

Napomena: Detaljno dokažite sve svoje tvrdnje. Tvrdnje s predavanja nije potrebno dokazivati.

1. a) (5b) Neka je F formula logike sudova. Označimo s a broj pojava propozicionalnih varijabli u F te s b broj pojava veznika $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ u F . Dokažite da je $a = b + 1$.
 b) (7b) Dokažite da je skup svih propozicionalnih varijabli potpun skup. Navedite skup formula logike sudova koji nije potpun. Navedite konačan skup formula logike sudova koji je potpun i nije nezavisan. Navedite skup koji je potpun i nezavisan. Dokažite da navedeni skupovi imaju tražena svojstva.
 c) (5b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu $(P \vee (\neg R \rightarrow Q)) \leftrightarrow (\neg R \wedge P)$
2. a) (7b) Neka je \mathcal{O} familija oborivih skupova formula koja je zatvorena na unije (unija svaka dva elementa od \mathcal{O} je također u \mathcal{O}). Dokažite da je skup $\bigcup_{S \in \mathcal{O}} S$ oboriv skup formula.
 b) (8b) Neka je S potpun i konzistentan skup logike sudova. Dokažite da skup svih logičkih posljedica od S nije konačno aksiomatizabilan.
3. U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 a) (6b) $(R \rightarrow (P \vee Q)) \leftrightarrow ((R \wedge \neg P) \rightarrow Q)$
 b) (5b) $((P \rightarrow Q) \vee \neg Q) \rightarrow P \vdash P$
4. a) (7b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\neg \exists x \forall y (R(x, y) \wedge Q(y)) \vee \forall y (\exists x P(y, x) \rightarrow \forall x (Q(x) \wedge R(y, x)))$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- b) (10b) Dokažite da je skup formula

$$S = \{R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x), \exists y R(y, x), R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z))\}$$

ispunljiv te da je svaka $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

5. (10b) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right), \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji struktura \mathfrak{M}_n takva da $\mathfrak{M}_n \models S$ i $\mathfrak{M}_n \models F_k$ za neki $k \geq n$, tada S ima beskonačan normalan model.
- b) Ako za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji struktura \mathfrak{M}_n takva da $\mathfrak{M}_n \models S$ i $\mathfrak{M}_n \models F_k$ za neki $k \leq n$, tada S ima beskonačan normalan model.