

Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)

1. Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (2 boda) stablo i označeno stablo te navedite jedan primjer označenog stabla
 - (b) (1 bod) skup nelogičkih simbola neke teorije prvog reda
 - (c) (1 bod) izvod u nekoj teoriji prvog reda.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije
 - (b) (1 bod) lema o proširenju valuacije na skup svih terma
 - (c) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda.
3. (4 boda) Dokažite teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije.
4. (4 boda) Dokažite da je svaka sudovno valjana formula logike prvog reda nužno valjana.

Zadaci

1. (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 - (a) $\{P \leftrightarrow Q, (P \wedge R) \vee \neg Q\} \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$;
 - (b) $P \rightarrow (Q \wedge R) \vdash (Q \rightarrow R) \vee \neg(P \vee R)$.
2. (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\exists x \forall y \forall z (R(x, y) \vee \forall w P(z, w)) \rightarrow \forall x (Q(x) \rightarrow (\exists z P(z, x) \vee \exists y \exists w R(y, w))).$$

Ako formula nije valjana, navedite neku strukturu koja nije njen model.

3. (6 bodova) Dokažite da je formula

$$\forall x \exists y \forall z (R(x, y) \wedge \neg R(x, x) \wedge \neg(R(x, z) \wedge R(z, y))) \rightarrow \exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(x, z))$$

istinita na svim konačnim $\{R\}$ -strukturama te da nije valjana.

4. (3 boda) Postoji li σ -formula F sa svojstvom da za svaku normalnu σ -strukturu \mathfrak{M} vrijedi:

\mathfrak{M} je model za F ako i samo ako je \mathfrak{M} beskonačna.

Sve svoje tvrdnje dokažite.