

Teorija:

1. Definirajte sljedeće pojmove:
  - (a) (1 bod) stablo
  - (b) (2 boda) istinitost formule za  $\sigma$ -interpretaciju
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi
  - (b) (1 bod) Gödelov teorem potpunosti
  - (c) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem ”na gore”
3. (4 boda) Dokažite da za sve formule  $A$  i  $B$  logike sudova, pri čemu je  $A$  ispunjiva i  $B$  oboriva formula, te takve da vrijedi  $\vdash_{PD} A \rightarrow B$ , postoji formula  $C$  tako da vrijedi  $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$ , te  $\vdash_{PD} A \rightarrow C$  i  $\vdash_{PD} C \rightarrow B$ .

Zadaci:

1. U sustavu prirodne dedukcije odredite sljedeće izvode:
  - (a)  $P, Q \vdash P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ ;
  - (b)  $P \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \wedge Q$ .
2. Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule
 
$$\exists x \forall y (\exists z P(z, z) \rightarrow (R(x, y) \rightarrow P(x, y))) \rightarrow \forall x \forall y ((R(x, y) \rightarrow \forall z P(x, z)) \vee \forall z (R(z, y) \leftrightarrow P(y, y))).$$

Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.
3. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule
 
$$((\forall x \forall y (Q(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow \exists x \exists z (P(x, x) \vee R(z, z))) \rightarrow (\neg \exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall z Q(z))) \wedge \exists x (P(x, x) \vee \neg Q(x)).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.
4. Dokažite da formula  $\exists x Rxx$  nije logička posljedica od  $\forall x \exists y Rxy$  i  $(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz$ , ali to ne možemo pokazati glavnim testom. (Uputa: dokažite da struktura koja to pokazuje mora biti beskonačna.)