

Matematička logika – prvi kolokvij

2. prosinac 2020.

Teorija

- Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (1 bod) valjana formula logike sudova, te navedite primjere triju valjanih formula koje sadrže samo veznike \neg i \leftrightarrow ;
 - (1 bod) logički ekvivalentne formule, te navedite jedan par formula koje su logički ekvivalentne i jedan par formula koje nisu logički ekvivalentne;
 - (1 bod) izvod u sistemu RS , te navedite primjer skupa formula S i neke formule F tako da vrijedi $S \not\vdash_{RS} F$;
 - (1 bod) konzistentan skup formula logike sudova. te navedite tri primjera konzistentnih skupova formula.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) teorem o normalnim formama;
 - (1 bod) Craigova interpolacijska lema;
 - (1 bod) teorem potpunosti za sistem RS ;
- (4 boda) Dokažite da niti za jednu antitautologiju ne postoji savršena disjunktivna normalna forma.
- (4 boda) Za konzistentan skup S formula logike sudova kažemo da je maksimalno konzistentan ako ne postoji konzistentan skup formula S' koji je pravi nadskup od S . Neka je S maksimalno konzistentan skup formula. Dokažite da za svaku formulu F vrijedi: $F \in S$ ako i samo ako $\neg F \notin S$.

Zadaci (svaki po 4 boda)

- Neka je S skup svih formula složenosti barem 1 u kojima se od veznika pojavljuje samo \leftrightarrow . Dokažite da je \mathcal{I}_S jednočlan skup.
- Odredite jednu konjunktivnu normalnu formu za formulu

$$((P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow (P_3 \vee \neg P_2)) \wedge \neg(P_1 \rightarrow P_3) \wedge (\neg P_3 \vee P_3 \vee \neg P_5).$$

- Neka je S skup formula takav da postoji formula F sa svojstvom da za svaku interpretaciju I vrijedi $I(S) = 1$ ako i samo ako je $I(F) = 1$. Dokažite da postoji konačan podskup od S koji je skup aksioma za S .
- Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$((P \wedge Q) \leftrightarrow (R \vee \neg Q)) \wedge \neg(P \rightarrow R).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite interpretaciju koja to dokazuje.

- Ako je S nezavisan skup formula, dokažite da niti jedan pravi podskup od S nije potpun skup formula.