

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

- Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
  - (1 bod) alfabet logike prvog reda
  - (1 bod) konzistentna teorija prvog reda
  - (2 boda)  $\sigma$ -interpretacija i dva primjera  $\sigma$ -strukture ako je  $\sigma = \{R^1, f^1, g^1\}$ .
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (1 bod) teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije logike sudova
  - (1 bod) lema o proširenju valuacije na skup svih terma
  - (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi.
- (4 boda) Dokažite da za sve formule  $A$  i  $B$  logike sudova, pri čemu je  $A$  ispunjiva i  $B$  oboriva formula, te takve da vrijedi  $\vdash_{PD} A \rightarrow B$ , postoji formula  $C$  tako da vrijedi  $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$  te  $\vdash_{PD} A \rightarrow C$  i  $\vdash_{PD} C \rightarrow B$ . Ne morate dokazivati Craigovu interpolacijsku lemu.
- (4 boda) Neka je  $A$  neka formula logike prvog reda, a  $B$  zatvorena formula. Dokažite da je tada formula  $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow B)$  valjana.

**Zadaci**

- (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
  - $\vdash ((P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (\neg R \rightarrow P)$
  - $\neg(P \rightarrow R) \vee Q \vdash (P \rightarrow \neg R) \vee (Q \vee \neg P)$
- (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$(\exists x(P(x) \wedge R(x, x)) \vee \exists x \exists y R(x, y)) \rightarrow \forall z \forall y \exists x (P(x) \rightarrow R(y, z))$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- (5 bodova) Dokažite da formula  $\exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$  nije logička posljedica skupa

$$\{\exists x \exists y R(x, y), R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)), (\neg R(x, z) \wedge R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, y)\}$$

te da je svaka  $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

- (4 boda)

- Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$  i neka je  $S$  skup formula logike prvog reda takav da skup  $S \cup \{F_n\}$  ima model,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dokažite da  $S$  ima beskonačan model.
- Neka su  $\mathfrak{M}$  i  $\mathfrak{N}$  normalne  $\sigma$ -strukture takve da za svaku zatvorenu  $\sigma$ -formulu  $F$  vrijedi:  $\mathfrak{M} \models F$  ako i samo ako  $\mathfrak{N} \models F$ . Ako je  $kard(\mathfrak{M}) = m$ , za neki  $m \in \mathbb{N}$ , dokažite da je  $kard(\mathfrak{N}) \geq m$ .