

Teorija (pišite svu teoriju na jedan papir):

1. Definirajte sljedeće pojmove:
 - (a) (1 bod) term neke teorije prvog reda;
 - (b) (2 boda) σ -struktura, te navedite jedan primjer σ -strukture;
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem adekvatnosti sistema prirodne dedukcije;
 - (b) (1 bod) Gödelov teorem potpunosti;
 - (c) (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku prvog reda.
3. (4 boda) Dokažite teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije.

Zadaci (svaki po 5 bodova; pišite svaki zadatak na poseban papir):

1. Dokažite da vrijedi

$$\{\neg(P \leftrightarrow Q), \neg P\} \vdash_{PD} Q.$$

2. Neka je F formula teorije prvog reda s jednakošću, signature $\sigma = \{=, <\}$. Neka su $\mathfrak{M} = (M, <)$ i $\mathfrak{N} = (N, \sqsubset)$ linearno uređeni skupovi, koje promatramo kao normalne σ -strukture, te $f : M \rightarrow N$ sličnost. Dokažite (indukcijom po izgradnji formule F) da za svaku valuaciju v s kodomenom M vrijedi

$$\mathfrak{M} \models_v F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models_{f \circ v} F.$$

3. Glavnim testom za logiku prvog reda ispitajte je li formula

$$\forall x \left(P(x) \wedge \exists y \left(P(y) \rightarrow \neg P(x) \right) \right)$$

ispunjiva.

4. Dokažite da ne postoji konačan, ali postoji beskonačan, model za skup formula

$$\left\{ \left(R(x, y) \wedge R(y, z) \right) \rightarrow R(x, z), R(x, z) \rightarrow \left(R(x, y) \vee R(y, z) \right), \neg \forall x \left(R(x, y) \rightarrow R(y, x) \right) \right\}.$$