

Teorija (sve na jedan papir):

1. Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (2 boda) izvod u sistemu prirodne dedukcije;
 - (b) (1 bod) σ -term, te navedite tri primjera;
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem potpunosti za sistem PD ;
 - (b) (2 boda) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda, te definirajte sve pojmove koji se spominju u teoremu.
3. (4 boda) Za proizvoljnu formulu F logike prvog reda označimo sa σ_F skup svih nelogičkih simbola koji se javljaju u formuli F . Neka je A ispunjiva i B oboriva formula logike prvog reda, pri čemu je formula $A \rightarrow B$ sudovno valjana. Dokažite da postoji formula C tako da vrijedi $\vdash_{RP} A \rightarrow C$ i $\vdash_{RP} C \rightarrow B$, te $\sigma_C \subseteq \sigma_A \cap \sigma_B$.

Zadaci (svaki po 5 bodova):

1. U sustavu prirodne dedukcije izvedite

$$P \vee \neg Q \vdash P \leftrightarrow (P \vee Q).$$

2. Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x(\exists y R(x, y) \rightarrow \exists y P(y, x)) \rightarrow \forall x \exists y (\neg R(x, y) \vee P(y, x)).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite jednu strukturu koja nije njen model.

3. Dokažite da je skup formula prvog reda

$$\left\{ (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \rightarrow \left(\neg R(y, x) \wedge \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)) \right), \exists x \exists y R(x, y) \right\}$$

ispunjiv te da je svaki model koji to pokazuje beskonačan.

4. Neka je F zatvorena formula. Neka su $\{G_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ i S skupovi zatvorenih formula logike prvog reda takvi da za svaki model \mathfrak{M} od S postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \models F \rightarrow G_k$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{i_1, \dots, i_n\}$ od \mathbf{N} tako da vrijedi

$$S \models F \rightarrow (G_{i_1} \vee \dots \vee G_{i_n}).$$