

## Drugi kolokvij – Matematička logika 3. veljače 2016.

**Teorija** (sve na jedan papir):

1. Definirajte sljedeće pojmove:
  - (a) (1 bod) stablo i označno stablo;
  - (b) (1 bod) konzistentna teorija prvog reda;
  - (c) (1 bod) relacija logičke posljedice u logici prvog reda;
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije;
  - (b) (1 bod) Lindenbaumova lema za teorije prvog reda;
  - (c) (1 bod) navedite barem tri svojstva konzistentnih skupova u nekoj teoriji prvog reda.
3. (4 boda) Dokažite teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije.

**Zadaci** (na odvojene papire; svaki po 5 bodova):

1. U sustavu prirodne dedukcije izvedite

$$P \leftrightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \vee Q .$$

2. Neka su  $A$  i  $B$  nedisjunktni skupovi formula logike sudova. Usporedite skupove

$$\mathcal{I}_{A \cap B} \quad \text{ i } \quad \mathcal{I}_A \cup \mathcal{I}_B :$$

navedite dokaze odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.

3. Primjenom glavnog testa za logiku prvog reda ispitajte vrijedi li

$$\exists x \left( \left( \exists y R(x, y) \leftrightarrow \forall z P(x, z) \right) \vee P(x, x) \right) \models \forall x \forall y \exists z \left( R(x, y) \rightarrow P(x, z) \right) ,$$

te ako ne vrijedi, navedite jednu strukturu prvog reda koja to pokazuje.

4. Neka je  $R$  dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je najmanji broj elemenata u strukturi koja pokazuje da formula

$$\exists x \forall y \left( \left( R(x, y) \rightarrow R(y, x) \right) \vee \left( R(x, x) \leftrightarrow R(y, y) \right) \right)$$

nije valjana, jednak 4.