

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

1. Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
  - (a) (1 bod) definirajte pojam stabla i navedite jedan primjer označenog stabla
  - (b) (1 bod) navedite elemente signature  $\sigma_{PA}$  te navedite vrstu i mjesnost svakog simbola
  - (c) (1 bod) ispunjiva formula logike prvog reda te navedite tri primjera formula koje nisu ispunjive
  - (d) (1 bod) nelogički aksiom neke teorije prvog reda, te navedite dva nelogička aksioma Peanove aritmetike.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda
  - (b) (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku prvog reda
  - (c) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem ”na dolje”.
3. (4 boda) Dokažite teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije.
4. (4 boda) Dokažite teorem kompaktnosti za logiku prvog reda.

**Zadaci**

1. (6 bodova) U sistemu prirodne dedukcije izvedite

$$\vdash \left( (R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \right) \leftrightarrow \left( (\neg(R \wedge Q) \rightarrow \neg P) \wedge (\neg(R \wedge Q) \rightarrow R) \right)$$

2. (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y (\exists z \neg Q(z, y) \leftrightarrow \exists z P(x, z)) \vee \forall x (\neg R(x, x) \vee P(x, x))$$

. Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

3. (5 bodova) Dokažite da formula  $\forall x \forall y R(x, y)$  nije logička posljedica skupa

$$S = \{ (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, z), R(x, x), \neg R(x, y) \rightarrow \exists z \neg R(y, z) \}$$

te da je svaka  $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

4. (4 boda) Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka je  $S$  skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji struktura  $\mathfrak{M}_n$  takva da  $\mathfrak{M}_n \models S$  i  $\mathfrak{M}_n \models F_k$  za neki  $k \geq n$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.
- b) Ako za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji struktura  $\mathfrak{M}_n$  takva da  $\mathfrak{M}_n \models S$  i  $\mathfrak{M}_n \models F_k$  za neki  $k \leq n$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.