

Teorija (sve na jedan papir)

- Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (2 boda) σ -struktura, te navedite tri primjera σ -struktura ako je $\sigma = \{R^2, f^1\}$;
 - (1 bod) relacija logičke posljedice u logici prvog reda.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) teorem adekvatnosti sistema prirodne dedukcije;
 - (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda;
 - (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje".
- (4 boda) Neka je T neka konzistentna teorija prvog reda, te S maksimalno konzistentan skup formula (tj. skup S je konzistentan u teoriji T , te ne postoji pravi nadskup od S koji je konzistentan). Dokažite da za sve formule F vrijedi: $S \vdash_T F$ ako i samo ako $F \in S$.

Zadaci (svaki po 5 bodova):

- U sustavu prirodne dedukcije izvedite
 - $P \vee (Q \wedge R) \vdash (\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$,
 - $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$.
- Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x(P(x, x) \vee \neg Q(x)) \wedge \left((\forall x Q(x) \rightarrow \exists x P(x, x)) \rightarrow (\neg \exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x Q(x)) \right).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

- Ako je \mathfrak{M} konačan model za skup formula

$$T = \{\forall x \neg R(x, x), \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow z = y))\}$$

dokažite da je $|\mathfrak{M}|$ paran. Nadalje dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji model za T kardinalnosti $2n$.

- Neka je S skup formula logike prvog reda te za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je

$$F_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right).$$

Dokažite:

- Skup $S \cup \{F_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ je ispunjiv ako i samo ako za svaki $m \in \mathbb{N}$ skup S ima model kardinalnosti barem m .
- Ako za svaki $m \in \mathbb{N}$ skup S ima model kardinalnosti barem m , tada S ima beskonačan model.