

Napomena: Detaljno dokažite sve svoje tvrdnje. Tvrdnje s predavanja nije potrebno dokazivati.

1. a) (5b) Neka su I, J interpretacije takve da $I(P) = J(P)$ za svaku propozicionalnu varijablu P . Dokažite da je $I(F) = J(F)$ za svaku formulu logike sudova F .
b) (5b) Navedite skup formula logike sudova koji je ispunjiv i oboriv. Navedite beskonačan skup formula logike sudova koji je ispunjiv i nije oboriv. Navedite skup formula logike sudova koji nije ni ispunjiv ni oboriv. Dokažite da navedeni skupovi zadovoljavaju tražena svojstva.
c) (5b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu $(Q \vee P) \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$
2. a) (5b) Neka F formula logike sudova te S skup formula logike sudova sa svojstvom da za svaku interpretaciju $I \in \mathcal{I}_F$ vrijedi $I(S) \neq 1$, a za svaku interpretaciju $J \notin \mathcal{I}_F$ vrijedi $J(S) \neq 0$. Dokažite da postoji konačan podskup od S koji ima isto svojstvo. Skup \mathcal{I}_F definiramo kao skup svih interpretacija I za koje je $I(F) = 1$.
b) (10b) Neka je S maksimalno konzistentan skup logike sudova u odnosu na sustav RS . Dokažite da S nije konačno aksiomatizabilan.
c) (5b) Dokažite da je skup svih propozicionalnih varijabli nezavisan. Dokažite da skup $\{P_i \leftrightarrow P_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ nije nezavisan i nije potpun.
3. (10b) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

$$\vdash \left((R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \right) \leftrightarrow \left((\neg(R \wedge Q) \rightarrow \neg P) \wedge (\neg(R \wedge Q) \rightarrow R) \right)$$

4. a) (5b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y (\exists z \neg Q(z, y) \wedge \exists z P(x, z)) \vee \forall x \neg R(x, x)$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- b) (10b) Dokažite da formula $\forall x \forall y R(x, y)$ nije logička posljedica skupa

$$S = \{ (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, z), R(x, x), \neg R(x, y) \rightarrow \exists z \neg R(y, z) \}$$

te da je svaka $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

5. (10b) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji struktura \mathfrak{M}_n takva da $\mathfrak{M}_n \models S$ i $\mathfrak{M}_n \models F_k$ za neki $k \geq n$, tada S ima beskonačan normalan model.
- b) Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji struktura \mathfrak{M}_n takva da $\mathfrak{M}_n \models S$ i $\mathfrak{M}_n \models F_k$ za neki $k \leq n$, tada S ima beskonačan normalan model.