

**Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)**

- Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
  - (2 boda) Izvod u sistemu  $PD$
  - (1 bod) Neka je  $\sigma = \{R^2, f^1, f^2\}$ . Navedite tri  $\sigma$ -terma čija je duljina veća od 1.
  - (1 bod) Valuacija te navedite primjer valuacije  $v$  i dvije pripadne različite valuacije  $v_x$ .
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (1 bod) teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije
  - (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje"
  - (1 bod) Churchov teorem.
- (4 boda) Dokažite da za sve formule  $A$  i  $B$  logike sudova, pri čemu je je svaki od skupova formula  $\{A\}$  i  $\{\neg B\}$  konzistentan u sistemu  $PD$ , te takve da vrijedi  $\vdash_{PD} A \rightarrow B$ , postoji formula  $C$  tako da vrijedi  $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$  te  $\vdash_{PD} A \rightarrow C$  i  $\vdash_{PD} C \rightarrow B$ .
- (4 boda) Dokažite da je svaka sudovna valjana formula logike prvog reda teorem sistema  $RP$ .

**Zadaci**

- (6 bodova)
  - $(\neg P \vee \neg Q) \vee R \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$
  - $\vdash (\neg Q \rightarrow P) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow P)$
- (5 bodova) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\exists x \forall y \left( \forall z P(y, z) \wedge (\neg Q(x) \leftrightarrow R(y, x)) \right) \rightarrow \forall x \exists y \left( (R(y, x) \vee P(x, y)) \vee \neg Q(y) \right).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, R, Q\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- (5 bodova) Dokažite da je formula

$$\forall x \forall x \forall z \left( (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, z) \right) \rightarrow \exists x (\forall y R(y, x) \vee \neg R(x, x))$$

istinita na svim konačnim  $\{R\}$ -strukturama te da nije valjana.

- (4 bodova) Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka je  $S$  ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- Ako je  $G$  zatvorena formula logike prvog reda takva da  $S \not\models G \rightarrow \neg F_{3n}$  za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.
- Ako je  $G$  zatvorena formula logike prvog reda takva da za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  vrijedi  $S \models G \rightarrow F_{3n}$ , tada je svaki model za  $S$  kardinalnosti  $3k$  za neki  $k \in \mathbb{N}$ .