

Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)

- Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
 - (2 boda) teorem sistema PD te navedite dva primjera teorema sistemna PD
 - (2 boda) σ -struktura te navedite jedan primjer σ -strukture.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) teorem adekvatnosti za sistem PD
 - (2 boda) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda te definirajte sve pojmove koji se spominju u teoremu.
- (4 boda) Neka je S skup formula i F neka formula logike sudova tako da vrijedi $S \vdash_{PD} F$ i skup S je konzistentan u sistemu PD . Dokažite da je skup $S \cup \{F\}$ konzistentan u sistemu PD .
- (4 boda) Dokažite da je svaka sudovno valjana formula logike prvog reda nužno valjana.

Zadaci

- (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 - $(Q \rightarrow R) \rightarrow P, Q \rightarrow P \vdash P$
 - $P \vee ((Q \rightarrow \neg R) \wedge R) \vdash ((Q \wedge R) \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow R)$
- (5 bodova) Glavnim testom ispitaajte valjanost formule

$$\forall x \forall y \exists z (P(y) \leftrightarrow (R(x, x) \vee P(z))) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x)).$$

- (5 bodova) Dokažite da je skup formula

$$S = \{\exists x \exists y \neg R(x, y), \neg R(x, y) \rightarrow \exists z (\neg R(x, z) \wedge \neg R(z, y)), R(x, z) \rightarrow (R(x, y) \vee R(y, z)), R(x, x)\}$$

ispunjiv te da je svaka $\{R\}$ -strukture koja to dokazuje beskonačna.

- (4 bodova) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- Za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m \geq n$ vrijedi: ako $S \models F_m \leftrightarrow F_n$, tada je svaki model za S kardinalnosti barem m .
- Ako je $S \cup \{\bigwedge_{i \in I} F_i\}$ ispunjiv za svaki konačan $I \subseteq \mathbb{N}$, tada S ima beskonačan normalan model.