

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

- Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
  - (2 boda) stablo i označeno stablo te navedite jedan primjer označenog stabla
  - (2 boda) navedite elemente signature Zermelo–Fraenkelove teorije skupova te navedite vrstu i mjesnost svakog simbola.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (1 bod) lema o proširenju valuacije na skup svih terma
  - (1 bod) tri svojstva konzistentnih skupova u nekoj teoriji prvog reda
  - (1 bod) Gödelov teorem potpunosti.
- (4 boda) Dokažite teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije za logiku sudova.
- (4 boda) Neka je  $T$  neka teorija prvog reda. Neka je  $S$  konzistentan skup formula u teoriji  $T$  te neka je  $F$  zatvorena formula za koju vrijedi  $S \vdash_T F$ . Dokažite da je tada skup formula  $S \cup \{F\}$  konzistentan u teoriji  $T$ .

**Zadaci**

- (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
  - $\{\neg Q \rightarrow \neg S, \neg(Q \vee R), P \rightarrow (S \vee R)\} \vdash \neg P$
  - $\vdash (R \rightarrow (P \leftrightarrow Q)) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R))$
- (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\exists x \exists y \forall z \left( R(x, z) \leftrightarrow (P(z) \vee R(y, x)) \right) \rightarrow (\exists x R(x, x) \vee \exists x P(x)).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- (5 bodova) Dokažite da je skup formula
 
$$S = \{\exists x \exists y R(x, y), (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x), \exists z (R(x, y) \rightarrow R(y, z))\}$$
 ispunjiv te da je svaka  $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.
- (4 boda) Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka je  $S$  ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:
  - Ako za svaki  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $m \geq n$ , postoji normalna struktura  $\mathfrak{M}$  takva da  $\mathfrak{M} \models S$  i  $\mathfrak{M} \models F_m \rightarrow F_n$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.
  - Neka je  $G_1 \equiv F_1$  te neka je  $G_{n+1} \equiv G_n \rightarrow F_{n+1}$  za  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Ako  $S \cup \{G_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  ima normalan model, tada  $S$  ima beskonačan normalan model.