

Teorija:

1. Definirajte sljedeće pojmove:
 - (a) (1 bod) formula logike prvog reda
 - (b) (2 boda) istinitost formule F za σ -interpretaciju (\mathfrak{M}, v)
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije
 - (b) (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda
 - (c) (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku prvog reda
3. (4 boda) Dokažite teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije.

Zadaci:

1. U sustavu prirodne dedukcije napišite izvod

$$P \leftrightarrow Q, \neg P \rightarrow Q \vdash P \wedge Q .$$

2. Neka su S i T dva skupa formula, takva da vrijedi $\mathcal{I}_S = \mathcal{I}_T^c$ (s obzirom na skup svih interpretacija). Dokažite da su S i T konačno aksiomatizabilni.
3. Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule

$$\exists x(\neg P(x, x) \rightarrow (\exists y R(x, y) \leftrightarrow \forall z P(x, z))) \rightarrow \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow P(y, y)).$$

Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.

4. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x \exists y ((R(x, y) \rightarrow P(x, y)) \rightarrow \forall z P(z, z)) \wedge \neg (\forall x \forall y ((R(x, y) \vee \exists z P(x, z)) \vee \forall z (R(z, y) \rightarrow P(y, y)))).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.