

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

1. Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
  - (a) (1 bod) teorem sistema  $PD$ , te navedite dva primjera teorema sistema  $PD$
  - (b) (1 bod) alfabet logike prvog reda
  - (c) (1 bod) nelogički aksiom neke teorije prvog reda, te navedite dva nelogička aksioma Zermelo–Fraenkelove teorije skupova.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem  $PD$
  - (b) (2 boda) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda, te definirajte sve pojmove koji se spominju u teoremu
  - (c) (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku prvog reda.
3. (4 boda) Dokažite teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije za logiku sudova.
4. (4 boda) Dokažite da je svaka instanca sheme aksioma  $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$ , gdje formula  $A$  ne sadrži slobodnih nastupa varijable  $x$ , valjana formula.

**Zadaci (svaki po 5 bodova)**

1. U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

- (a)  $P \vee (\neg P \wedge Q) \vdash \neg Q \rightarrow P$
- (b)  $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

2. Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$(\exists x P(x) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)) \rightarrow \forall z \forall x \exists y (R(z, y) \vee \neg P(x)).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

3. Dokažite da formula  $\exists x \forall y \neg R(y, x)$  nije logička posljedica skupa

$$\{R(x, z) \rightarrow (R(x, y) \vee R(y, z)), R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)\},$$

te da je svaka  $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

4. Za svaku od sljedećih ekvivalencija dokažite ili opovrgnite postojanje skupa  $\sigma$ -formula  $S$  koji ju zadovoljava.

- (a) Normalna  $\sigma$ -struktura  $\mathfrak{M}$  je model za  $S$  ako i samo ako je  $\mathfrak{M}$  beskonačna.
- (b) Normalna  $\sigma$ -struktura  $\mathfrak{M}$  je model za  $S$  ako i samo ako je  $\mathfrak{M}$  konačna.