

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

1. Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:

- (a) (2 boda) Neka je  $\sigma = \{R_1^1, R_2^1, R_1^2, F_1^1, c_1, c_2\}$ . Napišite tri primjera  $\sigma$ -terma i tri primjera  $\sigma$ -formula
- (b) (1 bod)  $\sigma$ -struktura i  $\sigma$ -interpretacija
- (c) (1 bod) dokaz i teorem u nekoj teoriji prvog reda.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

- (a) (1 bod) teorem adekvatnosti za sistem  $PD$
- (b) (1 bod) Gödelov teorem potpunosti
- (c) (1 bod) Churchov teorem.

3. (4 boda) Neka je  $S$  skup formula i  $F$  neka formula logike sudova tako da vrijedi  $S \not\vdash_{PD} F$ . Dokažite da je skup  $S \cup \{\neg F\}$  konzistentan u sistemu  $PD$ .

4. (4 boda) Neka je  $T$  neka konzistentna teorija prvog reda, te  $S$  maksimalno konzistentan skup formula (tj. skup  $S$  je konzistentan u teoriji  $T$  te ne postoji pravi nadskup od  $S$  koji je konzistentan). Dokažite da za svaku formule  $F$  vrijedi:  $S \vdash_T F$  ako i samo ako  $F \in S$ .

**Zadaci**

1. (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

$$\neg R \leftrightarrow (Q \wedge (P \rightarrow R)) \vdash R \leftrightarrow (\neg Q \vee (P \wedge \neg R))$$

2. (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y \left( (R(x, y) \leftrightarrow P(y, x)) \wedge (\forall z (Q(z) \rightarrow R(z, y))) \right) \vee (\forall x R(x, x) \rightarrow \exists y Q(y))$$

. Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

3. (5 bodova) Dokažite da je formula

$$\forall x \forall y \forall z \left( \exists w \neg R(w, x) \wedge R(x, x) \wedge (\neg R(x, y) \rightarrow (\neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z))) \right) \wedge \exists x \forall y R(x, y)$$

ispunjiva te da je svaka  $\{R\}$ -strukture koja to dokazuje beskonačna.

4. (4 boda) Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka je  $S$  ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako je  $G$  zatvorena formula takva da  $S \models G \rightarrow F_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S$  ima konačan normalan model kardinalnosti barem  $n$ .
- b) Ako  $S$  ima konačan normalan model kardinalnosti barem  $n$  za neki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tada skup  $S \cup \left\{ \bigwedge_{i \in I} F_i : I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}$  ima konačan normalan model.