

Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)

- Definirajte sljedeće pojmove i navedite primjere gdje se traži:
 - (2 boda) navedite primjer teorema u sistemu PD te primjer tri formule koje nisu teoremi sistema PD
 - (1 bod) skup nelogičkih simbola neke teorije prvog reda
 - (1 bod) teorem neke teorije prvog reda.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) teorem dedukcije za sistem prirodne dedukcije
 - (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi
 - (1 bod) Lindenbaumova lema za teorije prvog reda.
- (4 boda) Dokažite da je svaki ispunjiv skup formula konzistentan u sistemu PD .
- (4 boda) Neka je A neka formula logike prvog reda, a B zatvorena formula. Dokažite da je tada formula $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow B)$ valjana.

Zadaci

- (6 bodova) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 - $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash (\neg P \vee \neg Q) \vee R$
 - $\vdash (R \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(\neg(P \rightarrow R) \vee (P \wedge Q))$
- (5 bodova) Glavnim testom ispitaajte valjanost formule

$$\exists x \forall y \left(R(y, x) \wedge \forall z (P(z) \vee \neg Q(x, z)) \right) \rightarrow \forall x \exists y \left(P(y) \vee (\neg Q(x, y) \vee R(x, y)) \right).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, R, Q\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- (5 bodova) Dokažite da formula $\exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(x, z))$ nije logička posljedica skupa

$$S = \{\neg R(x, y) \vee \neg R(y, x), \exists y R(x, y)\}$$

te da je svaka $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

- (4 boda) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \models F_{2n+1}$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji model za S kardinalnosti $2n + 1$.
- Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji normalna struktura $\mathfrak{M}$ takva da $\mathfrak{M} \models S$ i $\mathfrak{M} \models F_{2n+1}$, tada S ima beskonačan normalan model.