic Logic, In: van Ditmarsch, H., Sandu, G. (eds) Jaakko Hintikka on Knowledge and Game-Theoretical Semantics. Outstanding Contributions to Logic, vol 12. Springer, 2018

**Mentor:** Huzak Miljenko

## Uzročno statističko zaključivanje

**Područje:** Matematička statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Predznanje iz predmeta "Matematička statistika" i "Primijenjena statistika".

**Naslov na engleskom:** Causal statistical inference

**Opis teme:** Uvodno će se opisati područje uzročnog zaključivanja ili kauzalne inferencije u statistici. Opisat će se procjena kauzalnog učinka g-metodom, ponderiranje inverznom vjerojatnosti i ostali procjenitelji, a posebno marginalni strukturalni modeli i njihova interpretacija.

**Literatura:**

M. A. Hernán, and J. M. Robins, *Causal Inference: What If*, Chapman & Hall/CRC, 2020.

**Mentor:** Huzak Miljenko

## Modeli stohastičke volatilnosti

**Područje:** Matematička statistika i Financijska matematika

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Predznanje iz predmeta "Matematička statistika", "Ekonometrija" i "Financijsko modeliranje".

**Naslov na engleskom:** Stochastic volatility models

**Opis teme:** Uvodno će se opisati osnovne empirijske činjenice o financijskoj volatilnosti, a zatim će se definirati i opisati ARCH i GARCH modeli koji se koriste u modeliraju volatilnost financijskih vremenskih nizova. Razradit će se neke od metoda prilagodbe tih modela podacima i ilustrirati na primjerima.

**Literatura:**

J. Franke, W. Härdle, and C. M. Hafner, *Statistics of Financial Markets*, Springer, 2004.

**Mentor:** Huzak Miljenko

## Slučajne kovarijacijske matrice

**Područje:** Matematička statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Predznanje iz predmeta "Matematička statistika" i "Primijenjena statistika".

**Naslov na engleskom:** Random covariance matrices

**Opis teme:** Cilj je istražiti granično ponašanje procjenitelja za populacijsku kovarijacijsku matricu kada su duljina uzorka i dimenzija velike. Posebno će se razmatrati tzv. šiljasti modeli (engl. spiked models). Dobiveni rezultati će se primijeniti u statistici, na primjer, na analizu glavnih komponenti.

**Literatura:**

R. Couillet and Z. Liao, *Random Matrix Methods for Machine Learning*, CUP pre-publication ver., 2023.

M. J. Wainwright, *High-Dimensional Statistics*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, CUP, 2019.

J. Yao, S. Zheng, and Z. Bai, *Large Sample Covariance Matrices and High-Dimensional Data Analysis*, CUP, 2015.

**Mentor:** Igaly Goran

## Mogućnost primjene robotske ruke u nastavi

**Područje:** matematika, informatika

**Prikladno za studij:** Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The Potential Use of a Robotic Arm in Teaching

**Opis teme:** Brzi razvoj tehnologije i robotike donosi značajne promjene u svim područjima ljudske djelatnosti, pa tako i u obrazovanju. U suvremenoj se nastavi to posebno odnosi na nastavne predmete Matematika i Informatika, gdje primjena modernih tehnologija i robota može poslužiti kao most između apstraktnih koncepata i njihove praktične primjene. Cilj ovog diplomskog rada je istražiti i prikazati mogućnosti primjene robotske ruke u nastavi matematike i informatike te opisati aktivnosti kojima se potiče povezivanje teorijskih znanja s praktičnim iskustvom. U uvodnom dijelu rada bit će prikazan povijesni razvoj robotike s naglaskom na razvoj robotske ruke u svijetu i Hrvatskoj. Središnji dio diplomskog rada bit će posvećen primjeni robotske ruke u nastavi informatike i matematike.

### Literatura:

Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Republika Hrvatska, Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije, 2019.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Republika Hrvatska, Kurikulum nastavnoga predmeta Informatika za osnovne škole i gimnazije, 2018.

Lapov Padovan, Z., Kovačević, S., Purković, D. Razvoj kurikuluma osnovnoškolske nastave robotike. Politehnika: Časopis za tehnički odgoj i obrazovanje, 2(1), 7-34, 2018., preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/file/305689>

Herath, D., St-Onge, D. (Eds.), Foundations of Robotics: A Multidisciplinary Approach with Python and ROS. Springer Singapore, 2022., <https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-19-1983-1>

**Mentor:** Igaly Goran

**Suvoditelj:** Horvat Sebastijan

## Umjetna inteligencija u videoigri simulacije pojednostavljenog nogometa

**Područje:** Umjetna inteligencija

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Umjetna inteligencija

**Naslov na engleskom:** Artificial intelligence in a simplified football simulation video game

**Opis teme:** Ovaj diplomski rad bavi se dizajnom i implementacijom simulacije pojednostavljene nogometne utakmice. Cilj rada je istražiti i prikazati mogućnosti modeliranja umjetne inteligencije agenata, odnosno sudionika igre koji ne djeluju pod izravnom kontrolom igrača. U prvom dijelu opisane su osnovne značajke i pravila takve nogometne igre, te strukture i uloge sudionika, uz kratak pregled mehanike pokretnih objekata. Implementacija simulacije provedena je u programskom jeziku C++ pomoću SFML (Simple and Fast Multimedia Library) biblioteke. Strukture igre, agenti i njihovi međusobni odnosi oblikovani su i realizirani kroz paradigmu objektno orijentiranog programiranja tog jezika. Model razvijen u ovom radu može poslužiti kao temelj za razradu složenijih taktičkih sustava ili prilagodbu simulacijama drugih sportova.

### Literatura:

Mat Buckland, Programming Game AI by Example, Jones & Bartlett Learning, 2005  
Jacob Enfield, Mathematics of Game Development: A Collection of Applied Lessons, CRC Press, 2024

**Mentor:** Igaly Goran

## Generiranje i vizualizacija fraktalnih glazbenih sekvenci pomoću L-sustava

**Područje:** Računarstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Multimedijски sustavi

**Naslov na engleskom:** Generation and visualization of fractal music sequences by using L-systems

**Opis teme:** U ovom radu istražit će se primjena Lindenmayerovih sustava kao formalnih gramatika za simultano generiranje glazbenih kompozicija i fraktalnih vizualnih struktura kroz dvostruku interpretaciju simbola. Istražit će se kako različita pravila L-sustava utječu na karakteristike nastalih glazbeno-vizualnih kompozicija te će se analizirati matematički odnosi između generiranih glazbenih i fraktalnih struktura. Cilj je pokazati povezanost između glazbenih i vizualnih elemenata generiranih istim L-sustavom te istražiti kako se matematička svojstva manifestiraju u obje domene. Praktični dio rada će prikazati navedene koncepte kroz analizu konkretnih primjera L-sustava i njihovih glazbeno-vizualnih interpretacija.

### Literatura:

Przemyslaw Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants, Springer New York, 1990

Kenneth Falconer: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications 3rd edition, Wiley, 2024

Stelios Manousakis; Musical L-Systems, 2006, <https://modularbrains.net/wp-content/uploads/Stelios-Manousakis-Musical-L-systems.pdf>, pristupljeno u listopadu 2025.

**Mentor:** Igaly Goran

## Baze podataka u nastavi informatike

**Područje:** metodika nastave informatike, baze podataka

**Prikladno za studij:** Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Databases in teaching informatics

**Opis teme:** Cilj ovog rada je proučavanje pristupa poučavanju baza podataka u nastavi informatike i prijedlog za realizaciju odgovarajućih ishoda učenja. Na početku rada dat će se kratki uvod u osnovne pojmove baza podataka – modeliranje podataka, relacijski model i jezik SQL. U nastavku rada analizirat će se kurikulum informatike i zastupljenost sadržaja vezanih uz baze podataka u nastavnim planovima i udžbenicima. U središnjem dijelu rada će na konkretnom primjeru baze podataka biti prikazan razvoj cjelovite aplikacije u kojoj će ovi sadržaji biti didaktički uvedeni i obrađeni.

### Literatura:

kurikul informatike ([https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2018\\_03\\_22\\_436.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2018_03_22_436.html))

Robert Manger, Baze podataka, Element, 2014.

Budin, L., Brođanac, P., Markučić, Z., Perić, S., & Wendling, E. (n.d.). Informatika 4: Udžbenik za 4. razred gimnazija (2 ili 3 sata nastave tjedno). Element.

Watt A., Eng N. Database Design – 2nd Edition, The BCcampus Open Textbook Project

**Mentor:** Iljazović Zvonko

## Dekompozabilnost kontinuuma

**Područje:** Topologija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Decomposability of continua

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu će se proučavati metrički prostori poznati pod nazivom kontinuumi. Dat će se i širi topološki kontekst. Cilj je proučiti neka važna svojstva kontinuuma s posebnim naglaskom na njihovu dekompozabilnost i indekompozabilnost.

**Literatura:**

C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

S. B. Nadler, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

**Mentor:** Iljazović Zvonko

## Adjunkcijski prostori

**Područje:** Topologija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Adjunction spaces

**Opis teme:** Tema ovog diplomskog rada su adjunkcijski prostori te, općenitije, kvocijentni prostori. Cilj diplomskog rada je ispitati razna svojstva nevedenih prostora te ujedno dati i opći topološki kontekst.

**Literatura:**

C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

S. B. Nadler, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

**Mentor:** Jazbec Anamarija

## Analiza trajanja aktivnosti korisnika online kladionice metodama analize doživljenja

**Područje:** Statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Analysis of betting online user activity duration using survival analysis methods

**Opis teme:** Koristeći bazu Hrvatske Lutrije u razdoblju od 1.4.2025. do 30.9.2025. analizirat će se vrijeme od prve do zadnje uplate online igrača te koji i koliko od dostupnih prediktora utječu na događaj prestanka klađenja. Od metoda analize doživljenja (engl. survival analysis) koristile bi se Kaplan-Meierova procjena doživljenja i Log rank test, a za procjenu koji i koliko od dostupnih prediktora utječu na prestanak klađenja koristila bi se Coxova regresija.

### Literatura:

J.P. KLEIN, M.L. MOESCHBERGER, Survival Analysis, Springer 2nd ed., 2003

<https://stats.oarc.ucla.edu/sas/seminars/sas-survival/>

<https://support.sas.com/documentation/onlinedoc/stat/131/lifetest.pdf/>

<https://support.sas.com/documentation/onlinedoc/stat/132/phreg.pdf>

**Mentor:** Jurak Mladen

## Konvolucijske neuralne mreže

**Područje:** Računarstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Convolutional neural networks

**Opis teme:** Potrebno je razraditi primjenu konvolucijskih neuralnih mreža za klasifikaciju slika. U radnji treba razraditi pripremni dio o neuralnim mrežama i posebno konvolucijskim neuralnim mrežama (referenca [1]). Zatim treba obraditi korištenje biblioteka Tensorflow i Keras (reference [2] i [3]). Konačno, treba demonstrirati upotrebu neuralnih mreža na klasifikaciju slika. Osnovni primjeri su u [2], poglavlje 3. Jezik programiranja bi bio Python, a moguće je i C++. U završnom dijelu treba naći primjer podataka na web-u na kojem se može dodatno demonstrirati upotreba konvolucijskih neuralnih mreža.

### Literatura:

1. Charu C. Aggarwal: Neural Networks and Deep Learning. A Textbook, Springer, 2018. Last edition 2023.
2. Amita Kapoor, Antonio Gulli, Sujit Pal: Tensorflow i Keras: Deep Learning with TensorFlow and Keras, Third Edition, Packt, 2022.
3. Paolo Galeone: Hands-On Neural Networks with TensorFlow 2.0, Packt, 2019.

**Mentor:** Kamčev Nina

## Algoritmi za stohastičke igre

**Područje:** Teorija igara

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Strateške igre, osnove vjerojatnosti

**Naslov na engleskom:** Algorithms for stochastic games

**Opis teme:** Stohastičke igre uvedene su u klasičnom radu L. S. Shapleyja (1953) kao dinamička generalizacija matričnih igara i Markovljevih procesa odlučivanja. U njima se interakcija odvija u uzastopnim stanjima sustava, pri čemu trenutni izbor poteza određuje i neposredni ishod i vjerojatnosti prijelaza u sljedeće stanje. Time stohastičke igre spajaju elemente teorije igara, vjerojatnosti i optimizacije.

Rad će sadržavati osnovne pojmove i ključne teorijske rezultate u ovom području. Zatim će naglasak biti na algoritamskim metodama za rješavanje stohastičkih igara s konačnim brojem stanja i poteza. Razmatrat će se klasični algoritmi za igre sa sumom nula, uključujući Shapleyjev iteracijski postupak i Hoffman-Karpova metoda te Newtonovski pristupi, kao i strukturirane klase igara (npr. single-controller) gdje su dostupni učinkovitiji algoritmi.

### Literatura:

L. S. Shapley, *Stochastic Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences **39** (1953), 1095–1100.

T. E. S. Raghavan, J. A. Filar, *Algorithms for Stochastic Games – A Survey*, ZOR–Methods and Models of Operations Research **35** (1991), 437–472.

J.-F. Mertens, A. Neyman, *Stochastic Games*, International Journal of Game Theory **10** (1981), 53–66.

E. Solan, *A Course in Stochastic Game Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2022.

**Mentor:** Kamčev Nina

## Evaluacija šahovskih pozicija: matematičko modeliranje i konstrukcija programa

**Područje:** Teorija igara

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Ekstenzivne igre, programiranje

**Naslov na engleskom:** Evaluating chess positions: mathematical modelling and algorithms

**Opis teme:** Evaluacija šahovskih pozicija predstavlja ključan dio računalnih programa za igru šah. U ovom radu naglasak je na izradi vlastitog programa za evaluaciju šahovskih pozicija te postupnom poboljšavanju njegovih performansi kroz matematički utemeljene modifikacije.

U radu će se razviti algoritam koji koristi minimax algoritam za odlučivanje, s mogućnošću optimizacije pomoću alfa-beta rezanja grana stabla. Posebna pažnja posvećuje se konstrukciji i interpretaciji evaluacijskih funkcija koje kvantificiraju pozicijske prednosti - primjerice, jačinu središnje pozicije skakača moguće je ilustrirati pomoću stacionarne distribucije slučajne šetnje skakača na ploči. Cilj rada je prikazati kako matematičke ideje mogu unaprijediti razumijevanje i učinkovitost računalnih pristupa šahu.

### Literatura:

C. E. Shannon, *Programming a Computer for Playing Chess*, Philosophical Magazine, Vol. 41, No. 7 (1950), 256–275.

D. E. Knuth and R. W. Moore, *An Analysis of Alpha-Beta Pruning*, Artificial Intelligence, Vol. 6, No. 4 (1975), 293–326.

T. A. Marsland, *Computer Chess and Search*, in: S. Shapiro (ed.), *Encyclopaedia of Artificial Intelligence*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1992, pp. 224–241.

R. Sahay, *Comparative Analysis of Minmax Algorithm with Alpha-Beta Pruning Optimization for Chess Engine*, International Journal of Advances in Engineering and Management (IJAEM), Vol. 5, Issue 2 (Feb. 2023), 689–694.

**Mentor:** Kovač Vjekoslav

## Klasični model grabežljivca i plijena

**Područje:** Matematičko modeliranje, Diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Classical predator-prey model

**Opis teme:** Lotka–Volterrine jednačbe, poznatije kao model grabežljivca i plijena, opisuju dinamičku interakciju između populacije grabežljivaca i populacije plijena. To je par nelinearnih diferencijalnih jednačbi prvog reda, koji se ne može elementarno riješiti, ali o čijim rješenjima se mnogo zna. Ciljevi diplomskog su: formulirati taj model, pokazati osnovna svojstva njegove dinamike i navesti neke njegove primjene.

**Literatura:**

- [1] S. Baigent, *Lotka–Volterra Dynamics—An introduction*, Bio-Mathematics, UCL, 2010.
- [2] J. Hofbauer i K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

**Mentor:** Kovač Vjekoslav

## Funkcija zbroja djelitelja: povijesni pregled i problemi

**Područje:** Teorija brojeva, Povijest matematike

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The sum of divisors function: a historical overview and problems

**Opis teme:** Dat će se definicija aritmetičke funkcije  $\sigma$  te dokazati njezina osnovna svojstva. Diskutirat će se i povezani pojmovi *savršenog broja* i *prijateljskih brojeva*, kao i njihova uloga u starogrčkoj i arapskoj matematici. Potom će se pisati o zanimanju Paula Erdősa za probleme iz teorije brojeva vezane uz zbroj djelitelja. Precizno će se formulirati nekoliko odabranih Erdősovih problema te vrste i dati pregled njihovih rješenja ili parcijalnih rezultata.

### Literatura:

- [1] T. Bloom, *Erdős problems*. <https://www.erdosproblems.com> (Pristupljeno 3. 10. 2025.)
- [2] *Collected Papers of Paul Erdős*, Renyi Institute of Mathematics. [https://users.renyi.hu/~p\\_erdos/Erdos.html](https://users.renyi.hu/~p_erdos/Erdos.html) (Pristupljeno 3. 10. 2025.)
- [3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution of Washington, 1919.

**Mentor:** Kožić Slaven

## Problem četiri broja

**Područje:** Kombinatorika, linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Four number problem

**Opis teme:** Neka je dan kvadrat čiji su vrhovi označeni prirodnim brojevima. U prvom koraku, kvadratu pridružimo novi kvadrat čiji su vrhovi polovišta stranica polaznog kvadrata. Vrhovi tog novog kvadrata označeni su apsolutnim vrijednostima razlika oznaka vrhova one stranice polaznog kvadrata na kojoj se nalaze. U svakom sljedećem koraku, sasvim analogno, zadnjem kvadratu kojeg smo konstruirali pridružujemo novi kvadrat. Ovaj postupak, tj. igra završava kada dobijemo kvadrat čiji su svi vrhovi označeni nulom. Cilj ovog diplomskog rada je proučiti različite aspekte ovakve igre, npr. hoće li se opisani postupak zaustaviti nakon konačno mnogo koraka, kako će se igra promijeniti ako dopustimo da su vrhovi označeni realnim brojevima i slično. Ovisno o afinitetu studenta, dio rada može biti posvećen proučavanju vjerojatnosti da igra završi u  $k$  koraka ili generalizaciji problema na  $n$ -terokute.

### Literatura:

B. Freedman, *The four number game*, Scripta Mathematica **14** (1948), 35–47.

J. D. Sally, P. J. Sally, *Roots to Research, A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007.

W. A. Webb, *The length of the four-number game*, Fibonacci Quarterly **20** (1982), 33–35.

**Mentor:** Krčadinac Vedran

## $q$ -Račun u kombinatorici

**Područje:** Kombinatorika

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Položen kolegij *Kombinatorika*.

**Naslov na engleskom:**  $q$ -Calculus in combinatorics

**Opis teme:** U knjizi [1], autori razvijaju  $q$ -analogon diferencijalnog računa. Osnovna primjena je prebrojavanje u vektorskom prostoru nad konačnim poljem, ali rezultati i formule imaju i mnoge druge kombinatorne interpretacije. U diplomskom radu obradit će se neke od njih prema knjizi [1] i skripti [2].

**Literatura:**

1. V. Kac, P. Cheung, *Quantum calculus*, Springer, 2002.
2. S. Melczer, *An invitation to enumeration*, skripta, 2024. <https://enumeration.ca/>

**Mentor:** Krčadinac Vedran

## Ortogonalni polinomi u kombinatorici

**Područje:** Kombinatorika

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Položen kolegij *Kombinatorika*.

**Naslov na engleskom:** Orthogonal polynomials in combinatorics

**Opis teme:** Cilj ovog diplomskog rada je obraditi osnovne rezultate o ortogonalnim polinomima i njihovim primjenama u kombinatorici, prema 8. poglavlju knjige [1] te skripti [2].

**Literatura:**

1. C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, London, 1993.
2. J. S. Kim, *Lecture notes on combinatorics of orthogonal polynomials*, skripta, 2023.  
[https://jangsookim.github.io/lectures/OPS/orthogonal\\_polynomials.pdf](https://jangsookim.github.io/lectures/OPS/orthogonal_polynomials.pdf)

**Mentor:** Lubura Strunjak Snježana

## CART - Klasifikacijska i regresijska stabla odlučivanja

**Područje:** Matematička statistika, Računarska statistika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Poznavanje osnovnih alata Vjerojatnosti i Statistike.

**Naslov na engleskom:** CART - Classification and Regression Tree

**Opis teme:** U radu će se definirati klasifikacijska i regresijska stabla i kroz par primjera će se pokazati primjena. Primjeri će biti implementirani u programskom jeziku R.

### Literatura:

J. Friedman, T. Hastie, R. Tibshirani, The Elements of Statistical Learning, Data Mining, Inference, and Prediction, 2nd ed., Springer Inc., 2001.

G. James, T. Hastie, R. Tibshirani, D. Witten, An Introduction to Statistical Learning with Applications in R, 2nd ed., Springer Science+Business Media, LLC, 2021.

CART Model: Decision Tree Essentials, <https://www.sthda.com/english/articles/35-statistical-machine-learning-essentials/141-cart-model-decision-tree-essentials/>

Tree-based models in R, <https://www.datacamp.com/doc/r/cart>

Classification and Regression Trees (CART) in R, <https://rpubs.com/camguild/803096>

**Mentor:** Lubura Strunjak Snježana

## BART - Bayesovska aditivna regresijska stabla odlučivanja

**Područje:** Matematička statistika, Računarska statistika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Poznavanje osnovnih alata Vjerojatnosti i Statistike.

**Naslov na engleskom:** BART - Bayesian additive regression trees

**Opis teme:** U radu će se definirati BART metoda i kroz par primjera će se pokazati kako se koristi. Primjeri će se implementirati u programskom jeziku R.

### Literatura:

H. A. Chapman, E. I. George, R. E. McCulloch, BART: Bayesian additive regression trees, The Annals of Applied Statistics 2010, Vol. 4, No. 1, 266-298

<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC6800811/>

R. Sparapani, C. Spanbauer, R. McCulloch, Nonparametric Machine Learning and Efficient Computation with Bayesian Additive Regression Trees: The BART R Package, Journal of Statistical Software, 2021, Vol. 97, Issue 1.

W. M. Bolstad, Introduction to Bayesian Statistics, John Wiley and Sons, 2007.

**Mentor:** Lubura Strunjak Snježana

## Bayesovski hijerarhijski modeli

**Područje:** Matematička statistika, Računarska statistika, Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Poznavanje osnovnih alata Vjerojatnosti i Statistike.

**Naslov na engleskom:** Bayesian hierarchical models

**Opis teme:** U radu će se definirati Bayesovski hijerarhijski modeli i pokazat će se primjena kroz par primjera. Primjeri će se obrađivati u programskom jeziku R.

**Literatura:**

A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, D. B. Rubin, Bayesian Data Analysis, <https://sites.stat.columbia.edu/gelman/book/BDA3.pdf>

A. Vehtari, M. Paasiniemi, Bayesian data analysis demo 5.2., [https://avehtari.github.io/BDA\\_R\\_demos/demos\\_ch5/demo5\\_2.html](https://avehtari.github.io/BDA_R_demos/demos_ch5/demo5_2.html)

W. M. Bolstad, Introduction to Bayesian Statistics, John Wiley and Sons, 2007.

**Mentor:** Ljulj Matko

## Lema o podizanju eksponenta

**Područje:** Metodika nastave matematike, Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Lifting The Exponent Lemma

**Opis teme:** Na srednjoškolskim natjecanjima iz matematike korisna je Lema o podizanju eksponenta (Lifting The Exponent Lemma) koja govori o vrijednosti  $\nu_p(x^n \pm y^n)$  za cijele  $x, y$ , prirodne  $n$  i proste  $p$  takve da  $p$  ne dijeli  $x$  ni  $y$ , a dijeli  $x \pm y$  (ovdje je  $\nu_p(m)$  oznaka za najveću nenegativnu potenciju broja  $p$  koja dijeli  $m$ ). Iako pravi izvor same leme nije jasan, popularnost među natjecateljima narasla je nakon radova člana Mihaia Manee ([1]) i Amira Hosseina Parvardija ([2]). U ovom radu cilj je obraditi tu lemu, dati iskaze i dokaze osnovnih tvrdnji i pokazati kako se ta lema može primijeniti na zadatke s hrvatskih i međunarodnih natjecanja iz matematike.

### Literatura:

M. Manea, "Some  $a^n \pm b^n$  Problems in Number Theory", Mathematics Magazine, vol. 79, no. 2, April 2006, pp. 140–145. <https://web.archive.org/web/20200322064554/https://www.maa.org/sites/default/files/mathmag140-145-manea44299.pdf>

Pavardi, A. H. (2011). Lifting The Exponent Lemma (LTE). <https://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/lifting-the-exponent.pdf>

<https://natjecanja.math.hr/>

Antonija Horvatek, Natjecanja iz matematike u RH, <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm>

**Mentor:** Matejak Cvenić Karolina

## Istraživanje učeničkog konceptualnog razumijevanja zakona idealnog plina

**Područje:** fizika, metodika nastave fizike

**Prikladno za studij:** Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Investigating Students' Conceptual Understanding of the Ideal Gas Laws

**Opis teme:** Zakoni koji opisuju idealni plin važan su dio termodinamike, te se detaljno istražuju na nastavi u drugom razredu gimnazije, gdje se osim konceptualnog savladavanja gradiva i numeričkog rješavanja zadataka, učenicima pruža i odlična prilika za vježbanje znanstvenog zaključivanja i proporcionalnog razmišljanja. Premda naoko jednostavni i opisani s nekoliko kratkih jednadžbi, istraživanja u edukacijskoj fizici pokazuju kako brojni učenici, ali i studenti, imaju priličnih poteškoća u konceptualnom razumijevanju plinskih zakona. U ovome će se diplomskom radu istražiti učeničko konceptualno razumijevanje plinskih zakona. U tu će svrhu diplomand pripremiti test koji će se sastojati od 15-ak pitanja zatvorenog tipa te 4–6 pitanja otvorenog tipa. U istraživanju će sudjelovati oko 80 učenika drugih razreda zagrebačkih gimnazija, koji su u sklopu redovne nastave već obradili plinske zakone. Analiza učeničkih odgovora dat će pregled elemenata koje su učenici na nastavi uspješno savladali, ali i onih koji su im predstavljali veće izazove. Dat će se i pregled tipičnih poteškoća i alternativnih ideja koje se pojavljuju u njihovim postupcima i rješenjima zadataka, te strategijama koje učenici koriste za rješavanje zadataka otvorenog tipa. Na temelju dobivenih rezultata, predložit će se i smjernice za nastavu fizike, kojima bi se moglo unaprijediti učeničko konceptualno razumijevanje gradiva.

### Literatura:

Primjer: Materijali s kolegija Metodika nastave fizike 1 i 2

V. A. Gonzalez, The impact of high school students' difficulties with operational definitions on understanding the ideal gas law, doktorska disertacija, 2004.

<https://www.proquest.com/docview/305036095?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true> Student će dobiti dodatnu literaturu po početku rada na istraživanju.

**Mentor:** Matejak Cvenić Karolina

## Usporedba učeničkog rješavanja zadataka iz fizike s kalkulatorom i bez njega

**Područje:** fizika, metodika nastave fizike

**Prikladno za studij:** Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Comparison of Students' Problem Solving in Physics With and Without a Calculator

**Opis teme:** Kalkulator je alat kojega učenici uče koristiti na matematici, a koriste u rješavanju numeričkih zadataka i u mnogim drugim predmetima. Premda je kalkulator vrlo koristan alat koji učenicima omogućuje brzo računanje i dolazak do rješenja, možemo se zapitati kakav je njegov utjecaj na učeničko razumijevanje postavljenih zadataka, te dovodi li njegovo korištenje do situacija da učenici rješavanje zadataka svode na puko ukucavanje brojeva u kalkulator. U ovome se diplomskom radu želi istražiti kako učenici viših razreda gimnazija pristupaju rješavanju numeričkih zadataka iz fizike. Za potrebe istraživanja diplomand će osmisлити test koji će sadržavati nekoliko numeričkih zadataka otvorenoga tipa koji će ispitivati učeničko razumijevanje različitih dijelova fizike, koje su učenici već obradili u sklopu nastave. U planu je da u istraživanju sudjeluje 80-ak učenika iz nekoliko zagrebačkih gimnazija. Ispitani će učenici biti podijeljeni u dvije podjednako brojne skupine, pri čemu će jedna skupina učenika rješavati zadatke uz pomoć kalkulatora, dok će druga skupina učenika rješavati zadatke bez kalkulatora. Za svaki zadatak u testu učenicima će se postaviti i nekoliko dodatnih potpitanja, kojima će se nastojati steći veći uvid u njihovo razumijevanje postavljenih zadataka i provedenih postupaka. Učenički odgovori na pitanja analizirat će se zasebno za svaku skupinu. Za svaki će se zadatak napraviti usporedba između dvije skupine, komentirat će se tipične učeničke strategije u rješavanju zadataka, te eventualne razlike u pristupu i točnosti rješenja. Na temelju rezultata analize učeničkih odgovora dat će se i smjernice za rješavanje zadataka u nastavi fizike.

### Literatura:

Materijali s kolegija Metodika nastave fizike 1 i 2

Student će dobiti dodatnu literaturu po početku rada na istraživanju.

**Mentor:** Milin Šipuš Željka

## Ekvidistantni skupovi i generalizacije

**Područje:** Geometrija. Metodika nastave matematike

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Nema ih.

**Naslov na engleskom:** Equidistant sets and generalizations

**Opis teme:** Skupovi točaka euklidske ravnine koje su jednako udaljeni od dvaju zadanih skupova u ravnini prirodno se pojavljuje u mnogim klasičnim geometrijskim situacijama. Javljaju se i u nastavi matematike (primjerice, simetrala dužine, parabola). Općenitije, relaksacijom uvjeta „jednake udaljenosti“, tj. Pappus-Boškovićevom definicijom, dobivaju se i elipsa i hiperbola kao krivulje čiji je kvocijent udaljenost od čvrste točke i pravca konstantan. No, može se pokazati da se one mogu realizirati i kao skupovi jednako udaljeni od dviju kružnica. Iduća moguća generalizacija su tzv. Voronoijski dijagrami koji predstavljaju particiju ravnine u područja određena konačnim brojem točaka, tzv. sjemenki, koja se sastoje od svih točaka ravnine bližih nekoj sjemenki nego bilo kojoj drugoj. U ovom diplomskom radu proučit će se određene klase ekvidistantnih skupova točaka u euklidskoj ravnini, kao i njihove generalizacije. Istaknut će se i mogućnost njihovog proučavanja u nastavi matematike.

### Literatura:

1. Ponce, M., Santibáñez, P. On Equidistant Sets and Generalized Conics: The Old and the New, The American Mathematical Monthly, Vol. 121, No. 1 (2014), 18-32.
2. MERIA project, Teaching scenarios Conflict lines – introduction, <https://meria-project.math.hr/activities-results/meria-teaching-scenarios>
3. Milin Šipuš, Ž., Bašić, M., Doorman, M., Špalj, E., Antoliš, S. MERIA - Conflict lines: experience with two innovative teaching materials, CEPS Journal, Special issue on Problem Solving and Problem Posing: From Conceptualisation to Implementation in the Mathematics Classroom, Vol.12, No1 (2022), 103-124.

**Mentor:** Milin Šipuš Željka

## Financijska pismenost u nastavi matematike

**Područje:** Metodika nastave matematike

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Nema ih.

**Naslov na engleskom:** Financial literacy in mathematics teaching

**Opis teme:** PISA definira financijsku pismenost kao „znanje i razumijevanje financijskih koncepata i rizika, te kao vještine, motivaciju i samopouzdanje za primjenu takvog znanja i razumijevanja kako bi se donosile učinkovite odluke u nizu financijskih konteksta, poboljšala financijska dobrobit pojedinaca i društva te omogućilo sudjelovanje u gospodarskom životu“ (OECD, 2020). U ovom diplomskom radu razradit će se teme financijske pismenosti prikladne za nastavu matematike u osnovnim i srednjim školama. U radu će se analizirati rezultati projekta *Financijska pismenost u suvremenom matematičkom obrazovanju* ([1]), kao i rezultati nedavnih istraživanja provedenih u sklopu PISA istraživanja financijske pismenosti ([2-3]).

### Literatura:

1. Projekt *Financijska pismenost u suvremenom matematičkom obrazovanju*; Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu  
<https://finpis.math.hr/>
2. PISA 2020, What do 15-year-olds really know about money?
3. PISA 2022 Results (Volume IV), How Financially Smart Are Students?
4. Investopedia. Financial Literacy: What It is, and Why Is So Important to Teach Teens?

**Mentor:** Milin Šipuš Željka

## Pojam funkcije u nastavi matematike

**Područje:** Metodika nastave matematike

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Nema ih.

**Naslov na engleskom:** The concept of function in mathematics teaching

**Opis teme:** Diplomski rad bavi se analizom pojma funkcije i njenim značajem u procesu učenja i poučavanja matematike na osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj razini. Funkcija je jedan od temeljnih matematičkih pojmova koji povezuje različita područja matematike, a razumijevanje tog pojma promatrat će se kroz četiri aspekta (ulazno – izlazno pridruživanje, kovarijacijski proces, relacijsko sparivanje i funkcija kao matematički objekt) te kroz razliku slike pojma i definicije pojma (kako se razvijaju učeničke mentalne predstave o funkciji i njihova odstupanja od formalne matematičke definicije funkcije).

### Literatura:

1. Winsløw, C. What is important in undergraduate mathematics? Revisiting covariation through functional equations. INDRUM 2024 Proceedings, Barcelona, Spain, 2024.
2. Thompson, P.W., Carlson, M.P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Compendium for research in mathematics education 421 (2017).
3. Dubinsky, E., McDonald, M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research, In: Holton, D., Artigue, M., Kirchgäber, U., Hillel, J., Niss, M., Schoenfeld, A. (eds). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, 2001.
4. Tall, D., Shlomo V. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics 12.2 (1981): 151-169.
5. Osnovnoškolski i srednjoškolski udžbenici iz matematike

**Mentor:** Mrazović Rudi

## Generiranje slučajnih latinskih kvadrata

**Područje:** teorija vjerojatnosti, kombinatorika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Markovljevi lanci

**Naslov na engleskom:** Generating random Latin squares

**Opis teme:** Latinski kvadrat reda  $n$  je tablica dimenzija  $n \times n$  popunjena brojevima  $1, \dots, n$  na način da niti jedan redak ili stupac ne sadrži dva ista broja. Na koji način možemo generirati (uniformno) slučajan latinski kvadrat reda  $n$ ? Naivni pokušaj sastojao bi se od spremanja u memoriji svih latinskih kvadrata reda  $n$  te uzorkovanja uniformno slučajnog elementa tog konačnog skupa. Međutim, ovakva ideja je potpuno nepraktična (čak i neizvediva) već za male vrijednosti broja  $n$  – postoji više od  $n^{n^2/2}$  latinskih kvadrata reda  $n$  (točna asimptotika još uvijek nije poznata).

Cilj diplomskog rada je prezentirati rad Jacobsona i Matthews-a u kojem se bave ovim problemom koristeći Markovljeve lance.

### Literatura:

Mark T. Jacobson i Peter Matthews. “Generating uniformly distributed random Latin squares”. J. Combin. Des. 4.6 (1996.), str. 405–437. doi: 10.1002/(SICI)1520-6610(1996)4:6<405::AID-JCD3>3.0.CO;2-J

**Mentor:** Muha Boris

## Nash-Kuiperov teorem

**Područje:** Diferencijalna geometrija, Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Diferencijalna geometrija ili Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Naslov na engleskom:** The Nash–Kuiper Theorem

**Opis teme:** Cilj rada je dokazati Nash–Kuiperov teorem o  $C^1$  izometrijskim ulaganjima  $m$ -dimenzionalne mnogostrukosti  $M$  u  $\mathbb{R}^n$ , pri čemu vrijedi  $n \geq m + 1$ . Dokaz teorema koristi tehniku tzv. konveksne integracije, koju su kasnije dodatno razvili Gromov te De Lellis i Székelyhidi u kontekstu parcijalnih diferencijalnih jednačbi. U drugom dijelu rada obradit će se primjene konveksne integracije u mehanici fluida, odnosno u konstrukciji neregularnih rješenja Eulerovih jednačbi.

### Literatura:

De Lellis, C. and Székelyhidi, L., 2015. On h-principle and Onsager’s conjecture. Eur. Math. Soc. Newsl, 95, pp.19-24.

Lee, J.M., 2003. Smooth manifolds. In Introduction to smooth manifolds (pp. 1-29). New York, NY: Springer New York.

Nash, J.  $C^1$  isometric imbeddings, Ann. of Math. (2), 60:383–396, 1954.

Székelyhidi Jr, L., 2012. From isometric embeddings to turbulence. HCDTE lecture notes. Part II. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations, 7, p.63.

**Mentor:** Muha Boris

## Matematičko modeliranje umjetne gušterače: spregnuti Stokes–Biotov sustav

**Područje:** Analiza parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i matematičko modeliranje

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mathematical Modelling of an Artificial Pancreas: A Coupled Stokes–Biot System

**Opis teme:** Cilj rada jest izvesti i analizirati pojednostavljen matematički model umjetnih organa, s naglaskom na umjetnu gušteraču. Model se izvodi u okviru mehanike kontinuuma te se sastoji od spregnutog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u kojem su Navier–Stokesove (odnosno Stokesove) jednadžbe spojene s Biotovim jednadžbama za poroelastični materijal. Nakon izvođenja diferencijalne formulacije uvode se prikladni funkcijski prostori i postavlja se slaba formulacija problema. Glavni rezultat jest teorem o postojanju slabog rješenja. Dokaz je konstruktivan i oslanja se na numeričku shemu. Iako je fokus rada teorijski, razmatra se i dizajn numeričke sheme te potencijalne primjene u biomedicini.

### Literatura:

- Bociu, L., Čanić, S., Muha, B., and Webster, J.T., 2021. Multilayered Poroelasticity Interacting with Stokes Flow. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 53(6), 6243–6279.
- Bukač, M., Čanić, S., Muha, B., and Wang, Y., 2024. A computational algorithm for optimal design of a bioartificial organ scaffold architecture. *PLOS Computational Biology*, 20(11), e1012079.
- Coussy, O., 2004. *Poromechanics*. John Wiley & Sons.
- Čanić, S., Kuan, J., Muha, B., and Tawri, K., 2025. *Deterministic and Stochastic Fluid–Structure Interaction*. Springer Nature (Advances in Mathematical Fluid Mechanics).
- Galdi, G.P., 2000. An Introduction to the Navier–Stokes Initial-Boundary Value Problem. In *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics* (pp. 1–70). Basel: Birkhäuser Basel.

**Mentor:** Muić Goran

## Ireducibilnost polinoma s racionalnim koeficijentima

**Područje:** algebra

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Vektorski prostori

**Naslov na engleskom:** Irreducibility of polynomials with rational coefficients

**Opis teme:** U radu definira se pojam ireducibilnog polinoma s racionalnim koeficijentima i dokazuju se razni kriteriji ireducibilnosti.

**Literatura:**

1. Y. Zhao, Integer Polynomials, <https://yufeizhao.com/olympiad/intpoly.pdf>. 2.V. V. Prasolov, Polynomials (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol.11), Springer, 2009.

**Mentor:** Muić Goran

## Konstrukcija realnih brojeva pomoću Dedekindovih rezova

**Područje:** algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** matematička analiza

**Naslov na engleskom:** A construction of real numbers via Dedekind cuts

**Opis teme:** Diplomski rad daje konstrukciju uređenog polja realnih brojeva preko Dedekindovih rezova racionalnih brojeva.

### Literatura:

1. D. Ilišević, G. Muić, Uvod u matematiku, on-line skripta.
2. S. Mardešić. Matematička analiza: u n-dimenzionalnom realnom prostoru. Brojevi, konvergencija, neprekidnost. Dio 1, Manualia Universitatis studiorum Zagrabien-sis (Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu), Školska knjiga, 1979.
3. A. Nita, Real numbers, <https://math.colorado.edu/~nita/RealNumbers.pdf>

**Mentor:** Najman Filip

## Kriptografija bazirana na kodovima

**Područje:** Kriptografija

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Code-based cryptography

**Opis teme:** Kriptografija bazirana na kodovima se temelji na metodama teorije kodiranja s pogreškama. Ideja je da se poruka šifrira tako da se na nju primijeni linearni kod koji naizgled izgleda kao slučajna matrica, ali iza njega stoji skrivena struktura poznata samo vlasniku privatnog ključa. Javna enkripcija koristi tu „maskiranu“ matricu i na poruku dodaje malu pogrešku, dok dekripcija koristi tajni dekodirajući algoritam koji može ispraviti pogreške i rekonstruirati originalnu poruku. Najpoznatiji sustav iz ove obitelji je McElieceov kriptosustav, predložen još 1978. godine. On se temelji na posebnoj klasi kodova, tzv. Goppa kodovima, koji imaju dobre algoritme za dekodiranje. Javnim ključem je transformirana matrica generatora koda, koja izgleda kao slučajna, dok privatni ključ sadrži podatke o stvarnom kodu i potrebnim transformacijama. Zbog toga enkripcija i dekripcija rade vrlo brzo, ali javni ključevi ispadaju prilično veliki. U ovom diplomskom bit će opisan McElieceov kriptosustav (generacija ključa, enkripcija, dekripcija), pregled varijanti (npr. Niederreiterov sustav, McBits), kao i diskusija o sigurnosti.

### Literatura:

1. Daniel J. Bernstein, Johannes Buchmann, Erik Dahmen (ur.): Post-Quantum Cryptography, Springer, 2009.
2. Steven Galbraith: Mathematics of Public Key Cryptography, Cambridge University Press, 2012.

**Mentor:** Najman Filip

## Financijski sustavi bazirani na kriptovalutama

**Područje:** Kriptografija, teorija igara

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Financial Systems Based on Cryptocurrencies

**Opis teme:** Ovaj diplomski rad istražuje matematičke aspekte financijskih sustava temeljenih na kriptovalutama. Poseban naglasak stavljen je na ključne matematičke koncepte koji čine osnovu kriptovaluta, poput kriptografskih hash funkcija, eliptičkih krivulja i digitalnih potpisa. Nadalje, razmatraju se i matematički principi koji stoje iza pametnih ugovora, kao i njihova uloga u automatizaciji i sigurnosti decentraliziranih financijskih protokola. Analiziraju se konsenzusni algoritmi primjenom vjerojatnosnih modela te se proučava uloga teorije igara u održavanju stabilnosti decentraliziranih mreža. U završnom dijelu provodi se analiza nekoliko stvarnih primjera iz područja decentraliziranih financija s ciljem prikaza praktične primjene teorijskih modela.

### Literatura:

Katz, J., Lindell, Y. (2020). Introduction to Modern Cryptography (3rd ed.). CRC Press.  
Narayanan, A., Bonneau, J., Felten, E., Miller, A., Goldfeder, S. (2016). Bitcoin and Cryptocurrency Technologies: A Comprehensive Introduction. Princeton University Press.

**Mentor:** Nakić Ivica

## Nelinearno upravljanje linearnim sustavima

**Područje:** Teorija upravljanja

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** predznanje obuhvaćeno izbornim modulom Teorija upravljanja

**Naslov na engleskom:** Nonlinear control of linear systems

**Opis teme:** Svaki upravljač u praksi ima ograničenja s obzirom na upravljački signal budući da je maksimalna snaga upravljanja uvijek konačna. Dakle, svaki realni sustav ima ulazna ograničenja. Posljedica ove činjenice je da je upravljačka petlja zapravo uvijek nelinearna, neovisno o (ne)linearnosti sustava. U diplomskom radu student bi prikazao neke tehnike za konstrukciju nelinearnih upravljača za linearne sustave uključujući upravljače varijabilne strukture i vremenski optimalne upravljače. Opisane tehnike bile bi ilustrirane numeričkim primjerima baziranim na realnim sustavima.

### Literatura:

J. Adamy, *Nonlinear Systems and Controls*, 2nd ed, Springer, (2024)

M. Nagahara, *Sparsity methods for systems and control*, now Publishers, (2020)

**Mentor:** Orel Ognjen

## Primjena statističkih metoda u procesu izgradnje skladišta podataka

**Područje:** Podatkovno inženjerstvo

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Poslovna inteligencija, Statistika

**Naslov na engleskom:** Integrating Statistical Methods into the Data Warehouse Development Process

**Opis teme:** Skladišta podataka su organizirani, vremenski određeni skupovi podataka koji služe za donošenje poslovnih odluka. Uporaba skladišta podataka omogućena je putem raznih analitičkih alata koji omogućavaju rudarenje podataka na različite načine. Radi složenosti upita nad skladištima podataka, izračuni nad podacima (odnosno mjere u činjeničnim tablicama) se obavljaju unaprijed, tijekom pripreme skladišta. No uglavnom se mjere računaju na najjednostavnije načine, npr. zbrajanjem, a nedovoljno često se tijekom pripreme skladišta podataka koriste statističke metode. U ovom radu će student prikazati izgradnju skladišta podataka iz relacijske baze podataka pri čemu će analizirati i demonstrirati primjenjivost mjera lokacije, grupiranja te korelacije u stvaranju činjeničnih tablica skladišta podataka. Primjenjive će mjere također uključiti u ETL (extract-transform-load) proces i time omogućiti dodatne uvide u podatke i olakšati analize i odlučivanje temeljem izgrađenog skladišta podataka.

### Literatura:

Nastavni materijali iz kolegija Poslovna inteligencija i Statistika

R. Kimball, M. Ross: The Data Warehouse Toolkit - The Complete Guide to Dimensional Modeling, 3rd edition, Wiley, 2013

L. Corr, J. Stagnitto: Agile Data Warehouse Design: Collaborative Dimensional Modeling, from Whiteboard to Star Schema, DecisionOne Press, 2021

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Pogreške učenika u učenju algebre

**Područje:** algebra, metodika

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Student errors in algebra learning

**Opis teme:** Proučavanje pogrešaka učenika u učenju algebre važno je jer upravo pogreške otkrivaju način na koji učenici oblikuju, pogrešno tumače ili nepotpuno usvajaju temeljne algebarske koncepte. U ovom radu analizirat će se najčešći tipovi pogrešaka pri radu s izrazima, jednadžbama, funkcijama i simboličkim zapisima te njihovi uzroci u kognitivnim procesima učenika. Dodatno će se prikazati didaktičke strategije koje nastavnici mogu koristiti za prepoznavanje, dijagnosticiranje i ispravljanje tih pogrešaka u učionici.

### Literatura:

H. Radatz, *Error Analysis in Mathematics Education*, Journal for Research in Mathematics Education, 1979.

E. A. Knuth, M. Alibali, M. McNeil, A. Weinberg, S. Stephens, *Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Ideas: Equivalence and Variable, Early Algebraization*, Springer, 2011.

A. Sfard, *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Two Sides of the Same Coin*, Educational Studies in Mathematics, 1991

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Primjena digitalnih alata u nastavi matematike

**Područje:** metodika, geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The use of digital tools in teaching mathematics

**Opis teme:** Digitalni alati postaju sve važniji u suvremenoj nastavi matematike jer mijenjaju načine na koje učenici istražuju, vizualiziraju i razumiju matematičke pojmove. U ovom radu prikazat će se teorijski okviri za pedagoški smisleno uključivanje tehnologije te analizirati najčešće korišteni digitalni alati u nastavi matematike, s naglaskom na njihove didaktičke prednosti i ograničenja. Dodatno će se obraditi primjeri dobre prakse i rezultati relevantnih istraživanja kako bi se procijenila stvarna učinkovitost digitalnih alata u obrazovnom procesu.

### Literatura:

Mishra, P., Koehler, M. J., *Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge*, Teachers College Record, 108(6), 1017–1054., 2006.

Cheung, A. C. K., Slavin, R. E. *The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K–12 classrooms: A meta-analysis*, Educational Research Review, 9, 88–113., 2013.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., Reiss, K. M. *The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis*, Computers and Education, 153, 103897., 2020.

**Mentor:** Planinić Hrvoje

## Modeliranje i zaključivanje za prostorne točkovne uzorke

**Područje:** Vjerojatnost, Statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Teorija vjerojatnosti, Matematička statistika

**Naslov na engleskom:** Modeling and inference for spatial point patterns

**Opis teme:** Pri modeliranju prostornih (dvodimenzionalnih) podataka često je potrebno koristiti modele u kojima se mjerenja javljaju na *slučajnim lokacijama*. Vjerojatnosti model za takve podatke su tzv. *točkovni procesi* (engl. *point processes*).

Cilj rada je rigorozno obraditi teoriju točkovnih procesa na  $\mathbb{R}^d$  s naglaskom na pojmove, rezultate i modele koji su korisni za statističke primjene. Preciznije, u početku bi se uveli osnovni pojmovi poput Poissonovog procesa, mjera inteziteta višeg reda, stacionarnosti i produktnih gustoća, te tzv. Papangelou-ove funkcije uvjetnog inteziteta. Nakon toga bi se malo detaljnije obradili općeniti konačni točkovni procesi, a zatim i najvažniji modeli poput Markovljevih (ili Gibbsovih) te Cox-ovih točkovnih procesa. Na kraju bi se analizirale metode procjene parametara za ove modele, te bi se cijela teorija ilustrirala na nekoliko primjera koristeći R paket *spatstat*. Ukoliko bude moguće, u radu bi se dodatno obradile i neke naprednije primjenjene teme vezane uz statistiku točkovnih procesa poput Bayesovog pristupa, MCMC metoda ili slično.

### Literatura:

van Lieshout, M. N. M. (2019). *Theory of spatial statistics: A concise introduction*. Chapman and Hall/CRC.

Baddeley, A., Rubak, E., & Turner, R. (2016). *Spatial point patterns: methodology and applications with R (Vol. 1)*. Boca Raton: CRC press.

**Mentor:** Planinić Hrvoje

## Lokalna konvergencija slučajnih grafova

**Područje:** Teorija vjerojatnosti

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Teorija vjerojatnosti

**Naslov na engleskom:** Local convergence of random graphs

**Opis teme:** Ako promatramo graf na  $n$  vrhova (slučajan ili ne), često nas zanima nas *lokalno* ponašanje grafa oko uniformno odabranog (*tipičnog*) vrha kada  $n \rightarrow \infty$ . U tu svrhu potrebno je definirati prikladnu topologiju na prostoru tzv. ukorijenjenih (konačnih ili beskonačnih) grafova, te promatrati vezani pojam konvergencije po distribuciji s obzirom na tu topologiju – dobiveni oblik konvergencije tipično se naziva *lokalno slaba konvergencija*.

U radu će se precizno opisati i analizirati metrički prostor lokalne konvergencije ukorijenjenih grafova te vezani pojam lokalne slabe konvergencije slučajnih grafova, ali i drugi srodni oblici lokalne konvergencije. Koncept lokalne slabe konvergencije će se ilustrirati na nekoliko poznatih primjera poput (i) konvergencije tzv. Erdős–Rényi modela, i (ii) konvergencije uniformno odabranog  $k$ -regularnog grafa. Na kraju će se analizirati neke posljedice lokalne slabe konvergencije, a ukoliko bude moguće, ukratko će se obraditi pojam *unimodularnosti* kod slučajnih grafova.

### Literatura:

Nicolas Curien. Random graphs - the local convergence point of view, 2024. Bilješke s predavanja, dostupne na <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~nicolas.curien/cours/cours-RG.pdf>

Remco Van Der Hofstad. *Random graphs and complex networks*, Volume 2. Cambridge university press, 2024.

**Mentor:** Prlić Ana

## Konačna polja i njihove primjene u kriptografiji

**Područje:** algebra, teorija brojeva

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Položeni kolegiji Algebarske strukture i Elementarna teorija brojeva

**Naslov na engleskom:** Finite fields and their applications in cryptography

**Opis teme:** Konačna polja je u 19. stoljeću utemeljio Évariste Galois. Njihova je važnost postala još očitija u 20. stoljeću – razvojem digitalne tehnologije, teorije kodiranja i kriptografije.

U ovom radu će biti opisana struktura i konstrukcija konačnih polja te način na koji se ta teorija koristi u modernim kriptografskim sustavima, posebno u algoritmu AES (Rijndael) i kriptosustavima koji se temelje na eliptičkim krivuljama. Na kraju rada bit će predloženi i načini kako se ideja konačnih polja i šifriranja može približiti učenicima srednjih škola.

### Literatura:

1. CARNet CERT, Korištenje eliptičnih krivulja u kriptografiji, <https://www.cis.hr/www.edicija/LinkedDocuments/CCERT-PUBDOC-2006-11-169.pdf>
2. K. Conrad, Finite Fields Notes, University of Connecticut, 2012.
3. J. Daemen, V. Rijmen, The Design of Rijndael: AES – The Advanced Encryption Standard, Springer, 2002.
4. A. Menezes, P. van Oorschot, S. Vanstone, Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, 1996.
5. NIST, FIPS 197 – Advanced Encryption Standard (AES), 2001. <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/fips/nist.fips.197.pdf>
6. N. Smart, Cryptography: An Introduction, 3rd Edition, McGraw-Hill, 2006. [https://nigelsmart.github.io/Crypto\\_Book/book.pdf](https://nigelsmart.github.io/Crypto_Book/book.pdf)

**Mentor:** Prlić Ana

## Primjene determinanti u algebri, geometriji i analizi

**Područje:** linearna algebra, analiza, geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema ih

**Naslov na engleskom:** Applications of determinants in algebra, geometry, and analysis

**Opis teme:** U radu će biti obrađene poznate posebne determinante, poput Cauchyjeve, Vandermondeove, Gramove i Cayley–Mengerove determinante, Hadamardove nejednakosti te njihove primjene. Poseban naglasak bit će na geometrijskim interpretacijama determinante te na primjenama u analizi, uključujući Jacobian (u promjeni varijabli u višestrukim integralima), Hessianovu determinantu (pri određivanju ekstremnih vrijednosti funkcija više varijabli) i Wronskijevu determinantu (u analizi linearne nezavisnosti rješenja diferencijalnih jednadžbi).

Ovisno o afinitetima studentice, rad se može proširiti i na suvremene primjene determinanti u područjima kao što su strojno učenje, kombinatorika grafova i računalna algebra.

Dodatno, u radu će se prikazati i metodički pristupi kojima se pojam determinante može približiti učenicima — osobito kroz geometrijsku interpretaciju te vizualizaciju linearnih transformacija.

### Literatura:

1. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, Springer, 2015.
2. S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge Univ. Press, 2004.
3. H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 1990.
4. R. Horn, C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 2013.
5. C. Krattenthaler, *Advanced Determinant Calculus*, arXiv:math/0002004.
6. A. Kulesza, B. Taskar, *Determinantal Point Processes for Machine Learning*, 2012.
7. J. Stillwell, *The Four Pillars of Geometry*, Springer, 2005.
8. G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed., Wellesley, 2016.

**Mentor:** Prlić Ana

## Geometrijske transformacije i njihova primjena u natjecateljskoj geometriji

**Područje:** Geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema ih

**Naslov na engleskom:** Geometric transformations and their applications in competition geometry

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu bit će prikazane osnovne i napredne geometrijske transformacije te njihove primjene u rješavanju problema karakterističnih za više razine matematičkih natjecanja. U prvom dijelu rada razmatrat će se osnovne transformacije poput translacije, rotacije i refleksije, zatim sličnost i homotetija kao prirodne generalizacije izometrija, te spiralna sličnost koja kombinira rotaciju i homotetiju. Posebno poglavlje bit će posvećeno inverziji, koja omogućuje jednostavno rješavanje složenih problema s kružnicama i tangentama. U završnom dijelu rada analizirat će se primjeri zadataka s nacionalnih i međunarodnih matematičkih natjecanja u kojima su transformacijske metode ključne za razumijevanje i rješenje problema.

### Literatura:

1. I. Y. Bakel'man, Inversions. Popular Lectures in Mathematics, 1974. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED184844.pdf>
2. E. Chen. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2016.
3. E. Chen, Lemmas in Geometry, 2019. <https://web.evanchen.cc/handouts/GeoSlang/GeoSlang.pdf>
4. H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry Revisited, Random House, 1967. [https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter\\_Greitzer\\_Geometry\\_revisited.pdf](https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter_Greitzer_Geometry_revisited.pdf)
5. T. Davis, Inversion in a Circle, 2011. <http://www.geometer.org/mathcircles/inversion.pdf>
6. R. Gelca, I. Onișor, C. Y. Shine, Geometric Transformations. Cham: Springer, 2022.
7. K. Kedlaya, Notes on Euclidean Geometry, 2008. <https://kskedlaya.org/geometryunbound/geom-080399.pdf>
8. Potencija točke i radikalna osa, MNM.hr. [https://mnm.hr/wp-content/uploads/2016/03/potencija\\_tocke.pdf](https://mnm.hr/wp-content/uploads/2016/03/potencija_tocke.pdf)
9. J. Rangel-Mondragon, Inversive Geometry: Part 1, 2013. [https://content.wolfram.com/sites/19/2013/07/Rangel-Mondragon\\_Inversion-1.pdf](https://content.wolfram.com/sites/19/2013/07/Rangel-Mondragon_Inversion-1.pdf)

10. R. Gelca, I. Onișor, C. Y. Shine, Geometric Transformations. Cham: Springer, 2022.

**Mentor:** Radulović Marko

## Kvantitativno modeliranje kreditnog rizika

**Područje:** Matematičko modeliranje, financijska matematika

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Quantitative credit risk modelling

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu bavit ćemo se metodama modeliranja kreditnog rizika. Poseban naglasak bi će na CreditMetrics metodi, jednoj od metoda za procjenu rizika portfelja temeljenoj na promjenama kreditne kvalitete dužnika.

### Literatura:

T. Van Gestel, B. Baesens, Credit Risk Management: Basic Concepts: Financial Risk Components, Rating Analysis, Models, Economic and Regulatory Capital, Oxford University Press (2008)

A.J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Press (2005)

A. Saunders, L. Allen, Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms, John Wiley & Sons (2002)

G. M. Gupton, C. C. Finger, M. Bhatia, Creditmetrics: technical document, JP Morgan & Co. (1997)

**Mentor:** Radulović Marko

## Modeliranje invazije tumora

**Područje:** Matematičko modeliranje u biologiji

**Prikladno za studij:** Biomedicinska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Modelling of tumour invasion

**Opis teme:** U ovome radu prezentirat ćemo modele invazije tumora. Posebnu pažnju posvetit ćemo fenotipskoj koegzistenciji i utjecaju kod invazije tumora.

### Literatura:

J.D. Murray, Mathematical Biology I. An Introduction, Springer (2002)

J.D. Murray, Mathematical Biology II. Spatial models and biomedical applications, Springer (2003)

M.A.R. Strobl, A.L. Krause, M. Damaghi, R. Gillies, A.R.A. Anderson, P.K. Maini, Mix and Match: Phenotypic Coexistence as a Key Facilitator of Cancer Invasion, Bulletin of Mathematical Biology 82, article number 15 (2020)

R.M. Crossley, K.J. Painter, T. Lorenzi, P.K. Maini, R.E. Baker, Phenotypic switching mechanisms determine the structure of cell migration into extracellular matrix under the 'go-or-grow' hypothesis, Mathematical Biosciences 374, 109240 (2024)

**Mentor:** Radulović Marko

## Mehanika biološkog rasta

**Područje:** Matematičko modeliranje u biologiji

**Prikladno za studij:** Biomedicinska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mechanics of biological growth

**Opis teme:** U ovome radu proučavamo matematičke modele i mehaniku biološkog rasta. Posebnu pažnju posvetit ćemo jednodimenzionalnim i dvodimenzionalnim modelima s primjenama u biologiji.

**Literatura:**

A. Goriely, *The Mathematics and Mechanics of Biological Growth*, Springer (2017)

**Mentor:** Sandrić Nikola

## Impulsne neuronske mreže

**Područje:** Strojno učenje

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Matematičke osnove strojnog učenja

**Naslov na engleskom:** Spiking neural networks

**Opis teme:** Impulsne neuronske mreže (SNN, Spiking Neural Networks) predstavljaju treću generaciju umjetnih neuronskih mreža koje se temelje na vremenski diskretnim impulsima, čime se postiže veća biološka vjerodostojnost u modeliranju neuronske aktivnosti. Za razliku od klasičnih neuronskih mreža koje koriste kontinuirane vrijednosti aktivacije, SNN mreže koriste diskretne događaje u vremenu, što ih čini pogodnima za energetski učinkovitu obradu podataka i primjenu u neuromorfnim računalnim sustavima. Cilj ovog diplomskog rada je uvesti i opisati arhitekturu impulsnih neuronskih mreža, njihove osnovne modele i metode treniranja te demonstrirati njihovu primjenu na problemskom skupu podataka.

### Literatura:

W. Maass: Networks of Spiking Neurons: The Third Generation of Neural Network Models, Neural Networks, 1997

Tavanaei et al.: Deep Learning in Spiking Neural Networks, Neural Networks, 2019

F. Zenke, W. Gerstner: Surrogate Gradient Learning in Spiking Neural Networks, Nature Communications, 2021

T. Stewart, C. Eliasmith: Large-Scale Synthesis of Functional Spiking Neural Circuits, Proceedings of the IEEE, 2014

**Mentor:** Sandrić Nikola

## Razvoj i treniranje modela za igranje videoigara primjenom algoritama pojačanog učenja

**Područje:** Strojno učenje

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Matematička statistika, Matematičke osnove strojnog učenja

**Naslov na engleskom:** Development and Training of a Video Game Playing Model Using Reinforcement Learning Algorithms

**Opis teme:** Pojačano učenje predstavlja apstraktni okvir u kojem agent djeluje u okruženju te na temelju nagrada koje prima za svoja djelovanja uči princip ponašanja koji maksimizira ukupnu nagradu. U ovom radu razmatra se diskretna postava problema, gdje su skup stanja i skup akcija konačni, a prijelazi između stanja i dodjela nagrada odvijaju se u diskretnim vremenskim koracima. Poseban naglasak stavlja se na primjenu ovog pristupa u učenju agenta da samostalno savlada zadanu videoigru.

### Literatura:

R. S. Sutton, A. G. Barto: Reinforcement Learning: An Introduction, MIT Press, Cambridge, MA, 2018

M. Sewak: Deep Reinforcement Learning, Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019

M. Morales: Grokking Deep Reinforcement Learning, Manning Publications, 2020

**Mentor:** Slijepčević Siniša

## Rasna diskriminacija među košarkaškim sucima i linearna regresija

**Područje:** Primijenjena statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Racial discrimination among NBA referees and linear regression

**Opis teme:** U radu će se obraditi osnove teorije višeparametarske linearne regresije i sličnih statističkih modela. Kao primjer primjene, obradit će se primjer rasne diskriminacije među košarkaškim (NBA) sucima.

**Literatura:**

1. J. Price, Racial discrimination among NBA referees, *The Quarterly Journal of Economics* 125 (2010), p 1859-1887
2. N. H. Bingham, J.M.Fry, *Regression (Linear Models in Statistics)*, Springer, 2010

**Mentor:** Slijepčević Siniša

## Mjerenje pristranosti u potrošačkom kreditiranju

**Područje:** Primijenjena statistika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Measuring bias in consumer lending

**Opis teme:** U radu će se obraditi osnove teorije višeparametarske linearne regresije i sličnih statističkih modela. Kao primjer primjene, obradit će se primjer pristranosti u potrošačkom kreditiranju.

**Literatura:**

1. W. Dobbie, A. Liberman, D. Paravisini and V. Pathania, Measuring bias in consumer lending, The Review of Economic Studies 88 (2021), 2799–2832,
2. N. H. Bingham, J.M.Fry, Regression (Linear Models in Statistics), Springer, 2010

**Mentor:** Slijepčević Siniša

## Utjecaj imunoterapije na smrtnost od raka i linearna regresija

**Područje:** Primijenjena statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The Impact of Immunotherapy to Cancer Mortality and Linear Regression

**Opis teme:** U radu će se obraditi osnove teorije višeparametarske linearne regresije i sličnih statističkih modela. Kao primjer primjene, obradit će se znanstveni rad u utjecaju imunoterapije na smanjenje smrtnosti od raka.

**Literatura:**

1. D. Horn, A. Alpert, M. Duggan i M. Jacobson, The Impact of Immunotherapy on Reduction in Cancer Mortality, preprint University of California, San Francisco (2025)
2. N. H. Bingham, J.M.Fry, Regression (Linear Models in Statistics), Springer, 2010

**Mentor:** Slijepčević Siniša

## Optimizacija marketinških akcija i linearna regresija

**Područje:** Primijenjena statistika

**Prikladno za studij:** Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Optimisation of marketing actions and linear regression

**Opis teme:** U radu će se obraditi osnove teorije višeparametarske linearne regresije i sličnih statističkih modela. Kao primjer primjene, obradit će se primjer optimizacije marketinških akcija ('marketing mix')

**Literatura:**

1. E. Mhitarean-Cuvsinov, Marketing Mix Modelling from multiple regression perspective, Master Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2017.
2. N. H. Bingham, J.M.Fry, Regression (Linear Models in Statistics), Springer, 2010

**Mentor:** Špalj Eva

## Trigonometrijske funkcije - Prijelaz s geometrijskih alata na funkcije

**Područje:** Geometrija. Matematička analiza. Metodika nastave matematike.

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The Trigonometric Functions - The transition from geometric tools to functions

**Opis teme:** Prema kurikulumu za nastavni predmet matematika u srednjoj školi trigonometrijske funkcije se uvode u trećem razredu. U prvom su razredu uvedeni trigonometrijski omjeri u pravokutnom trokutu, u drugome poučak o sinusima i poučak o kosinusu, odnosno sinus i kosinus kao alati za istraživanje kutova u trokutima. Prijelaz s geometrijskog alata na funkciju za učenike je često izazovan. U ovome diplomskom radu proučit će se i pokušati objasniti zašto učenici imaju problema s gore navedenim prijelazom, te predložiti pristupi koji bi pomogli razumijevanju trigonometrijskih funkcija.

### Literatura:

1. M. Jones, Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function, The Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 7(2), 2006
2. M. Anagnostou, Trigonometry in upper secondary school context: identities and functions, diplomski rad, Institut for naturfagens didaktik, Københavns Universitet, 2020.
3. N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec, Matematika 3, 1. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska Knjiga, Zagreb, 2008.
4. Anić, J., Antoliš, S. i dr., Matematika između realnog i virtualnog - Kurikulum fakultativne nastave matematike, Zagreb, XV. gimnazija, 2016.

**Mentor:** Špalj Eva

## Eksponencijalna i logaritamska funkcija u srednjoj školi

**Područje:** Matematička analiza. Metodika nastave matematike

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Exponential and logarithmic functions in secondary school

**Opis teme:** Prema kurikulumu za nastavni predmet matematika u srednjoj školi u drugom razredu srednje škole se obrađuje pojam funkcije, a eksponencijalna i logaritamska funkcija se uvode u trećem razredu. U ovom će se radu dati pregled matematičkih koncepata te istražiti načini uvođenja eksponencijalne i logaritamske funkcije. Istražit će se i poteškoće u razumijevanju ovih dviju funkcija i predložiti pristupi koji bi pomogli učenicima i nastavnicima. Brojnim primjerima primjene u drugim područjima kao što su biologija, ekonomija, forenzika i sl. osvijestit će se potreba za ovim funkcijama u stvarnome životu.

### Literatura:

1. M. Jones, Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function, The Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 7(2), 2006
2. N. Roguljić, A. Burazin Mišura, I. Baras, Eksponencijalna funkcija i njezine primjene u realnom životu, (<https://hrcak.srce.hr/112930>)
3. J. Gusić, P. Mladinić, B. Pavković, Matematika 2, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2006.
4. Anić, J., Antoliš, S. i dr., Matematika između realnog i virtualnog - Kurikulum fakultativne nastave matematike, Zagreb, XV. gimnazija, 2016.

**Mentor:** Tambača Josip

## Matematičko modeliranje pužnice

**Područje:** Matematičko modeliranje u biomedicini

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mathematical modeling of cochlea

**Opis teme:** U radu je potrebno formulirati model pužnice (dijela unutarnjeg uha) iz perspektive mehanike fluida. Nakon toga potrebno je formulirati numeričku metodu, izraditi simulacije, te rješenja usporediti s rezultatima iz literature.

**Literatura:**

- J. Keener, J. Sneyd, Mathematical physiology II: Systems Physiology, Springer, 2009.
- J. Keener, J. Sneyd, Mathematical physiology I: Cellular Physiology, Springer, 2009.
- L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology, SIAM, 2005.
- I. Aganović, Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma, Element, 2003.
- S. C. Brenner, L. R. Scott, The mathematical theory of finite element methods, Springer, 2007.

**Mentor:** Tambača Josip

## Optimizacija portfelja

**Područje:** Matematičko modeliranje

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Portfolio optimization

**Opis teme:** U radu je potrebno formulirati model optimizacije portfelja s financijske strane i napraviti simulacije kroz implementaciju neke numeričke metode uvjetne optimizacije, npr. proširene Lagrangeove metode.

**Literatura:**

Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 9th ed., 2014.

J.M. Martinez E.G.Birgin, Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization, SIAM, 2014.

Magnus R. Hestenes, Optimization Theory, The finite dimensional case, John Wiley and Sons, 1975.

**Mentor:** Valentić Ivana

## Teorija izleta za Wright–Fisherov i Moranov model

**Područje:** Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Markovljevi lanci, Statistički praktikum 1

**Naslov na engleskom:** Excursion theory for Wright–Fisher and Moran model

**Opis teme:** Wright–Fisherov model i Moranov model diskretni su slučajni procesi koji se koriste u genetici, gdje služe kao model za evolucija učestalosti genetske varijante, ili alela, u populaciji s nasumičnim razmnožavanjem. U ovom diplomskom radu proučavat će se izleti tih procesa iz rubnih stanja 0 i 1 te pomoću teorije izleta analizirat svojstva samih procesa. Također će se u sklopu rada napraviti simulacije s kojima će se ilustrirati teorijski dobiveni rezultati.

### Literatura:

1. Etheridge, A., Some Mathematical Models from Population Genetics: Ecole d’Ete de Probabilites de Saint-Flour XXXIX-2009, (2011)
2. Rogers LCG, Williams D. Diffusions, Markov Processes and Martingales. 2nd ed. Cambridge University Press; (2000)

**Mentor:** Valentić Ivana

## Granično ponašanje guljenja konveksnih ljuski

**Područje:** Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Slučajni procesi, Statistički praktikum 1

**Naslov na engleskom:** The limit behavior of convex hull peeling

**Opis teme:** Na jednodimenzionalnim podacima jednostavno je uvesti uređaj, sortiranjem od najmanje vrijednosti do najveće. Važna statistika tako uređenih podataka je medijan. U statistici se medijan često preferira u odnosu na aritmetičku sredinu, jer šum na njega ima manji utjecaj. U višedimenzionalnom slučaju ne postoji očiti kandidat za generalizaciju medijana. Guljenje konveksnih ljuski je predloženo kao rješenje tog problema. To je proces sortiranja skupa podataka u konveksne slojeve micanjem onih točaka koje se nalaze u vanjskoj ljusci, a medijan se definira kao centar posljednje konveksne ljuske. U radu [1] autori su pokazali da slojevi konveksnih ljuski slučajnog skupa točaka za velik broj točaka konvergiraju prema rješenju određene parcijalne diferencijalne jednačbe. U ovom diplomskom radu analizirat će se poseban slučaj tog limesa kada točke dolaze iz uniformne ili normalne distribucije.

### Literatura:

1. Jeff Calder, Charles K. Smart "The limit shape of convex hull peeling," Duke Mathematical Journal, Duke Math. J. 169(11), 2079-2124, (2020)
2. V. Barnett, The ordering of multivariate data, J. Roy. Statist. Soc. Ser. A 139, (1976)
3. Gauthier Quilan. Convex hull peeling. Probability [math.PR]. Normandie Université, (2022)

**Mentor:** Valentić Ivana

## Pronalaženje stršećih vrijednosti guljenjem konveksnih ljuski

**Područje:** Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Markovljevi lanci, Statistički praktikum 1

**Naslov na engleskom:** Outlier detection by convex hull peeling

**Opis teme:** Prvi korak u analizi podataka je identifikacija stršećih podataka. Postoji mnogo različitih definicija stršećih podataka ali ono što povezuje sve te definicije je da su to točke bez puno bliskih susjeda. Kao takve, stršeće točke imaju veliki utjecaj na oblik konveksne ljuske. Guljenje konveksnih ljuski je proces sortiranja skupa podataka u konveksne slojeve micanjem onih točaka koje se nalaze u vanjskoj ljusci. U ovom diplomskom radu implementirat će se, analizirati i usporediti algoritmi koji koriste guljenje konveksnih ljuski za identifikaciju stršećih podataka. Dobiveni algoritmi primijenit će se na burzovnim podacima za cijene dionica i financijskih derivata.

### Literatura:

1. Harsh, Archit & Ball, John & Wei, Pan, Onion-Peeling Outlier Detection in 2-D data Sets. 10.48550/arXiv.1803.04964. (2018)
2. V. Barnett, The ordering of multivariate data, J. Roy. Statist. Soc. Ser. A 139, (1976)
3. Sridhar, Vinesh & Svenning, Rolf, Fast Area-Weighted Peeling of Convex Hulls for Outlier Detection. 10.48550/arXiv.2410.04544. (2024)

**Mentor:** Valentić Ivana

## Algoritmi za guljenje konveksnih ljuski

**Područje:** Vjerojatnost

**Prikladno za studij:** Matematička statistika

**Preduvjeti:** Markovljevi lanci, Statistički praktikum 1

**Naslov na engleskom:** Convex hull peeling algorithms

**Opis teme:** Na jednodimenzionalnim podacima jednostavno je uvesti uređaj, sortiranjem od najmanje vrijednosti do najveće. Važna statistika tako uređenih podataka je medijan. U statistici se medijan često preferira u odnosu na aritmetičku sredinu, jer šum na njega ima manji utjecaj. U višedimenzionalnom slučaju ne postoji očiti kandidat za generalizaciju medijana. Guljenje konveksnih ljuski je predloženo kao rješenje tog problema. To je proces sortiranja skupa podataka u konveksne slojeve micanjem onih točaka koje se nalaze u vanjskoj ljusci, a medijan se definira kao centar posljednje konveksne ljuske. Optimalan algoritam za dobivanje konveksnih ljuski, pa onda i medijana, dan je u radu [1], ali taj algoritam zahtjeva da se cijeli skup podataka sortira u konveksne ljuske što je i vremenski i prostorno zahtjevno. U ovom diplomskom radu implementirat će se, analizirati i usporediti algoritme koji pokušavaju riješiti taj problem.

### Literatura:

1. B. Chazelle, On the convex layers of a planar set. IEEE Trans. Inf. Theor. 31, 4 (1985)
2. V. Barnett, The ordering of multivariate data, J. Roy. Statist. Soc. Ser. A 139, (1976)
3. Rufai, Raimi & Richards, Dana, A Simple Convex Layers Algorithm, (2017)
4. McDermott, James & Lin, Dennis, Quantile contours and multivariate density estimation for massive datasets via sequential convex hull peeling. IIE Transactions. 39. 581-591, (2007)

**Mentor:** Varošaneć Sanja

## Strategije poučavanja osnovnih geometrijskih teorema

**Područje:** geometrija, metodika

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Strategies for teaching basic geometrical theorems

**Opis teme:** Na osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj razini nastave obrađuje se nekoliko osnovnih teorema geometrije. To su tzv. teoremi s imenom, primjerice: teorem o transverzali paralelnih pravaca, teorem o zbroju kutova u trokutu, Talesov teorem o proporcionalnosti odsječaka, Pitagorin i Euklidov teorem i dr. Ciljevi rada su dati rigorozne dokaze spomenutih teorema, po mogućnosti nekoliko varijanti, te opisati kojim se strategijama služimo na nastavi pri uvođenju, otkrivanju i dokazivanju tih teorema.

### Literatura:

1. B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, 2, Zagreb, 1992.
2. A.S. Posamentier, H.H. Hartman, C. Kaiser, Tips for the Mathematics Teacher: Research-Based Strategies to Help Students Learn, Sage Publ. 1998.
3. udžbenici iz matematike za osnovnu i srednju školu

**Mentor:** Varošanec Sanja

## Primjene metode površine u planimetriji

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Applications of the area principle in planimetry

**Opis teme:** Bit metode površine jest da se u planimetrijskom zadatku površina izvjesnih objekata prikaže na dva načina, te se potom iz dobivene jednakosti dolazi do zaključaka koji na prvi pogled nisu upućivali na promatranje površine. Primjerice, teoremi koji se mogu dokazati ovom metodom su: teorem o simetralama unutarnjih kutova trokuta, Talesov teorem o proporcionalnosti stranica, Menelajev teorem i dr. U radu će se prikazati niz planimetrijskih teorema koji se mogu dokazati na ovaj način, a uz to svakoj tvrdnji dat će se i uobičajeni, klasični dokaz u kojem se ne rabi ta metoda.

### Literatura:

1. B. Grunbaum, G.S. Shephard, Ceva, Menelaus and the area principle, Math. Mag. 68 (1995), 254–268.
2. D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb.
3. B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, Male teme iz matematike, HMD, Zagreb, 1994.
4. Sh.A. Saipnazarov, J.K. Karimov, The use of the area in the solution problems, European science 10 (42)(2018), 51–55.

**Mentor:** Varošanec Sanja

## Obujam u nastavi matematike

**Područje:** geometrija, metodika

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Volume in mathematics teaching

**Opis teme:** U predmetnom se kurikulumu pojam volumena razvija postepeno: od izračunavanja volumena kvadra pomoću prebrojavanja jediničnih kockica, pa preko upotrebe Cavalijerijevog principa do računanja volumena složenih tijela. Ciljevi rada su: definirati funkciju volumen, detektirati mjesta u nastavnom programu gdje dolazi do uvođenja novih pojmova i metoda te konstruirati niz nastavnih aktivnosti koje podržavaju usvajanje gradiva vezanog uz volumen.

### Literatura:

1. B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, 2, Zagreb, 1992.
2. S. Varošanec, Obujam u nastavi matematike i šire, 11. stručno-metodički skup Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi, "Geometrija u nastavi matematike", 14.-16. 11. 2019. Pula, Zbornik radova, 49
3. udžbenici za osnovnu i srednju školu.

**Mentor:** Varošanec Sanja

## Formiranje pojma cijelog broja u nastavi matematike

**Područje:** metodika

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Formation of the concept of integers in mathematics teaching

**Opis teme:** S pojmom cijelog broja učenici se prvi put susreću u šestom razredu osnovne škole. U istom se razredu obrađuju i osnovne operacije sa cijelim brojevima. Postoji nekoliko pristupa koji olakšavaju usvajanje ovog novog matematičkog pojma. Cilj rada je opisati te pristupe te konstruirati niz nastavnih aktivnosti koje podržavaju usvajanje gradiva vezanog uz cijele brojeve. Dat će se i matematička definicija skupa cijelih brojeva.

### Literatura:

1. S. Kurepa, Uvod u matematiku, Zagreb
2. S. Varošanec, Izgradnja skupova  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{Q}$ , Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, No 5, HMD (Kraljevica), (1996), 123-129.
3. udžbenici za osnovnu i srednju školu.

**Mentor:** Varošaneć Sanja

## Trokuti čije stranice čine aritmetički niz

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Triangles with sides in arithmetic progression

**Opis teme:** U radu će se opisati svojstva koja imaju trokuti čije su duljine stranica tri uzastopna člana aritmetičkog niza te razmotriti pitanje postojanja takvih trokuta uz neki dodatni uvjet kao što je primjerice uvjet da je trokut pravokutan ili s cjelobrojnim stranicama ili da kutovi zadovoljavaju još neki uvjet.

### Literatura:

1. S. Abu-Saymeh, M. Hajja, Triangles whose sides form an arithmetic progression, The Mathematical Gazette, Volume 104, Issue 561, November 2020, pp. 469– 481.
2. Yu.N. Maltsev, A.S. Monastyreva, On Triangles with Sides that Form an Arithmetic Progression, Izvestia Altaiskog Gosud. Univ. (2000) DOI 10.14258/izvasu(2020)1-18.
3. K. Mikami, J. O'Hara and K. Sugawara, Triangles with sides in arithmetic progression, Elem. Math. 72 (2017) 75–79.
4. K. Zelator, Triangle angles and sides in progression and the diophantine equation  $x^2 + 3y^2 = z^2$ , Arxiv, 2008.
5. B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1,2, Zagreb, 1992.

**Mentor:** Varošaneć Sanja

## Heronovi trokuti

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Heron's triangles

**Opis teme:** Trokuti čije su duljine stranica i površina cijeli brojevi su čest objekt proučavanja. U radu će se iznijeti svojstva te klase trokuta, te načini generiranja familija Heronovih trokuta na temelju recentnih članaka tog područja.

### Literatura:

1. B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1,2, Zagreb, 1992.
2. K.R.S. Sastry, Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective, Forum Geometricorum, 1 (2001), 17–24.
3. K.R.S. Sastry, Heron triangles: a new perspective, Aust. Math. Soc. Gazette, 26 (1999) 160–168.
4. K.R.S. Sastry, Heron triangles: an incenter perspective, Math. Mag., 73 (2000) 388–392.
5. W. Wyss, Heron Angles, Heron Triangles, and Heron Parallelograms, Arxiv (2019).
6. P. Yiu, Isosceles triangles equal in perimeter and area, Missouri J. Math. Sci., 10 (1998) 106–111.

**Mentor:** Vondraček Zoran

## Lokalno vrijeme Brownovog gibanja

**Područje:** Slučajni procesi

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematička statistika

**Preduvjeti:** Slučajni procesi; Teorija vjerojatnosti

**Naslov na engleskom:** Brownian local time

**Opis teme:** Neka je  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  standardno jednodimenzionalno Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Poznato je da je za g.s.  $\omega \in \Omega$  skup  $N(\omega) := \{t \geq 0 : B_t(\omega) = 0\}$  Lebesgueove mjere nula. Drugim riječima, vrijeme koje tipična trajektorija Brownovog gibanja provede u ishodištu jednako je nula. Ipak, postoji neopadajući slučajni proces  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  koji na određen način mjeri vrijeme koje Brownovo gibanje provede u nuli. Takav proces zove se lokalno vrijeme Brownovog gibanja. Glavni cilj ovog diplomskog rada je konstruirati lokalno vrijeme i proučiti njegova svojstva.

### Literatura:

P.Mörters, Y.Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press 2010.

R.L.Schilling, L.Partzsch, *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*, De Gruyter 2012.

**Mentor:** Vondraček Zoran

## Jaka aproksimacija slučajne šetnje pomoću Brownovog gibanja

**Područje:** Slučajni procesi

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematička statistika

**Preduvjeti:** Slučajni procesi; Teorija vjerojatnosti

**Naslov na engleskom:** Strong approximation of random walk by Brownian motion

**Opis teme:** Neka je  $S_k := X_1 + \dots + X_k$  jednostavna slučajna šetnja,  $k \in \mathbb{N}$ , te  $S_t := S_{[t]} + ([t] - t)(S_{[t]+1} - S_{[t]})$ ,  $t \geq 0$ , pripadajuća linearna aproksimacija. Funkcionalni centralni granični teorem kaže da kad  $n \rightarrow \infty$ ,  $W_t^{(n)} := n^{-1/2}S_{nt}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , slabo konvergira u  $C([0, 1])$  prema Brownovom gibanju. Cilj ovog diplomskog rada je pomoću Skorohodovog ulaganja dokazati jaku aproksimaciju slučajne šetnje pomoću Brownovog gibanja (otkud slijedi konvergencija po distribuciji). Jaka aproksimacija će biti pokazana i u višedimenzionalnom slučaju.

### Literatura:

I.Karatzas, S.Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd.Ed., Springer 1991.  
G.F.Lawler, V.Limic, *Random Walk: A Modern Introduction*, Cambridge University Press 2010.  
R.L.Schilling, L.Partzsch, *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*, De Gruyter 2012.

**Mentor:** Vrdoljak Marko

## Robusnost i metoda potpornih vektora

**Područje:** Optimizacija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Uvod u optimizaciju

**Naslov na engleskom:** Robustness and Support Vector Machines

**Opis teme:** Metoda potpornih vektora klasificira podatke pronalaženjem hiperravnine koja maksimizira marginu između klasa. Za poboljšanje robusnosti protiv šuma, odstupanja ili nesigurnih podataka koriste se tehnike poput mekih margina, regularizacije i robusne optimizacije. Ovi pristupi osiguravaju da SVM ostane stabilan, čak i u prisutnosti nepotpunih ili izmijenjenih podataka.

### Literatura:

A. Ben-Tal, L. Ghaoui, A. Nemirovski, *Robust optimization*, Princeton University Press, 2009.

T. B. Trafalis, R. C. Gilbert: *Robust support vector machines for classification and computational issues*, *Optimisation Methods and Software* 22 (2007) 187–198

H. Xu, C. Caramanis, S. Mannor: *Robustness and Regularization of Support Vector Machines*, *Journal of Machine Learning Research* 10 (2009) 1485–1510

**Mentor:** Vrdoljak Marko

## Optimizacija i ravnoteža u prometnim mrežama

**Područje:** Optimizacija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Uvod u optimizaciju

**Naslov na engleskom:** Optimization and Equilibrium of Traffic Networks

**Opis teme:** Ravnotežni raspored prometa određuje kako se promet raspoređuje po cestovnoj mreži kada se putnici ponašaju u skladu s načelima ravnoteže, najčešće Wardropovim. Budući da zagušenje utječe na vrijeme putovanja, koriste se matematički modeli konveksne optimizacije poput Beckmannovog, varijacijskih nejednakosti te stohastičkih i dinamičkih pristupa. Ove metode omogućuju predviđanje prometnih obrazaca i planiranje učinkovitijih mreža.

### Literatura:

T. L. Friesz, D. Bernstein: *Foundations of Network Optimization and Games*, Springer, 2016.

A. Krylatov, V. Zakharov, T. Tuovinen: *Optimization Models and Methods for Equilibrium Traffic Assignment*, Springer, 2020.

M. Patriksson: *The Traffic Assignment Problem – Models and Methods*, Dover, 1994.

**Mentor:** Wagner Vanja

## Primjene Markovljevih lanaca u analiza slijeda klikova

**Područje:** Slučajni procesi, web analitika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Položeni kolegiji Slučajni procesi i Markovljevi lanci.

**Naslov na engleskom:** The application of Markov chains in the analysis of clickstream data

**Opis teme:** Analiza *clickstream* podataka bavi se proučavanjem slijeda klikova koje korisnici ostvaruju tijekom interakcije s web-stranicom ili aplikacijom. Takvi podaci omogućuju razumijevanje korisničkog ponašanja, optimizaciju navigacije i poboljšanje korisničkog iskustva putem modeliranja obrazaca kretanja i donošenja odluka. U ovom radu proučavat će se analiza *clickstream* podataka primjenom Markovljevih lanaca, s ciljem modeliranja i predviđanja korisničkog ponašanja na web-stranicama. Takav pristup omogućuje identifikaciju najčešćih putanja korisnika te procjenu vjerojatnosti prelaska između različitih stranica. Matematički teorijski okvir dodatno će se prezentirati primjenom na stvarnim i simuliranim podacima slijeda klikova korisnika, korištenjem paketa **clickstream** u programskom jeziku **R**.

### Literatura:

Scholz, M.: R Package clickstream: Analyzing Clickstream Data with Markov Chains, *Journal of Statistical Software*, 74(4):1-17, 2016.

**Mentor:** Wagner Vanja

## Neprekidni modeli financijskih tržišta s troškovima trgovanja

**Područje:** Matematičko modeliranje financijskih tržišta

**Prikladno za studij:** Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Continuous financial market models with trading costs

**Opis teme:** Tema rada je analiza nelinearnih proširenja klasičnog Black-Scholes-Mertonovog modela financijskog tržišta i vrednovanje opcija u takvim modelima. Posebni naglasak je na modele koji uključuju transakcijske troškove i nesigurnost u procjeni volatilnosti. Klasični Black-Scholes-Mertonov model pretpostavlja idealno tržište bez trenja (odnosno, transakcijskih troškova), konstantnu volatilnost i mogućnost kontinuiranog rebalansiranja portfelja. U stvarnosti, trgovanje je diskretno, uz prisutnost transakcijskih troškova i nesigurnosti u parametrima modela. Cilj rada bit će prikazati matematički model takvih tržišta, usporediti ga s klasičnim Black-Scholes-Mertonovim pristupom te analizirati strategije hedginga i formiranje cijena opcija. U tu svrhu će se razmotriti i numeričke metode rješavanja nelinearnih Black-Scholesovih jednadžbi te njihova primjenjivost u financijskoj praksi.

### Literatura:

Seydel, R.: *Tools for Computational Finance*, Springer, 2017.

Leland, H.E.: *Option Pricing and Replication with Transaction Costs*, The Journal of Finance, 40(5):1283-1301, 1985.

Barles, G., Soner H.M.: *Option Pricing with Transaction Costs and a Nonlinear Black-Scholes Equation*, Finance Stochast., 2:369–397, 1998.

Kabanov Y., Safarian M.: *Markets with Transaction Costs: Mathematical Theory*, Springer, 2009.