

**Teorija** (pišite svu teoriju na jedan papir):

1. Definirajte sljedeće pojmove i **navedite po dva primjera**:
  - (a) (1 bod) relacija logičke posljedice;
  - (b) (2 boda) dokaz u sistemu  $RS$ .
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) propozicija o kardinalnosti skupa svih formula logike sudova;
  - (b) (1 bod) tri svojstva konzistentnih skupova;
  - (c) (1 bod) Lindenbaumova lema.
3. (4 boda) Dokažite da je skup svih propozicionalnih varijabli potpun skup formula. Zatim, dokažite da skup svih teorema sistema  $RS$  nije potpun skup formula.

**Zadaci** (svaki po 4 boda; pišite svaki zadatak na poseban papir):

1. Za formulu  $F$  logike sudova, sa  $\#F$  označimo duljinu (broj pojava svih simbola, uključujući vanjske zagrade) od  $F$ , a sa  $\#_{\neg}F$  broj pojava simbola  $\neg$ . Dokažite indukcijom po izgradnji formula da za svaku formulu  $F$  vrijedi

$$\#F \equiv \#_{\neg}F \pmod{4}.$$

2. (a) Dokažite da je svaka savršena disjunktivna normalna forma ispunjiva.  
 (b) Odredite (ako postoji) savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu  $(P \rightarrow Q) \vee Q$ .
3. Neka su  $S$  i  $T$  skupovi formula takvi da za svaku interpretaciju  $I$  vrijedi točno jedno od:  $I(S) = 1$  ili  $I(T) = 1$ . Dokažite da su skupovi  $S$  i  $T$  konačno aksiomatizabilni.  
 (Uputa: primijenite teorem kompaktnosti na skup  $S \cup T$ .)
4. Primjenom glavnog testa nađite (ako postoji) interpretaciju pod kojom je istinita formula

$$\left( (P \wedge Q) \wedge \neg(P \rightarrow R) \right) \leftrightarrow (R \vee \neg Q).$$

5. Za skup formula  $S$ , sa  $[S]$  označavamo skup svih logičkih posljedica od  $S$ . Dokažite da uvijek vrijedi

$$\left[ [S] \right] = [S].$$