

Matematička logika – drugi kolokvij 4. veljače 2015.

Teorija (sve na jedan papir):

1. Definirajte sljedeće pojmove:
 - (a) (1 bod) term slobodan za varijablu u formuli;
 - (b) (1 bod) σ -struktura;
 - (c) (1 bod) relacija logičke posljedice u logici prvog reda;
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem adekvatnosti sistema prirodne dedukcije;
 - (b) (1 bod) Gödelov teorem potpunosti;
 - (c) (1 bod) Churchov teorem.
3. (4 boda) Dokažite da je svaka sudovno valjana formula ujedno i valjana.

Zadaci (na odvojene papire; svaki po 5 bodova):

1. U sustavu prirodne dedukcije izvedite formulu Q iz formule

$$\left(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \right) \rightarrow Q.$$

2. Neka su A i B skupovi formula logike sudova. Izrazite $\mathcal{I}_{A \cup B}$ pomoću \mathcal{I}_A i \mathcal{I}_B . Pomoću toga odgovorite: mora li nužno unija dva konačno aksiomatizabilna skupa također biti konačno aksiomatizabilna?
3. Primjenom glavnog testa za logiku prvog reda ispitaite je li formula $\exists x \exists y R(x, y)$ logička posljedica skupa formula

$$\left\{ \exists x \forall y \neg R(x, y) \vee \neg \forall x P(x), \forall y \exists x R(y, x) \rightarrow \exists x R(x, x), \forall x P(x) \right\}.$$

Ako nije, nađite neku strukturu koja to pokazuje.

4. Dokažite da formula

$$\exists x \exists y \exists z \left(R(x, y) \wedge \neg R(x, z) \wedge R(y, z) \right)$$

nije logička posljedica formule

$$\exists y \neg \left(R(x, y) \rightarrow R(y, x) \right),$$

ali je svaka struktura koja to pokazuje beskonačna.